Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

С. В. Кисляков

ИСПРАВЛЕНИЕ ДО ФУНКЦИЙ С РЕДКИМ СПЕКТРОМ И РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИМСЯ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ГРУППЫ $\mathbb{R}^n$

1. Эта работа – дополнение к статье [1], которая, в свою очередь, была написана по мотивам более ранней публикации [2]. И в [2], и в [1] речь шла о том, что любую непрерывную функцию на конечномерной локально-компактной абелевой группе G, убывающую в подходящем смысле на бесконечности, можно изменением на множестве сколь угодно малой меры превратить в функцию с равномерно сходящимся представлением в виде ряда или интеграла Фурье и с редким спектром. Замечания по истории вопроса читатель может найти в тех же работах [1] и [2], здесь мы на них не останавливаемся.

Метод статьи [2] был тесно свзяан с аппроксимацией в пространствах L^p при $0 < p < 1$. Толчком к написанию работы [1] послужили два обстоятельства. Во-первых, незадолго перед тем появились новые сильные результаты об аппроксимации в L^p с $p < 1$, см. [3]. Во-вторых, оказалось, что тип равномерной сходимости разложений Фурье, гарантированный в [2] – не лучший из возможных и более удачные определения приводят к существенному усилению результатов.

Для простоты авторы работы [1] ограничились компактными абелевыми группами G, отметив только, что в случае некомпактных групп надо делать примерно то же самое, испльзуя [2] как "справочник". Однако это замечание все же не совсем справедливо по следующей причине. Разумеется, как бы там ни было, частичная сумма ряда Фурье или частичный интеграл Фурье функции, соответствующие подмножеству E двойственной группы Γ, определяются выражением $S_E(\widehat{f}\chi_E)^{\vee}$. Равномерная сходимость тесно связана с нормой $\sup\limits_{E\in\mathcal{E}} \|S_E f\|_{L^\infty(\Gamma)}$, где $\mathcal{E}$ – некий набор множеств $E \subset \Gamma$, фиксированный заранее ("базис суммирования"). Естественно предположить, что все множества E из

Ключевые слова: теорема об исправлении.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН No. 01 "Фундаментальная математика и ее приложения" (грант PRAS-18-01).

базиса ограничены (т.е. имеют компактное замыкание). Тогда в случае компактной группы G все они конечны (ибо двойственная группа Γ дискретна). Это обстоятельство довольно существенно использовалось при построении конкретных базисов суммирования в Γ, см. [1, п. 2.2, 2.3].

В случае некомпактной группы G эти конструкции все же не совсем адекватны. По прежнему естественно рассматривать множества E с компактным замыканием, но при этом оказывается “неправильным” накладывать какие бы то ни было иные ограничения на E, кроме измеримости. Если (например) $G = \mathbb{R}^n$, это влечет за собой ряд новых обстоятельств: оказывается естественным привлечь понятие точек плотности, верхних и нижних граней произвольных (несчетных, вообще говоря) семейств измеримых множеств и т.д. Каждое изменение по сравнению со случаем дискретной группы $\Gamma = \widehat{G}$ не очень сложно само по себе, но они довольно многочисленны, так что имеет смысл их записать. Это и сделано в настоящей работе.

2. Мы начнем с формулировки теоремы об исправлении для пространства $\mathbb{R}^n$, аналогичной основному результату из [1]. Как и в той работе, эта формулировка – скорее, схема, конкретизации которой будут описаны ниже.

2.1. Пусть E – ограниченное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим на пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператор S_E, $S_E f = (\widehat{F}\chi_E)^{\vee}$. Очевидно, функция $S_E f$ принадлежит пространству $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и непрерывна. Заметим еще, что оператор S_E не меняется при добавлении к E множества меры нуль.

Пусть $\mathcal{B}$ – некое семейство ограниченных измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Будем называть его базисом суммирования, если любой шар с центром в нуле содержится в каком-то множестве семейства $\mathcal{B}$. Через $u(\mathcal{B})$ обозначим пополнение множества функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, у которых носитель преобразования Фурье ограничен, относительно нормы

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} + \sum_{E\in\mathcal{B}} \|P_E f\|_{L^\infty}.$$

Далее, опишем множества, в которые мы будем помещать спектр исправленной функции. Это будет сделано в полной аналогии с [1].

