Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

Н. Н. Осипов

ФУНКЦИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ BMO

§1. Постановка задачи

Данная заметка предполагает знакомство читателя с работами [1,2] (или хотя бы с первой из них), в которых для произвольной функции f из достаточно широкого класса был описан алгоритм вычисления функции

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon(I)} \bigl\{ \langle f \circ \varphi \rangle_I \;\big|\; \langle \varphi \rangle_I = x_1, \langle \varphi^2 \rangle_I = x_2 \bigr\},$$

где $\langle \varphi \rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|I|} \int_I \varphi$ и $\mathrm{BMO}_\varepsilon(I)$ – шар радиуса ε в пространстве

$$\mathrm{BMO}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{ \varphi \in L^1(I) \;\big|\; \|\varphi\|^2_{\mathrm{BMO}(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{J \subset I} \langle |\varphi - \langle \varphi \rangle_J|^2 \rangle_J < \infty \Bigr\}.$$

Здесь мы повторим, что функция $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ задана на параболической полосе

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2 + \varepsilon^2 \bigr\}$$

(в том смысле, что Ω_ε состоит в точности из тех точек, для которых супремум в определении $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ берется по непустому множеству), и при этом $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ оказывается наименьшей из всех заданных на Ω_ε и локально вогнутых (т.е. вогнутых на любом выпуклом подмножестве в Ω_ε) функций G, удовлетворяющих граничному условию $G(x, x^2) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Что касается класса функций, которому может принадлежать функция f, то предполагалась непрерывность производных f' и f'', а также накладывались определенные интегральные условия на f', f'' и f'''. Функция f''' фактически определяла поведение функции $\boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f)$:

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f(t) + at^2 + bt + c) = \boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f) + ax_2 + bx_1 + c.$$

При этом наиболее существенную роль играл знак $\operatorname{sign} f'''$.

Ключевые слова: функция Беллмана, BMO.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00607 и стипендией ERCIM “Alain Bensoussan”.

Цель этой статьи – продемонстрировать силу методов, разработанных в [1, 2]. Здесь мы описываем поведение функций $\boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f)$, когда f пробегает некоторое параметрическое семейство. То есть мы применяем алгоритм не для фиксированной функции f, а изучаем, как будет меняться функция $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, когда ее граничные значения f некоторым образом варьируются. Отметим, что существенно более сложный пример, демонстрирующий силу методов из статьи [2] (в которой идеи, намеченные в [1], рассматриваются в полной общности), описан в [3]. Здесь же мы будем в основном опираться на те понятия и методы, которые фигурировали уже в [1] (однако рассматриваемые нами функции f, вообще говоря, не принадлежат классу допустимых граничных значений из [1] и ссылаться мы будем все-таки на [2]).

Итак, рассмотрим функцию $f \in C^2(\mathbb{R})$, такую что

$$f'''(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t < -\alpha; \\ 1 & \text{для} \quad -\alpha < t < 0; \\ -1 & \text{для} \quad 0 < t < \beta; \\ 1 & \text{для} \quad \beta < t < \beta + \gamma; \\ 0 & \text{для} \quad t > \beta + \gamma, \end{cases}$$

где α, β и γ – некоторые положительные параметры. Тогда f с точностью до полинома второй степени вычисляется по формуле

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 t - \frac{1}{6}\alpha^3 & \text{для} \quad t < -\alpha, \\ \frac{1}{6}t^3 & \text{для} \quad -\alpha < t < 0, \\ -\frac{1}{6}t^3 & \text{для} \quad 0 < t < \beta, \\ \frac{1}{6}t^3 - \beta t^2 + \beta^2 t - \frac{1}{3}\beta^3 & \text{для} \quad \beta < t < \beta + \gamma, \\ \frac{1}{2}(\gamma - \beta)t^2 + \frac{1}{2}\big(\beta^2 - 2\beta\gamma - \gamma^2\big)t + \frac{1}{6}\big(\gamma^3 + 3\beta\gamma^2 - +5\beta^2\gamma - \beta^3\big) & \\ & \text{для} \quad t > \beta + \gamma. \end{cases}$$

Наша цель – изучить поведение функций $\boldsymbol{B}_\varepsilon(x_1, x_2;\, f)$ для всех положительных α, β и γ.

§2. Общие принципы

Как уже говорилось, предполагается, что читатель знаком с методами и терминологией из статьи [1]. В частности, мы будем считать известными такие понятия, как *лунка*, *уголок*, *троллейбус*, *сила* и т.д., а также связанные с этими понятиями формулы и уравнения.

Через $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ мы будем обозначать концы *гипотетической полной лунки* с *корнем* в точке 0 (т.е. a и b – концы лунки в предположении, что она не сливается с уголком[1]). При этом всякий раз, когда мы используем эти обозначения, мы предполагаем, что $D_{\mathrm{R}}\big(a(\varepsilon), b(\varepsilon)\big) \leqslant 0$, где

$$D_{\mathrm{R}}(a,b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f''(b) - \langle f'' \rangle_{[a,b]}.$$

Возможные фолиации. Правый хвост лунки продолжается до бесконечности тогда и только тогда, когда соответствующая сила отрицательна вплоть до точки $\beta+\gamma$:

$$D_{\mathrm{R}}\big(a(\varepsilon), b(\varepsilon)\big)e^{b(\varepsilon)/\varepsilon} + \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\beta+\gamma} f'''(t)e^{t/\varepsilon}dt \leqslant 0. \qquad (1)$$

Что касается троллейбуса (включая вырожденный случай, когда лунка полностью исчезает), то он возникает, если между двумя силами, соответствующими полной лунке и точке $+\infty$, не достигается баланс вплоть до точки $b(\varepsilon)$:

$$D_{\mathrm{R}}\big(a(\varepsilon), b(\varepsilon)\big)e^{-b(\varepsilon)/\varepsilon} + \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\beta+\gamma} f'''(t)e^{-t/\varepsilon}dt \geqslant 0. \qquad (2)$$

Здесь мы опираемся на лемму 6.20 из статьи [1] или, что более точно, на лемму 4.2.15 из статьи [2].

