Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

С. В. Кисляков

ЗАМЕЧАНИЕ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ С ЛАКУНАМИ В СПЕКТРЕ

Принцип неопределенности в гармоническом анализе гласит, что ненулевая функция и ее преобразование Фурье не могут быть "слишком малы" одновременно. Конкретизации этого нестрогого утверждения многочисленны – как, впрочем, и теоремы о том, что оно может нарушаться при "не очень интенсивной" одновременной малости.

Среди результатов второго типа выделим примеры функций, подчиненных достаточно строгим метрическим ограничениям, но имеющим несмотря на это "тощий" спектр. Небольшой, но содержательный обзор на эту тему приведен во введении к недавней работе [1]. Основной результат в [1] – изящная и быстрая нелинейная конструкция, приводящая к множеству a конечной меры на прямой со следующим совойством: преобразование Фурье характеристической функции χ_a сосредоточено на множестве с большими лакунами и асимптотической плотностью 0.

В обзорной части работы [1], среди прочего, отмечалась линия, связанная со следующим вариантом теоремы Д. Е. Меньшова об исправлении: непрерывную функцию с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$ можно превратить в функцию с большими лакунами в спектре и равномерно сходящимся интегралом Фурье изменением на множестве сколь угодно малой меры. См. [2–5] по поводу серии более общих утверждений.

Естественно спросить, нельзя ли скомбинировать результат работы [1] с идеей об исправлении в духе Д. Е. Меньшова. Ответ оказывается положительным. Мы сформулируем результат сразу для произвольной недискретной локально-компактной абелевой группы G. (Формально, результат верен и для дискретных групп, но для них он бессодержателен.) Через Γ мы обозначим (некомпактную) группу, двойственную с G. Пару (E, F) подмножеств группы Γ назовем *достаточной*, если для любого компактного множества $K \subset \Gamma$ найдется

Ключевые слова: принцип неопределенности, теорема Д. Е. Меньшова об исправлении.

такой характер $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma + K \subset E$, $-\gamma + K \subset F$. На прямой $\mathbb{R}$, например, достаточной будет любая пара, в которой $E = -F$ и F содержит сколь угодно длинные отрезки.

Меры Хаара групп G и Γ считаем согласованными стандартным образом (чтобы преобразование Фурье было унитарным оператором из $L^2(G)$ на $L^2(\Gamma)$). Мера Хаара множества e в G или Γ будет обозначаться символом $|e|$.

Считаем фиксированной некоторую достаточную пару (E, F) в группе Γ.

Теорема. *Пусть a – измеримое подмножество группы G, $|a| < \infty$, $\varepsilon > 0$. Существует измеримое подмножство b в группе G, $|b| = |a|$, такое, что $|a \Delta b| < \varepsilon$, а преобразование Фурье $\widehat{\chi}_b$ сосредоточено на множестве $K \cup E \cup F$, где K – некоторое компактное подмножество в Γ.*

Через $a \Delta b$ здесь обозначена симметрическая разность множеств a и b. Отметим, что "размер" множества K проконтролировать едва ли возможно в разумных терминах, теорема говорит о поведении спектра функции χ_b "на бесконечности".

Доказательство. Методы доказательства теорем типа Д. Е. Меньшова давно унифицированы и хорошо поняты, однако простыми их всё же назвать нельзя. Интересно, что они нам и не понадобятся – достаточно будет незначительно изменить технически не очень сложную конструкцию из [1]. Отметим, правда, что вопроса о равномерной сходимости разложений Фурье мы не будем касаться (см., впрочем, несколько замечаний в конце этой статьи).

Сначала напомним одну из стандартных конструкций аппроксимативной единицы в пространстве $L^1(G)$. Пусть U – симметричная ($-U = U$) компактная окрестность нуля в группе Γ. Положим $\psi_U = (|U|^{-1/2}\chi_U) * (|U|^{-1/2}\chi_U)$. Ясно, что ψ_U – непрерывная неотрицательная функция на Γ, всюду не превосходящая единицы, сосредоточенная на компактном множестве $K = U + U$ и такая, что $\psi_U(0) = 1$.