Нелишне, видимо, отметить, что преобразование Фурье на $\mathbb{R}^n$ мы задаем формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}\, dx$$

(угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

Шаблоном (или l-шаблоном) называется любое конечное множество $\{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\} = M$ ненулевых точек в $\mathbb{Z}^l$ таких, что $n_1 m^{(1)} + \dots + n_k m^{(k)} = 0$ для некоторых неотрицательных целых чисел n_j, $j = 1, \dots, k$, не все из которых равны нулю. Если $m = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$, а $t = (t_1, \dots, t_l)$ – набор точек пространства $\mathbb{R}^n$, мы обозначаем через $[m, t]$ точку $m_1 t_1 + \dots + m_l t_l$. Набор $\{R_1, \dots, R_k\}$ из k измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ называется достаточным с шаблоном M (или M-достаточным), если для любого ограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдется такой набор $t = (t_1, \dots, t_l)$ точек в $\mathbb{R}^n$, что $[m^{(j)}, t] + C \subset R_j$ при $j = 1, \dots, k$.

Пусть задан M-достаточный набор $\{R_1, \dots R_k\} = R$ из k измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Для простоты считаем, что эти множества попарно не пересекаются. Обозначим через $u(\mathcal{B}, R_j)$ множество тех функций из пространства $u(\mathcal{B})$, введенного выше, для которых $\widehat{f}(t) = 0$ при п.в. $t \notin R_j$. Наконец, пусть $U = U(\mathcal{B}, R)$ – это множество всех сумм $h = f_1 + \dots + f_k$, где $f_j \in u(\mathcal{B}, R_j)$. Такое представление функции h единственно, поэтому U можно снабдить нормой

$$\|h\|_U = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \|f_j\|_{u(\mathcal{B}, R_j)}.$$

Для формулировки основной теоремы потребуется еще понятие согласованности базиса суммирования и M-достаточной системы множеств. Здесь впервые встретится различие со статьей [1], о котором говорилось выше. Именно, в соответствующем месте в [1] был задан базис суммирования $\mathcal{B}$ в дискретной группе $\Gamma = \widehat{C}$ и для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ вводилось множество $K_{\mathcal{B}}$ – объединение тех множеств $B \in \mathcal{B}$, которые разбивают K (т.е. $B \cap K \neq \varnothing$, $K \setminus B \neq \varnothing$).

В нашей ситуации логично вместо K взять измеримое ограниченное множество E в $\mathbb{R}^n$, то тогда при образовании объединения всех множеств из $\mathcal{B}$, разбивающих E, возникают вопросы об измеримости. Кроме того, смысл термина “$B \in \mathcal{B}$ разбивает E” требуется теперь изменить, учитывая, что для нас множество меры нуль неотличимо от пустого.

Итак, пусть $\mathcal{B}$ – базис суммирования в $\mathbb{R}^n$ и пусть E – ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что множество B из $\mathcal{B}$ *разбивает* E, если множества $E \cap B$ и $E \setminus B$ имеют положительную меру Лебега. Через $E_{\mathcal{B}}$ обозначим любой представитель (с точностью до множества меры 0) точной верхней грани семейства $\{B \in \mathcal{B} : B$ разбивает $E\}$ в решетке всех измеримых множеств $\pmod 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (порядок в этой решетке – разумеется, включение "$\subset$" с точностью до множества меры 0)[1].

Определение. *Базис суммирования $\mathcal{B}$ и M-достаточный набор $\{R_1, \ldots, R_k\}$ подмножеств в $\mathbb{R}^n$ называются согласованными, если для любого оганиченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ набор*

$$\{R_1 \setminus E_{\mathcal{B}}, \ldots, R_k \setminus E_b\}$$

тоже M-достаточен.

Сформулируем, наконец, теорему об исправлении.

Теорема 1. *Существует число p, $p \in (0,1)$, зависящее только от шаблона M, и такое, что всякий раз, когда базис суммирования $\mathcal{B}$ и M – достаточный набор $\{R_1, \ldots, R_k\} = R$ подмножеств в $\mathbb{R}^n$ согласованы, верно следующее. Для всякой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует функция g из $U(\mathcal{B}, R)$ такая, что*

$$|\{f \neq g\}| < \varepsilon \quad \textit{и} \quad \|g\|_V \leqslant C\varepsilon^{-D} \max\{\|f\|_\infty, \|f\|_p\}.$$

Постоянные C и D не зависят от f.