Оказывается, что из (1) и (2) вытекает, что для любых α и β существуют функции g и h от $\varepsilon \in [0, +\infty)$, такие что, сравнивая принимаемые ими значения с оставшимся параметром γ, можно описать эволюцию функции $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ по ε. А именно, эти функции, во-первых, обладают следующими свойствами.

- Функции g и h непрерывны и непрерывно зависят от α и β.
- Функция g – возрастающая, а h – убывающая. При этом $g(0)=0$ и $h(\varepsilon) = +\infty$ в некоторой правой окрестности нуля (мы считаем значение $+\infty$ допустимым для h).

[1] Мы вообще нигде явно не вычисляем концы реальной лунки и не вводим для них обозначений: всегда подразумевается, что $b(\varepsilon) - a(\varepsilon) = 2\varepsilon$

- Всегда имеем $g \leqslant h$. При этом существует такое значение $C_{\alpha,\beta}$, что g и h либо тождественно с ним совпадают начиная с некоторого момента (одинакового для обеих функций), либо к нему стремятся при $\varepsilon \to +\infty$.

Во-вторых, g и h позволяют определить тип фолиации для $\boldsymbol{B}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{R}}\,, & \text{если } \gamma \leqslant g(\varepsilon); \\ \Omega_\varepsilon = \Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{R}} \cup \Omega_{\mathrm{ang}} \cup \Omega_{\mathrm{L}}\,, & \text{если } g(\varepsilon) < \gamma < h(\varepsilon); \\ \Omega_\varepsilon = \Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{tr,L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{L}}\,, & \text{если } \gamma \geqslant h(\varepsilon). \end{cases} \tag{3}$$

Итак, мы всегда начинаем с лунки и уголка, расположенного справа от нее (поэтому $g(0) = 0$ и $h(\varepsilon) = +\infty$ при малых ε). Если мы теперь будем увеличивать ε, то увеличивающаяся лунка может либо догнать уголок и необратимо присоеденить его к себе в виде троллейбуса, либо уголок может навсегда убежать в зону линейности. Параметр γ определяет величину силы, которая толкает уголок к лунке, и чем он больше, тем уголку сложнее убежать. Есть критическая граница $C_{\alpha,\beta}$, сравнивая γ с которой, мы можем понять, какой из двух сценариев в итоге реализуется. При этом оказывается, что ситуация $\gamma = C_{\alpha,\beta}$ может означать только одно: лунка догонит уголок в точности в тот момент, когда он достигнет зоны линейности (однако момент этот может быть $+\infty$). Трактовать это мы можем одновременно и как то, что у нас троллейбус возник, и как то, что уголок исчез.

Как мы уже говорили, конфигурация $\Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{tr,L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{L}}$ сохраняется после своего возникновения (поскольку функция h – убывающая), однако мы подразумеваем, что этот случай может включать вырожденную конфигурацию $\Omega_{\mathrm{L}}(-\infty, +\infty)$. Выяснить, при каких условиях троллейбус вырождается и доказать, что после вырождения он уже не возникает, достаточно просто. Сделаем это прямо сейчас.

Вырождение троллейбуса. Конфигурация $\Omega_{\mathrm{L}}(-\infty, +\infty)$ возникнет тогда и только тогда, когда сила с *источником* в $+\infty$ неотрицательна во всех точках, т.е. когда

$$\int\limits_u^{+\infty} f'''(t) e^{-t/\varepsilon} dt \geqslant 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Так как отрицательная составляющая в интеглале возникает только при $u < \beta$ и вносит наибольший вклад при $u = 0$, то это неравенство достаточно проверять при $u = 0$. Проведя вычисления, приходим к неравенству

$$e^{-(\beta+\gamma)/\varepsilon} - 2e^{-\beta/\varepsilon} + 1 \leqslant 0.$$

Введем переменную $\omega = e^{-\beta/\varepsilon}$, которая пробегает интервал $[0, 1)$ когда ε растет от 0 до $+\infty$, и рассмотрим функцию

$$\varphi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} w^{1+\gamma/\beta} - 2\omega + 1,$$

которая определена на всей полупрямой $[0, +\infty)$. Видим, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$ и единственный экстремум функции φ находится в точке

$$w_0 = \Big(\frac{2\beta}{\beta+\gamma}\Big)^{\beta/\gamma}.$$

Значит, функция φ имеет корень w^* (причем единственный) на интервале $[0, 1)$ тогда и только тогда, когда $w_0 < 1$, или, что то же самое, когда $\beta < \gamma$. Итак, если возникает троллейбус, то при $\beta \geqslant \gamma$ он никогда полностью не вырождается, а при $\beta < \gamma$ – навсегда исчезает в момент $\varepsilon = -\frac{\beta}{\log w^*}$. Заметим, что все опять определяется тем, насколько велико γ, т.е., насколько велика сила, “проталкивающая” уголок через лунку.

§3. Формулы для лунки

В оставшейся части статьи мы опишем функции g и h и увидим, что они действительно обладают перечисленными свойствами. В самом конце статьи мы соберем все вместе и полностью выпишем ответ.

В этом параграфе мы приведем пары функций $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b}_i$, значения которых суть концы a и b гипотетической полной лунки при различных положениях этих концов относительно точек $-\alpha$, β и $\beta+\gamma$. Также мы выпишем формулы для функций

$$d_i(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathrm{R}}\big(\mathfrak{a}_i(\varepsilon), \mathfrak{b}_i(\varepsilon)\big).$$

Ясно, что если лунка не переросла через точки $-\alpha$ и β, то она должна быть симметричной и мы имеем

$$a(\varepsilon) = \mathfrak{a}_1(\varepsilon) = -\varepsilon \quad \text{и} \quad b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_1(\varepsilon) = \varepsilon. \tag{4}$$

Кроме того, верна формула $d_1(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, пусть левый конец лунки лежит в интервале $[-\alpha, 0)$, а правый – в интервале $[\beta, \beta+\gamma]$ (отметим, что такое может произойти только в случае, когда $\beta \leqslant \alpha$ и $\varepsilon \geqslant \beta$). Тогда $a(\varepsilon) = \mathfrak{a}_2(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_2(\varepsilon)$, где

$$\mathfrak{a}_2(\varepsilon) = -\varepsilon + \tfrac{\beta}{2} - \varepsilon v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr) \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}_2(\varepsilon) = \varepsilon + \tfrac{\beta}{2} - \varepsilon v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr), \tag{5}$$

а функция v вычисляется по формуле

$$v(\mu) = \sqrt{1 - \tfrac{2}{3\mu} - \tfrac{1}{12}\mu^2}. \tag{6}$$

Также имеем

$$d_2(\varepsilon) = \varepsilon - \beta\bigl(1 + v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr)\bigr).$$

Глядя на знак функции d_2, мы можем заключить, что максимальный размер лунки, концы которой вычисляются по формулам (5), составляет $2\varepsilon^* = 2\beta/\mu^*$, где μ^* – единственный корень уравнения

$$\mu^4 - 16\mu + 12 = 0 \tag{7}$$

на интервале $[0,1]$ (заметим, что $\mu^* \approx 0.77$).

Теперь рассмотрим ситуацию $a \in (-\infty, -\alpha]$ и $b \in (0, \beta]$ (отметим, что такое может произойти только в случае, когда $\beta \geqslant \alpha$ и $\varepsilon \geqslant \alpha$). Тогда $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_3(\varepsilon) = \alpha s(\varepsilon)$, где s и ε связаны уравнением

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{1 + 3s + 3s^2 - s^3}{3(1 + 2s - s^2)}. \tag{8}$$

Если s пробегает интервал $[1, 1+\sqrt{2})$, то функция, которая стоит справа от знака равенства в (8), строго возрастает от 1 до $+\infty$. Это значит, что на интервале $[\alpha, +\infty)$ наши соотношения однозначно определяют функцию $\mathfrak{b}_3(\varepsilon)$ и при этом она возрастает от α до $(1+\sqrt{2}\,)\alpha$ на этом интервале. Соответственно, функция $\mathfrak{a}_3(\varepsilon) = \mathfrak{b}_3(\varepsilon) - 2\varepsilon$ будет убывать от $-\alpha$ до $-\infty$. Также выпишем формулу для функции d_3:

$$d_3(\varepsilon) = \alpha - \mathfrak{b}_3(\varepsilon) + \frac{\mathfrak{b}_3^2(\varepsilon) - 2\alpha\mathfrak{b}_3(\varepsilon) - \alpha^2}{4\varepsilon}. \tag{9}$$

Отметим, что $d_3(\varepsilon) < 0$ для всех $\varepsilon \in [\alpha, +\infty)$.

Пусть теперь $a \in (-\infty, -\alpha]$ и $b \in [\beta, \beta + \gamma]$. В этом случае $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon)$, где

$$\mathfrak{b}_4(\varepsilon) = \varepsilon\rho\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}, \tfrac{\alpha}{\varepsilon}\bigr),$$

а функция $\rho(\mu,\nu)$ вычисляется как один из корней уравнения

$$(\rho+\nu)^3 + 2(\rho-\mu)^3 - 2\rho^3 = 3(\rho+\nu)^2 + 6(\rho-\mu)^2 - 6\rho^2. \tag{10}$$

В каких границах варьируются параметры $\mu = \frac{\beta}{\varepsilon}$ и $\nu = \frac{\alpha}{\varepsilon}$ и какой при этом корень уравнения (10) нужно использовать, станет ясно в дальнейшем (см. §7). Что же касается функции d_4, то она вычисляется по формуле

$$d_4(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon) - 2\beta + \alpha - \frac{(\mathfrak{b}_4(\varepsilon)+\alpha)^2 - 4\beta\mathfrak{b}_4(\varepsilon) + 2\beta^2}{4\varepsilon}. \tag{11}$$

§4. Случай $\varepsilon \leqslant \min(\alpha, \beta)$

В рассматриваемой ситуации неравенство (1) после вычислений сводится к соотношению $\gamma \leqslant g_1(\varepsilon)$, где

$$g_1(\varepsilon) = \varepsilon \log\bigl(2 - e^{(\mathfrak{b}_1(\varepsilon)-\beta)/\varepsilon}\bigl(1 + \tfrac{d_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr)\bigr) = \varepsilon\log\bigl(2 - \tfrac{1}{2}e^{1-\frac{\beta}{\varepsilon}}\bigr), \tag{12}$$