3. Доказательство этой теоремы получается почти теми же вычислениями, что и доказательство основного результата из [1] (см. §3 той работы). "Модельное" вычисление, впрочем, имелось еще в [2], причем там, в отличие от [1], все было выписано прямо для случая не обязательно компактной группы. Поэтому здесь мы не будем проводить похожие вычисления еще раз, а ограничимся "расшифровкой" формулировки.

Для этой расшифровки желательно взглянуть на примеры M-достаточных наборов множеств и понять, как могут быть устроены допустимые базисы суммирования и за счет чего выполняется условие согласования. Из этих трех вещей на устройстве достаточных наборов мы, опять же, не будем останавливаться – для торов довольно много

[1] Существование граней у любых семейств в этой решетке хоршо известно, см., например, [4]

примеров было приведено в [1, п. 2.1], их аналоги для $\mathbb{R}^n$ очевидны. Два других элемента "триады" требует обсуждения, к которому мы и приступаем.

4. Построение базисов суммирования (ср. с п. 2.2. в [1])**.** Приведем общую конструкцию, которая дает "довольно богатые" базисы суммирования. Ниже мы увидим, что, как правило, такие базисы согласованы со многими достаточными наборами.

Назовем систему $\mathcal{A}$ измеримых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ *блоком*, если она a) линейно упорядочена по включению с точностью до множества меры 0; b) содержит инфимум любой своей подсистемы и супремум[2] любой своей подсистемы, ограниченной сверху в $\mathcal{A}$; c) $\varnothing \in \mathcal{A}$ и любое ограниченное измеримое множество содержится (с точностью до множества меры 0) в одном из множеств системы $\mathcal{A}$.

Если E – ограниченное измеримое множество, а $\mathcal{A}$ – блок, то положим

$$D_{\mathcal{A}}(E) = \inf\{A : A \supset E, A \in \mathcal{A}\}.$$

Набор блоков $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ в $\mathbb{R}^n$ называется *каркасом*, если все пересечения $A_1 \cap \cdots \cap A_N$, $A_j \in \mathcal{A}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ ограничены. Каждое такое пересечение называется *ячейкой*. Когда каркас фиксирован, мы часто будем писать для краткости $D_j(E)$ вместо $D_{\mathcal{A}_j}(E)$. Нетрудно понять, что если A – ячейка, то $A = \bigcap\limits_{j=1}^{N} D_j(A)$ (это и многие последующие равенства и включения понимаются с точностью до множества меры 0; далее мы часто будем опускать это указание).

Тенью ячейки A называется множество $\mathit{om}A = \bigcup\limits_{j=1}^{N} D_j(A)$.

Базисом суммирования, порожденным каркасом $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$, будем называть совокупность всех ограниченных измеримых множеств E таких, что для любой ячейки A либо $A \subset E$, либо $E \subset \mathit{om}A$.

Лемма. *Любая ячейка принадлежит базису суммирования.*

---

[2]Здесь и далее, все грани вычисляются в решетке всех измеримых подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть E и A – ячейки. Если $A \not\subset E$, то $D_{j_0}(A) \supset D_{j_0}(E)$ для некоторого j_0 (поскольку любой блок есть линейно упорядоченное множество). Но тогда

$$E = \bigcap_{j=1}^{N} D_j(E) \subset D_{j_0}(E) \subset D_{j_0}(A) \subset omA. \qquad \square$$

Как показывают следующие примеры, одними ячейками базис суммирования далеко не исчерпывается.

Пример 1. Рассмотрим каркас из единственного блока $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \dots$ (считаем, что множества A_j различны, т.е. $|A_{j+1} \setminus A_j| > 0$).

По определению каркаса все множества A_j должны быть ограничены. Ясно, что они же являются ячейками и своими собственными тенями. Далее, любое ограниченное множество E положительной меры содержится в одном из A_k с $k > 1$. Если считать, что номер k – наименьший из возможных, то легко понять, что E принадлежит базису суммирования тогда и только тогда, когда $E \supset A_{k-1}$.