а неравенство (2) – к соотношению $\gamma \geqslant h_1(\varepsilon)$, где

$$h_1(\varepsilon) = -\varepsilon\log\bigl(2 + e^{(\beta-\mathfrak{b}_1(\varepsilon))/\varepsilon}\bigl(\tfrac{d_1(\varepsilon)}{\varepsilon} - 1\bigr)\bigr) = -\varepsilon\log\bigl(2 - \tfrac{3}{2}e^{\frac{\beta}{\varepsilon}-1}\bigr). \tag{13}$$

Сразу же отметим, что выражение, которое стоит под логарифмом в последнем равенстве, отрицательно при $\varepsilon \leqslant \frac{\beta}{1+\log\frac{4}{3}}$. В этом случае мы положим $h_1(\varepsilon) = +\infty$. Нетрудно проверить, что g_1 – возрастающая функция, начинающаяся в нуле, h_1 – убывающая функция, и при этом $0 < g_1 < h_1$. Еще отметим, что $g_1(\beta) \approx 0.41\,\beta$ и $h_1(\beta) \approx 0.69\,\beta$.

Итак, для $\varepsilon \leqslant \min(\alpha,\beta)$ мы имеем $g(\varepsilon) = g_1(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_1(\varepsilon)$ (см. (3)).

§5. Случай $\alpha > \beta$, $\varepsilon \geqslant \beta$ и $\mathfrak{a}_2(\varepsilon) \geqslant -\alpha$

Гипотетическая лунка только что переросла β. Рассмотрим ситуацию, когда $\alpha > \beta$ и гипотетическая полная лунка только что переросла через β, то есть рассмотрим те ε, которые лежат в некоторой окрестности $[\beta, \beta+\delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало. В этом случае $a(\varepsilon) = \mathfrak{a}_2(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_2(\varepsilon)$ (см. (5)). Подставив такие a и b в неравенства (1) и (2), мы получим, что в нашей окрестности $g(\varepsilon) = g_2(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_2(\varepsilon)$ (см. (3)), где

$$\begin{aligned} g_2(\varepsilon) &= \mathfrak{b}_2(\varepsilon) - \beta + \varepsilon\log\bigl(1 - \tfrac{d_2(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr) \\ &= \varepsilon - \tfrac{\beta}{2} - \varepsilon v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr) + \varepsilon\log\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon} + \tfrac{\beta}{\varepsilon}v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr)\bigr) \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} h_2(\varepsilon) &= \mathfrak{b}_2(\varepsilon) - \beta - \varepsilon\log\bigl(1 + \tfrac{d_2(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr) \\ &= \varepsilon - \tfrac{\beta}{2} - \varepsilon v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr) - \varepsilon\log\bigl(2 - \tfrac{\beta}{\varepsilon} - \tfrac{\beta}{\varepsilon}v\bigl(\tfrac{\beta}{\varepsilon}\bigr)\bigr). \end{aligned} \tag{15}$$

Напомним, что функция v вычисляется по формуле (6).

Вспомним также, что максимальный размер гипотетической полной лунки, концы которой вычисляются по формулам (5), составляет $2\varepsilon^* = 2\beta/\mu^*$, и отметим, что на интервале $[\beta,\varepsilon^*)$ функции g_2 и h_2 обладают следующими свойствами: функция g_2 возрастает, функция h_2 убывает, $h_2 > g_2$, $g_2(\beta) = g_1(\beta)$ и $h_2(\beta) = h_1(\beta)$.

Случай $\varepsilon \in [\beta,\varepsilon^*)$ и $\mathfrak{a}_2(\varepsilon) > -\alpha$. Начнем теперь увеличивать ε, не выходя за пределы интервала $[\beta,\varepsilon^*)$. Также наложим ограничение $\mathfrak{a}_2(\varepsilon) > -\alpha$, которое гарантирует, что $a(\varepsilon) > -\alpha$ в случае, если $b(\varepsilon) < \beta+\gamma$. На интервале $[\beta,\varepsilon^*)$ функция $\mathfrak{a}_2$ убывает и принимает значения между $-\beta$ и $-A\beta$, где

$$A = \frac{1}{\mu^*} - \frac{1}{2} + \frac{v(\mu^*)}{\mu^*} \approx 1.18. \tag{16}$$

Таким образом, если $\alpha > A\beta$, мы рассматриваем весь интервал $[\beta,\varepsilon^*)$, а иначе – только его часть $[\beta,\varepsilon_1^0)$, где $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^0(\alpha,\beta)$ – единственная точка в $[\beta,\varepsilon^*)$, в которой $\mathfrak{a}_2(\varepsilon_1^0) = -\alpha$. Почему выбрано такое обозначение, станет ясно позже, когда для $\alpha \leqslant \beta$ появится функция $\varepsilon_2^0(\alpha,\beta)$ – момент, в который гипотетическая полная лунка, уже переросшая через $-\alpha$, перерастает через β. Затем мы склеим ε_1^0 и ε_2^0 по лучу $\alpha=\beta$ в одну функцию $\varepsilon^0(\alpha,\beta)$.

Возвращаясь к описываемому случаю, когда $\alpha > \beta$ и $\mathfrak{a}_2$ еще не доросла до $-\alpha$, замечаем, что в какой-то момент наша гипотетическая полная лунка может перерасти точку $\beta+\gamma$, то есть может оказаться, что $b(\varepsilon) > \beta+\gamma$ и при этом число ε удовлетворяет описанным выше ограничениям. В таком случае у нас должна быть конфигурация $\Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{R}}$. Покажем, что такая ситуация по-прежнему описывается соотношениями (3), где $g(\varepsilon) = g_2(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_2(\varepsilon)$. Для этого достаточно доказать следующий факт.

Факт 1. Пусть $\alpha > \beta$, $\varepsilon \in [\beta,\varepsilon^*)$ и $\mathfrak{a}_2(\varepsilon) > -\alpha$. Тогда случай $\gamma < g_2(\varepsilon)$ полностью включает в себя ситуацию $b(\varepsilon) > \beta+\gamma$, где $b(\varepsilon)$ – правый конец гипотетической полной лунки.

Предположим, что это не так, то есть, что для некоторого из рассматриваемых ε выполняются соотношения $b(\varepsilon) > \beta+\gamma$ и $\gamma \geqslant g_2(\varepsilon)$. В этом случае мы имеем $\mathfrak{a}_2(\varepsilon) > -\alpha$ и $\mathfrak{b}_2(\varepsilon) - \beta \leqslant g_2(\varepsilon) \leqslant \gamma$. Но тогда $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{b}_2$ должны быть концами полной лунки, что противоречит нашим предположениям. $\square$

Итак, мы описали ситуацию для всех $\varepsilon \in [\beta, \varepsilon^*)$ в случае, если $\alpha > A\beta$, и для $\varepsilon \in [\beta, \varepsilon_1^0)$, если $\alpha \leqslant A\beta$.

Случай $\varepsilon \geqslant \varepsilon^*$ и $\mathfrak{a}_2(\varepsilon^*) > -\alpha$. Как мы уже отмечали, второе из неравенств можно записать в простом виде $\alpha > A\beta$. Что касается фолиации, то в рассматриваемой ситуации ее вид определяется ответом на вопрос, успела ли гипотетическая полная лунка к моменту $\varepsilon^* = \beta/\mu^*$ перерасти точку $\beta + \gamma$, т.е. для $\varepsilon \geqslant \varepsilon^*$ мы сравниваем γ с функциями

$$g(\varepsilon) = h(\varepsilon) = C_\beta$$

где $C_\beta \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{b}_2(\varepsilon^*) - \beta$. Отметим, что все склеивается непрерывно с предыдущим случаем:

$$C_\beta = g_2(\varepsilon^*) = h_2(\varepsilon^*).$$

§6. Случай $\beta \geqslant \alpha$, $\varepsilon \geqslant \alpha$ и $\mathfrak{b}_3(\varepsilon) \leqslant \beta$

Прежде всего отметим, что если $\beta \geqslant (1+\sqrt{2})\alpha$, то $\mathfrak{b}_3(\varepsilon) < \beta$. Если же это не так, то можно найти такое $\varepsilon_2^0 > \alpha$, что $\mathfrak{b}_3(\varepsilon_2^0) = \beta$:

$$\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^0(\alpha,\beta) = \frac{1 + 3\frac{\beta}{\alpha} + 3\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}}{3\bigl(1 + 2\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\bigr)}\,\alpha. \tag{17}$$

Таким образом, если $\beta \geqslant (1+\sqrt{2})\alpha$, мы рассматриваем все $\varepsilon \in [\alpha, +\infty)$, а иначе – только те ε, которые лежат в интервале $[\alpha, \varepsilon_2^0]$. В рассматриваемой ситуации имеем $a(\varepsilon) = \mathfrak{a}_3(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_3(\varepsilon)$. Подставив такие a и b в неравенства (1) и (2), имеем $g(\varepsilon) = g_3(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_3(\varepsilon)$ (см. (3)), где

$$g_3(\varepsilon) = \varepsilon \log\bigl(2 - e^{(\mathfrak{b}_3(\varepsilon)-\beta)/\varepsilon}\bigl(1 + \tfrac{d_3(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr)\bigr)$$

и

$$h_3(\varepsilon) = -\varepsilon \log\bigl(2 + e^{(\beta-\mathfrak{b}_3(\varepsilon))/\varepsilon}\bigl(\tfrac{d_3(\varepsilon)}{\varepsilon} - 1\bigr)\bigr)$$

(ср. формулы для g_1 и h_1). Мы полагаем $h_3(\varepsilon) = +\infty$, если выражение под знаком логарифма отрицательно.

Функции g_3 и h_3 обладают всеми ожидаемыми свойствами: функция g_3 возрастает, функция h_3 убывает, $g_3 < h_3$, $g_3(\alpha) = g_1(\alpha)$ и $h_3(\alpha) = h_1(\alpha)$. Также отметим, что если $\beta \geqslant (1+\sqrt{2})\alpha$ (случай, когда мы рассматриваем все $\varepsilon \geqslant \alpha$), то обе функции стремятся к $\beta - \alpha$ при $\varepsilon \to \infty$. Еще отметим, что функция h_3 может принимать значение $+\infty$ в некоторой правой окрестности точки α, только если $\alpha < \frac{\beta}{1+\log\frac{4}{3}}$. В частности, в этом случае $h_3(\alpha) = h_1(\alpha) = +\infty$.