Отсюда видно, что если f лежит в соответствующем пространстве U, то, в частности, интегралы

$$\int\limits_{A_k \setminus A_{k-1}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi$$

равномерно ограничены (в каком-то смысле, нечто на полпути к абсолютной сходимости). Условие согласованности с достаточными наборами множеств в этой простой ситуации обычно очевидно непосредственно.

Похожий пример для компактных групп G рассматривался в [1]. В нашей ситуации некомпактной группы $\mathbb{R}$, однако, его можно модифицировать еще и так: рассмотреть каркас из единственного блока

$$\varnothing = A_{-\infty} \subset \dots \subset A_{-2} \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset \dots$$

(множество индексов представляет собой $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$).

Теперь перейдем к каркасам из нескольких блоков $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$D_j(x) = \inf\{A \in \mathcal{A}_j : x \text{ – точка плотности для } A\},$$
$$d_j(x) = \sup\{A \in \mathcal{A}_j : x \text{ – точка плотности для } \mathbb{R}^n \setminus A\}.$$

Семейства, по которым берутся грани, здесь всегда непусты, так что определение корректно и $D_j(x) \supset d_j(x)$. Определим две ячейки

$$D(x) = D_1(x) \cap \dots \cap D_N(x)$$
$$d(x) = d_1(x)(\cap \dots \cap d_N(x).$$

Предложение. *Множество E, $|E| > 0$, принадлежит базису суммирования $\mathcal{B}$, порожденному каркасом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, тогда и только тогда, когда $d(x) \subset E \pmod 0$ для всех x, являющихся точками плотности для E.*

Доказательство. Пусть сначала $E \in \mathcal{B}$ и предположим, что $|d(x) \setminus E| > 0$ для некоторой точки плотности x множества E. Тогда тем более $|d_j(x) \setminus E| > 0$ для всех j, а тогда для каждого j можно найти такое множество $C_j \in \mathcal{A}_j$, что x – точка плотности для $\mathbb{R}^n \setminus C_j$ и $|C_j \setminus E| > 0$. Но $C = C_1 \cap \dots \cap C_N$ есть ячейка и, поскольку $E \in \mathcal{B}$, множество E должно содержаться $\pmod 0$ в ее тени $C_1 \cup \dots \cup C_N$. Этого не может быть, поскольку x – точка плотности для E.

Обратно, пусть $d(x) \subset E$ для любой точки плотности x мнолжества E. Пусть A – произвольная ячейка и пусть $A_j = D_j(A)$, $j = 1, \dots, N$ (тогда $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$). Предположим, что $|E \setminus omA| > 0$ и возьмем точку плотности y для множества $E \setminus omA$. Но тогда $A_j \subset d_j(y)$ при всех j, поскольку y – точка плотности для $\mathbb{R}^n \setminus A_j$. Поэтому $A \subset d(y)$. $\square$

Пример 2. Солидные множества. Пусть $\mathcal{A}_j$ – блок в $\mathbb{R}^n$, состоящий из множеств вида

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_j| \leqslant t\}, t \geqslant 0.$$

Блоки $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ образуют каркас, ячейки которого – прямоугольные параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям. Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$d(x) = D(x) = [-|x_1|, |x_1| \times \dots \times [-|x_n|, |x_n|].$$

Поэтому из доказанного предложения вытекает, что базис суммирования, отвечающий этому каркасу, содержит все открытые солидные множества (множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *солидным*, если из того, что $|y_j| \leqslant |x_j|$ и $(x_1, \dots, x_n) \in E$, вытекает, что $(y_1, \dots, y_n) \in E$).

Пример 3. Пусть блок $\mathcal{A}_j$ в $\mathbb{R}^n$ состоит из множеств $\{-2^k \leqslant |x_j| \leqslant 2^k\}$, $k = -\infty, \dots, 1, 0, 1, 2$. Иными словами, мы "сильно проредили" все блоки предыдущего примера. От этого, однако, "станет только лучше".