§7. Оставшийся случай: гипотетическая полная лунка перерастает через α и β

Рассмотрим случай, когда $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant A\beta$ и $\varepsilon \geqslant \varepsilon^0\ (\alpha, \beta)$, где ε^0 – непрерывная функция, определяемая для рассматриваемых α и β по формуле

$$\varepsilon^0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \varepsilon_1^0(\alpha, \beta), & \alpha \geqslant \beta; \\ \varepsilon_2^0(\alpha, \beta), & \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

Таким образом, ε^0 – это момент, в который гипотетическая полная лунка переросла как точку $-\alpha$, так и точку β, при условии, что α и β удовлетворяют указанным выше соотношениям, а γ достаточно велико.

При $\mu = \frac{\beta}{\varepsilon^0(\alpha,\beta)}$ и $\nu = \frac{\alpha}{\varepsilon^0(\alpha,\beta)}$ один из действительных корней уравнения (10) будет таким, что соответствующее ему значение $\mathfrak{b}_4(\varepsilon^0)$ совпадет с $\mathfrak{b}_2(\varepsilon^0) = -\alpha + 2\varepsilon^0$ при $\alpha \geqslant \beta$ или с $\mathfrak{b}_3(\varepsilon^0) = \beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. При этом он будет единственным действительным корнем, для которого соответствующая величина $d_4(\varepsilon^0)$ не превосходит нуля.

Теперь начнем увеличивать ε, выбирая корень уравнения (10) для значений $\mu = \frac{\beta}{\varepsilon}$ и $\nu = \frac{\alpha}{\varepsilon}$ из соображений непрерывности с учетом уже сделанного выбора для ε^0. Построим соответствующие непрерывные функции $\mathfrak{a}_4(\varepsilon)$, $\mathfrak{b}_4(\varepsilon)$ и $d_4(\varepsilon)$. Через $\varepsilon^{**}(\alpha, \beta)$ обозначим тот момент, когда впервые имеем $d_4(\varepsilon^{**}) = 0$. Для тех α и β, для которых такой момент не наступает, положим $\varepsilon^{**}(\alpha, \beta) = +\infty$. Можно также проверить, что выбираемый корень может перестать быть действительным только после наступления момента ε^{**}.

Случай $\varepsilon \leqslant \varepsilon^{**}$. Итак, если $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant A\beta$, значение γ достаточно велико и $\varepsilon^0(\alpha, \beta) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^{**}(\alpha, \beta)$, то мы можем вычислить концы гипотетической полной лунки: $a(\varepsilon) = \mathfrak{a}_4(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon)$. При этом $2\varepsilon^{**}$ – максимальный размер, которого она может достигнуть.

Из соображений масштабируемости существует функция μ^{**} от одной переменной $r \in \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}, A\right]$ такая, что $\varepsilon^{**}(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\mu^{**}(\alpha/\beta)}$. При $r \in \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$, имеем $\mu^{**}(r) = 0$. Это означает, что при $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant \frac{\beta}{2}$ полная лунка может по-прежнему расти неограниченно (как и при $\alpha \leqslant \frac{\beta}{1+\sqrt{2}}$). Отметим, что если $\alpha = \frac{\beta}{2}$, то $d_4(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to \infty$ (однако ноль не достигается). При оставшихся $r \in \left(\frac{1}{2}, A\right]$ функция μ^{**} растет от 0 до μ^*. Это означает, что при $\frac{\beta}{2} < \alpha \leqslant A\beta$ потенциальный размер лунки уменьшается при увеличении соотношения α/β. То есть лунка будет тем больше, чем позже она переросла β при $\alpha \leqslant \beta$ и чем раньше она переросла $-\alpha$ при $\beta \leqslant \alpha$. Минимальным он будет в случае, если лунка, правый конец которой уже перерос β, дорастет до $-\alpha$ в самый последний момент $\varepsilon^* = \beta/\mu^*$ (случай $\alpha = A\beta$). Тогда расти дальше она не сможет: $\varepsilon^{**} = \varepsilon_1^0 = \varepsilon^*$.

Получим функции g и h для $\varepsilon^0(\alpha,\beta) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^{**}(\alpha,\beta)$. Подставив соответствующие a и b в неравенства (1) и (2), имеем $g(\varepsilon) = g_4(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_4(\varepsilon)$, где

$$g_4(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon) - \beta + \varepsilon \log\left(1 - \tfrac{d_4(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

и

$$h_4(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon) - \beta - \varepsilon \log\left(1 + \tfrac{d_4(\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$$

(ср. формулы для g_2 и h_2).

Как и следовало ожидать, функции g_4 и h_4 в точке ε^0 непрерывно соединяются с функциями g_2 и h_2 в случае $\beta \leqslant \alpha$ или с g_3 и h_3 в случае $\alpha \leqslant \beta$. При рассматриваемых $\varepsilon \in [\varepsilon^0, \varepsilon^{**}]$ функция g_4 возрастает, функция h_4 убывает, и $g_4 \leqslant h_4$. При этом если $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant \frac{\beta}{2}$, то $\varepsilon^{**} = +\infty$ и $g_4, h_4 \to \beta - \alpha$ при $\varepsilon \to \infty$.

Как и в ситуации, описываемой функциями g_2 и h_2, мы должны избавиться от предположения о том, что γ достаточно велико. Лунка могла перерасти γ даже до того, как она переросла α (т.е. уже к моменту ε^0 или после него, но до момента ε^{**}), но это не важно. Как и ранее, нужно доказать следующий факт.

Факт 2. Пусть $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant A\beta$ и $\varepsilon^0(\alpha,\beta) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^{**}(\alpha,\beta)$. Тогда из того, что $b(\varepsilon) > \beta + \gamma$, вытекает оценка $\gamma < g_4(\varepsilon)$, где $b(\varepsilon)$ – правый конец гипотетической полной лунки.

Этот факт означает, что если лунка сумела перерасти точку $\beta + \gamma$ (а значит, мы необходимо имеем конфигурацию $\Omega_{\mathrm{L}} \cup \Omega_{\mathrm{cup}} \cup \Omega_{\mathrm{R}}$), то в терминах функций g и h окажется выполненным подходящее соотношение. Пусть это не так и $\gamma \geqslant g_4(\varepsilon) \geqslant \mathfrak{b}_4(\varepsilon) - \beta$. Поскольку мы также имеем $\mathfrak{a}_4 \leqslant -\alpha$, концы полной лунки должны совпадать с $\mathfrak{a}_4$ и $\mathfrak{b}_4$. Приходим к противоречию: $b(\varepsilon) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon) \leqslant \beta + \gamma$. □

Случай $\varepsilon \geqslant \varepsilon^{**}$. Осталось описать ситуацию, когда $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant A\beta$ и $\varepsilon \geqslant \varepsilon^{**}(\alpha,\beta)$. Функции $g = g_4$ и $h = h_4$ склеиваются в точке ε^{**}:

$$g_4(\varepsilon^{**}) = h_4(\varepsilon^{**}) = \mathfrak{b}_4(\varepsilon^{**}) - \beta.$$

После чего они остаются постоянными и дальнейшая конфигурация определяется тем, успела ли гипотетическая полная лунка к моменту ε^{**} перерасти точку $\beta+\gamma$:

$$g(\varepsilon)=h(\varepsilon)=\mathfrak{b}_4\bigl(\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)\bigr)-\beta$$

для всех $\varepsilon\geqslant\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)$.

§8. Ответ

Итак, каждая из функций g и h из (3) делится на несколько фрагментов и константу $C_{\alpha,\beta}$, в которую обе функции переходят одновременно (однако переход этот может произойти на $+\infty$). Упомянутые фрагменты вычисляются по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned}
g_{1,3}(\varepsilon)&=\quad\varepsilon\log\bigl(2-e^{(\mathfrak{b}_{1,3}(\varepsilon)-\beta)/\varepsilon}\bigl(1+\tfrac{d_{1,3}(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr)\bigr),\\
h_{1,3}(\varepsilon)&=-\varepsilon\log\bigl(2+e^{(\beta-\mathfrak{b}_{1,3}(\varepsilon))/\varepsilon}\bigl(\tfrac{d_{1,3}(\varepsilon)}{\varepsilon}-1\bigr)\bigr),\\
g_{2,4}(\varepsilon)&=\mathfrak{b}_{2,4}(\varepsilon)-\beta+\varepsilon\log\bigl(1-\tfrac{d_{2,4}(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr),\\
h_{2,4}(\varepsilon)&=\mathfrak{b}_{2,4}(\varepsilon)-\beta-\varepsilon\log\bigl(1+\tfrac{d_{2,4}(\varepsilon)}{\varepsilon}\bigr).
\end{aligned}$$

Функции $\mathfrak{b}_i(\varepsilon)$ и $d_i(\varepsilon)$ обсуждаются в §3. При этом для $i=1,2$ они вычисляются явно, что приводит к явным формулам (12), (13), (14) и (15) для соответствующих функций g_i и h_i. Также имеем $\mathfrak{b}_3=\alpha s(\varepsilon)$ и $\mathfrak{b}_4=\varepsilon\rho\bigl(\frac{\beta}{\varepsilon},\frac{\alpha}{\varepsilon}\bigr)$, где s и ρ – корни уравнений (8) и (10), соответственно. При этом корень уравнения (10) выбирается из соображений непрерывности, как это описано в начале §7. Соответствующие функции d_i вычисляются по формулам (9) и (11).

Чтобы теперь описать, как функции g и h делятся на приведенные выше фрагменты, нам понадобятся все введенные ранее обозначения. В связи с этим напомним, что $2\varepsilon^*=2\beta/\mu^*\approx 2\beta/0.77$ – максимальный размер гипотетической полной лунки, левый и правый концы которой лежат в интервалах $(-\alpha,0)$ и $[\beta,\beta+\gamma)$, соответственно. При этом левый конец такой лунки, достигшей своего максимального размера, принимает значение $a(\varepsilon^*)=-A\beta\approx-1.18\beta$. Что касается точных значений величин μ^* и A, то μ^* – единственный корень уравнения (7) на единичном интервале, а значение A вычисляется по формуле (16). Далее, размер гипотетической полной лунки, концы которой лежат в интервалах $(-\infty,-\alpha]$ и $(0,\beta)$, может быть сколь угодно большим, однако у ее правого конца есть предел: $b(\varepsilon)\to(1+\sqrt{2})\alpha$ при $\varepsilon\to\infty$. Из всего вышесказанного следует, что гипотетическая полная лунка, которая не покидает интервал $(-\infty, \beta+\gamma)$, может перерасти обе точки $-\alpha$ и β, только если $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant A\beta$. Для указанных α и β мы ввели функцию $\varepsilon^0(\alpha, \beta)$ – момент, когда такая лунка впервые перерастает и точку $-\alpha$, и точку β. Эта функция непрерывно склеивается из двух частей ε_1^0 и ε_2^0, заданных при $\beta \leqslant \alpha \leqslant A\beta$ и при $\frac{\beta}{1+\sqrt{2}} < \alpha \leqslant \beta$, соответственно. При этом ε_1^0 вычисляется как корень уравнения $\mathfrak{b}_2(\varepsilon_1^0) - 2\varepsilon_1^0 = -\alpha$, а для ε_2^0 можно использовать явную формулу (17). Осталось напомнить, что через $\varepsilon^{**}(\alpha, \beta)$ мы обозначали максимальный размер полной лунки, которая лежит в пределах интервала $(-\infty, \beta+\gamma)$ и концы которой переросли $-\alpha$ и β. При этом, когда α пробегает интервал $\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{2}}, \frac{\beta}{2}\right]$, имеем $\varepsilon^{**}(\alpha, \beta) = +\infty$. На оставшемся интервале $\left(\frac{\beta}{2}, A\beta\right]$ функция $\varepsilon^{**}(\cdot, \beta)$ убывает от $+\infty$ до ε^*. Что касается требования $a, b \in (-\infty, \beta+\gamma)$, то в силу фактов 1 и 2 оно оказывается необременительным и все расчеты мы можем проводить в предположении, что γ велико.