Действительно, теперь ясейки – прямоугольные параллелепипеды с центром в нуле, стороны которых – степени двойки. Ясно, что $D(x) = 2d(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Из предположения, доказанного выше, ясно, что все солидные открытые множества по-прежнему попадают в базис суммирования. Однако он содержит, например, и множества вида $X \cup E$, где $X = C_1 \cup \cdots \cup C_N$, все C_j $(j = 1, \ldots, N)$ – ячейки, а E – измеримое подмножество в $\bigcup\limits_{j=1}^{N} (2C_j \setminus C_j)$. Это видно из того, что $d(x) \subset C_j$ для всякой точки x из $2C_j$, кроме точек границы.

Теперь мы немного усложним конструкцию базисов суммирования. Назовем *оснащением каркаса* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ *несжимающее* отображение $\Phi : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_N \to \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_N$ (т.е. такое, что если $(B_1, \ldots, B_N) = \Phi(A_1, \ldots A_N)$, то $B_j \supset A_j$ для всех j. Далее, Φ-тенью ячейки A называется множество

$$от_\Phi A = B_1 \cup \cdots \cup B_N,$$

где

$$(B_1, \ldots, B_N) = \Phi(D_1(A), \ldots, D_N(A)).$$

Базис суммирования, порожденный оснащенным каркасом Φ – это, по определению, совокупность тех ограниченных измеримых множеств E, что для любой ячейки A либо $A \subset E$, либо $E \subset от_\Phi A$ (как всегда, включения – с точностью до множества меры нуль).

Оснащение Φ называется *простым*, если

$$\Phi(A_1, \ldots A_N) = (\Phi_1(A_1), \ldots, \Phi_N(A_N)),$$

где $\Phi_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{A}_j$ – несжимающие и возрастающие ($A \subset B \Rightarrow \Phi_j(A) \subset \Phi_j(B)$) отображения, $j = 1, \ldots, N$.

Если E – ограниченное измеримое множество, а $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$ – простое оснащение, положим $E_\Phi = \sup\limits_{x \in E} D_\Phi(x)$, где $D_\Phi(x) = \Phi_1(D_1(x)) \cap \cdots \cap \Phi_N(D_N(x))$.

Наконец, введем естественное обобщение понятия солидных множеств для произвольного каркаса: множество B будем теперь считать солидным, если $D(x) \subset B$ для любой точки $x \in B$.

Следующее утверждение напоминает то, что было в примере 3, однако дает гораздо больше примеров множеств в базисе $\mathcal{B}$.

Предложение. *Если ограниченное измеримое множество F солидно относительно каркаса с простым оснащением, а множество $C \subset E_\Phi \setminus E$ измеримо, то $E \cup C \in \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть A – ячейка и пусть $A_j = D_j(A)$. Предположим, что $|(E \cup C) \setminus om_\Phi A| > 0$, тогда тем более $|E_\Phi \setminus om_\Phi A| > 0$, а тогда из определения множества E_Φ следует, что $|D_\Phi(x) \setminus om_\Phi A| > 0$ для некоторой точки $x \in E$. Если оказалось, что $D_{j_0}(x) \subset A_{j_0}$ для некоторого j_0, то $\Phi_{j_0}(D_{j_0}(x)) \subset \Phi_{j_0}(A_{j_0}) \subset om_\Phi A$, что невозможно, поскольку по определению множества $D_\Phi(x)$ и выбору точки x множество $\Phi_{j_0}(D_{j_0}(x)) \setminus om_\Phi A$ должно иметь положительную меру. Значит, $A_j \subset D_j(x)$ при всех j, а тогда $A \subset D(x) \subset E$, поскольку множество E солидное. $\square$

Пример 4. Пусть блоки $\mathcal{A}_j$ – те же, что и в примере 2. Снабдим каркас $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ в $\mathcal{R}^n$ следующим простым оснащением: все отображения Φ_j одинаковы и совпадают с раятяжением множества вдвое относительно начала координат. Только что доказанное предложение говорит там, что соответствующий базис суммирования $\mathcal{B}$ содержит, в частности, все множества вида $E \cup C$, где E открыто и солидно в обычном смысле, а $E \subset 2C \setminus C$ и E измеримо.

5. Условие согласованности. Определение этого условия в общем случае было дано перед формулировкой теоремы 1. Здесь мы будем считать, что базис суммирования $\mathcal{B}$ порожден оснащенным каркасом $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N; \Phi)$. Прежде всего, нам понадобится простое замечание о множестве $E_\mathcal{B}$, т.е. супремуме всех элементов базиса $\mathcal{B}$, которые разбивают ограниченное измеримое множество E.

Пусть A – произвольная ячейка нашего каркаса такая, что $A \supset E$. Если множество $B \in \mathcal{B}$ разбивает E, то оно развивает и A, а тогда, по определению базиса, $B \subset om_\Phi A$. Но $om_\Phi A = a_1 \cup \dots \cup a_N$ для некоторых множеств $a_j \in \mathcal{A}_j$.

Таким образом, в случае оснащенного каркаса согласованность базиса суммирования с M-достаточным набором $(R_1, \dots, R_k)$ вытекает из такого условия:

$$\text{для любых множеств } a_j \in \mathcal{A}_j \text{ набор}$$
$$\Big(R_1 \setminus \bigcup_{j=1}^N a_j, \dots, R_k \setminus \bigcup_{j=1}^N a_j\Big) \quad M\text{-достаточен.} \tag{C}$$

Определение. *Блок $\mathcal{D}$ называется M-правильным (M – по-прежнему некий шаблон), если выполнены следующие два условия:*

(a) *для всякого множества* $D \in \mathcal{D}$ *найдется точка* $(t_1, \dots, t_l) = t \in (\mathbb{R}^n)^l$ *такая, что* $[m, t]$ *есть точка плотности для* $\mathbb{R}^n \setminus D$ *при всех* $m \in M$;

(b) *для всяких* D_1, $D_2 \in \mathcal{D}$ *существует множество* D_3 *из* $\mathcal{D}$ *такое, что* $D_1 - D_2 \subset D_3$.

Предложение. *Если все блоки* $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ M*-правильны, то условие* (C) *выполнено для любого* M*-достаточного набора* $(R_1, \dots, R_k)$.

Доказательство. Очень легко понять, что нам довольно рассмотреть случай одного блока $\mathcal{D}$ и проверить, что набор множеств $(R_1 \setminus D, \dots, R_k \setminus D)$ окажется M-достаточным для любого множества $D \in \mathcal{D}$. Докажем сначала лемму.

Лемма. *Пусть* $\mathcal{D}$ – M*-правильный блок и пусть* $H \in \mathcal{D}$. *Тогда для любого* $\sigma \in \mathbb{N}$ *найдется* σ *точек* $t^{(1)}, \dots, t^{(\sigma)}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *таких, что для любого элемента* m *шаблона* M *точка* $[m, t^{(u)} - t^{(v)}]$ *есть точка плотности для* $\mathbb{R}^n \setminus H$, *если* $u \neq v$.

Доказательство. Точку $t^{(1)}$ выберем произвольно. Пусть $t^{(1)}, \dots, t^{(\sigma)}$ уже выбраны. Из пункта (c) в определении блока следует существование такого множества $H_1 \in \mathcal{D}$, что любая из точек $[m, t^{(j)}]$, $m \in M$, $j = 1, \dots, \sigma$, содержится в H_1 вместе с некоторой окрестностью. В силу условия (b) из определения M-правильного блока, найдется множество $H_2 \in \mathcal{D}$, для которого $H_1 - H \subset H_2$. Воспользуемся теперь условием (a) из определения M-правильного блока и найдем точку $t \in \mathbb{R}^n$ такую, что $[m, t]$ есть точка плотности для $\mathbb{R}^n \setminus H_2$ при всех $m \in M$. Если $t^{(j)} - t$ не есть точка плотности для $\mathbb{R}^n \setminus H$, то найдется такое $\delta > 0$, что сколь угодно малые шары B с центром в точке $t^{(j)} - t$ пересекают множество H по множеству меры не менее, чем $\delta|B|$. Но тогда из равенства $[m, t] = [m, t^{(j)}] - [m, t^{(j)} - t]$ вытекает, что t не может быть точкой плотности для $\mathbb{R}^n \setminus H_2$ (напомним, что вычитаемое в правой части содержится в H_1 вместе с некоторой окрестностью). Таким образом, можно положить $t^{(\sigma+1)} = t$. □