Итак, теперь мы можем выписать ответ.

- В случае
$$\begin{cases} \varepsilon \in (0, \alpha] \\ \varepsilon \in (0, \beta] \end{cases}$$
имеем $g(\varepsilon) = g_1(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_1(\varepsilon)$.
- Если α пробегает от β до $A\beta$, то $\varepsilon^0(\alpha, \beta)$ пробегает от β до $\varepsilon^* = \beta/\mu^*$, и в случае
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha \in [\beta, A\beta] \\ \varepsilon \in [\beta, \varepsilon^0(\alpha, \beta)] \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha \in [A\beta, +\infty) \\ \varepsilon \in [\beta, \varepsilon^*] \end{cases} \end{array}\right.$$
имеем $g(\varepsilon) = g_2(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon) = h_2(\varepsilon)$.
- В случае
$$\begin{cases} \alpha \in [A\beta, +\infty) \\ \varepsilon \in [\varepsilon^*, +\infty) \end{cases}$$
функции g и h обращаются в константу $C_{\alpha,\beta} = C_\beta$:
$$g \equiv h \equiv g_2(\varepsilon^*) = h_2(\varepsilon^*) = \mathfrak{b}_2(\beta/\mu^*) - \beta.$$

- В случае
$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases}\alpha\in\left(\frac{\beta}{1+\sqrt{2}},\beta\right]\\ \varepsilon\in[\alpha,\varepsilon^0(\alpha,\beta)]\end{cases}\\ &\begin{cases}\alpha\in\left(0,\frac{\beta}{1+\sqrt{2}}\right]\\ \varepsilon\in[\alpha,+\infty)\end{cases}\end{aligned}\right.$$
имеем $g(\varepsilon)=g_3(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)=h_3(\varepsilon)$. При этом в константу $C_{\alpha,\beta}$ функции g и h обращаются на $+\infty$:
$$g,h\to\beta-\alpha\quad\text{при}\quad\varepsilon\to\infty.$$
- В случае
$$\begin{cases}\alpha\in\left[\frac{\beta}{1+\sqrt{2}},A\beta\right]\\ \varepsilon\in\left[\varepsilon^0(\alpha,\beta),\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)\right)\end{cases}$$
имеем $g(\varepsilon)=g_4(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)=h_4(\varepsilon)$.
  При этом если $\alpha=A\beta$, то $\varepsilon^{**}=\varepsilon^0=\varepsilon^*$, а если $\alpha\in\left[\frac{\beta}{1+\sqrt{2}},\frac{\beta}{2}\right]$, то $\varepsilon^{**}=+\infty$ и
$$g,h\to C_{\alpha,\beta}=\beta-\alpha\quad\text{при}\quad\varepsilon\to\infty.$$
- В случае
$$\begin{cases}\alpha\in\left[\frac{\beta}{1+\sqrt{2}},A\beta\right]\\ \varepsilon\in\left[\varepsilon^{**}(\alpha,\beta),+\infty\right)\end{cases}$$
функции g и h обращаются в константу $C_{\alpha,\beta}$:
$$g\equiv h\equiv g_4\big(\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)\big)=h_4\big(\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)\big)=\mathfrak{b}_4\big(\varepsilon^{**}(\alpha,\beta)\big)-\beta.$$

Список литературы

1. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in* BMO. — Trans. Amer. Math. Soc., **368** (2016), 3415–3468. Препринт ПОМИ No. 19 (2011); Препринт ПОМИ No. 10 (2012).
2. P. Ivanisvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in* BMO II*: evolution.* — Memoirs Amer. Math. Soc., **255**, No. 1220 (2018). Препринт `arxiv:1510.01010`.
3. В. И. Васюнин, *Пример построения функции Беллмана для экстремальных задач в пространстве* BMO. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **424** (2014), 33–125.

Osipov N. N. Bellman function for a parametric family of extremal problems in BMO.

Suppose I is an interval on the real line and $\langle\,\cdot\,\rangle_I$ is the corresponding integral average. We describe how the Bellman function for the functional

$F(\varphi) = \langle f \circ \varphi \rangle_I$, $\varphi \in \mathrm{BMO}(I)$, varies when f runs over a certain parametric family of functions. Thereby, we once again demonstrate the work of the methods developed recently by V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, and the author.

С.-Петербургское отделение Математического
института имени В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27;
Международная лаборатория теории игр
и принятия решений при НИУ ВШЭ,
ул. Кантемировская, д. 3, корп. 1, лит. А,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `nicknick@pdmi.ras.ru`

Поступило 3 сентября 2018 г.