Возвращаясь к доказательству предлоежния, обозначим через k число точек в l-шаблоне $M = (m_1, \dots, m_k)$. Пусть множество $\Lambda \subset (\mathbb{R}^n)^l$ содержит $k + 1$ элемент. Если E – измеримое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, то множество

$$E_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda, m \in M} ([m, \lambda] + E)$$

измеримо и ограничено, поэтому можно найти μ, $\mu \in (\mathbb{R}^n)^l$, так, чтобы

$$[m^{(j)}, \mu] + E_1 \subset R_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

В частности, $[m^{(j)}, \lambda + \mu] + E \subset R_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, при всех $\lambda \in \Lambda$. Предложение было бы доказано, если бы мы нашли λ, для которого все множества $[m^{(j)}, \lambda + \mu] + E$ пересекаются с ячейкой D из начала доказательства по множеству меры нуль.

Предположим, что, напротив, для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется номер j_λ такой, что $|D \cap ([m^{(j_\lambda)}, \lambda + \mu] + E)| > 0$. Возьмем точку плотности v в этом пересечении. Тогда $v - [m^{(j_\lambda)}, \lambda + \mu]$ – точка плотности для E, а значит $[m^{(j_\lambda)}, \lambda + \mu]$ – точка плотности для $D - E$. Поскольку множество Λ содержит $k+1$ элемент, видим, что $j_\lambda = j_{\lambda'} = j$ при некоторых различных λ, $\lambda' \in \Lambda$. Тогда $[m^{(j)}, \lambda - \lambda']$ есть точка плотности для $(D - E) - (D - E)$. Так как E – ограниченное множество, то E содержится в некотором множестве из блока $\mathcal{D}$, а тогда $(D - E) - (D - E)$ тоже содержится в некотором множестве D_1 из блока $\mathcal{D}$ в силу условия (b) из определения M-правильности. Если множество Λ с самого начала было выбрано по этому множеству D_1 в соответствии с доказанной выше леммой, мы приходим к противоречию, и предложение доказано. $\square$

Что касается примеров, мы отсылаем читателя к п. 2.4.1 статьи [1]. Можно, в частности, приспособить к случаю пространства $\mathbb{R}^n$ имеющиеся там примеры для торов. Здесь мы приведем лишь краткие комментарии.

Составить каркас из нескоьлких M-правильных блоков легко, поэтому можно ограничиться примерами M-правильных блоков. Заметим, что условие (b) в определении M-правильности не относится к шаблону M и достаточно прозначно (и понятно, как можно его обеспечить). Условие (a) тоже вполне наглядно – оно более или менее говорит в том, что, двигаясь из начала координат в некоторых направлениях, мы рано или поздно покинем любое фиксированное заранее множество из блока $\mathcal{D}$.

Разумеется, все блоки из примера 2 (состоящие из полос, симметричных относительно одной координатной гиперплоскости) правильны. В действительности правильные блоки могут состоять из весьма причудливых множеств. Это, например, вытекает из следующих соображений.

Назовем блок $\mathcal{C}$ *подчиненным* блоку $\mathcal{D}$, если для каждого множества $C \in \mathcal{C}$ найдется такое множество $D \in \mathcal{D}$, что $C \subset D$. Блоки $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ *сравнимы*, если каждый из них подчинен другому.

Предложение. *Если два блока сравнимы и один из них M-правилен, то M-правилен и другой.*

Список литературы

1. П. Иванишвили, С. В. Кисляков, *Исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 25–47.
2. С. В. Кисляков, *Новая теорема об исправлении.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **48**, No. 3 (1984), 305–330.
3. А. Б. Александров, *Спектральные подпространства пространства L^p при $p < 1$.* — Алгебра и анализ, **19**, No. 2 (2007), 1–75.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Наука, Москва, 1977.

Kislyakov S. V. Correction up to functions with sparce spectrum and uniformly convergent Fourier integral representation: the group $\mathbb{R}^n$.

This is an $\mathbb{R}^n$-conterpart of certain considerations on a similar subject for compact Abelian groups exposed by P. Ivanishvili and the author in 2010. The main difference with that paper is that certain notions and results of measure theory should be invoked in the case of $\mathbb{R}^n$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 30 августа 2018 г.