Пусть φ_U – обратное преобразование Фурье функции ψ_U. Ясно, что $\|\varphi_U\|_{L^1(G)} = 1$ и $\varphi_u \geqslant 0$. Рассмотрим свёртку $f_0 = \chi_a * \varphi_U$. Тогда $0 \leqslant f_0 \leqslant 1$, $\int\limits_G f_0 = |a|$ и за счет выбора (достаточно широкой) окрестности U мы можем обеспечить оценку $\|\chi_a - f_0\|_{L^1(G)} \leqslant \varepsilon$. Кроме того, преобразование Фурье функции f_0 сосредоточено на компактном множестве K.

Мы построим множество $b \subset G$ такое, что $|b| = |a|$ и для функции $f = \chi_b$ выполняется равенство $\int\limits_G f_0 f = \int\limits_G f_0^2$, а её спектр таков, как сказано в теореме. Для этого множества b справедливо следующее. Напишем

$$|a \cap b| = \int\limits_G \chi_a f = \int\limits_G f_0 f + \int\limits_G (\chi_a - f_0) f = \int\limits_G f_0^2 + \int\limits_G (\chi_a - f_0) f.$$

Модуль второго интеграла в последнем выражении, очевидно, не превосходит ε. Что касается первого интеграла, то можно написать

$$\Big| \int\limits_G (\chi_a - f_0^2) \Big| = \Big| \int\limits_G (\chi_a^2 - f_0^2) \Big| \leqslant 2 \int\limits_G |\chi_a - f_0| \leqslant 2\varepsilon,$$

так что $\int\limits_G f_0^2 \geqslant |a| - 2\varepsilon$. Поэтому $|a \cap b| \geqslant |a| - 3\varepsilon$, откуда $|a \Delta b| \leqslant 6\varepsilon$. Таким образом, теорема будет доказана, если мы сумеем построить множество b.

Чтобы построить это множество, мы, следуя работе [1], зададим по индукции последовательность $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ функций на группе G. Функция f_0 определена выше, а для $n = 1, 2, \ldots$ положим $f_n = f_{n-1} + g_n$, где

$$g_n(x) = \operatorname{Re} \gamma_n(x) f_{n-1}(x)(1 - f_{n-1}(x)).$$

Здесь γ_n – некоторые характеры группы G, которые вскоре будут выбраны. По индукции ленко проверить неравенства

$$|g_n(x)| \leqslant \max\{f_{n-1}(x), 1 - f_{n-1}(x)\} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1.$$

Лемма 1. *Характеры γ_n можно последовательно выбрать так, чтобы носитель преобразования Фурье функции g_n содержался в $E \cup F$, не пересекался с множеством K и с носителями преобразований Фурье функций g_j, $1 \leqslant j < n$, а также, чтобы выполнялось следующее условие: либо $2\gamma_n = 0$, либо характеры $\pm 2\gamma_n$ не лежат в спектре функции $f_{n-1}^2(1 - f_{n-1})^2$.*

Поскольку $0 \in K$, спектры функций $g_1, g_2, \ldots$ не содержат точки 0.

Лемму мы докажем чуть позже, а сейчас завершим доказательство теоремы. Из леммы, вещественности функций f_n и теоремы Планшереля следует, что

$$\int\limits_G f_n = \int\limits_G f_0 = |a| \quad \text{и} \quad \int\limits_G f_0 f_n = \int_G f_0^2,$$

а также

$$\begin{aligned}\int\limits_G g_n^2 &= \frac{1}{4}\int\limits_G (\overline{\gamma_n(\cdot)} + \gamma_n(\cdot))^2 f_{n-1}^2(1-f_{n-1})^2 \\ &= \begin{cases} \int\limits_G f_{n-1}^2(1-f_{n-1})^2, & \text{если} \quad 2\gamma_n = 0; \\ \frac{1}{2}\int\limits_G f_{n-1}^2(1-f_{n-1})^2, & \text{если} \quad 2\gamma_n \neq 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{1}$$

(Отметим стандартную коллизию: точка 2γ группы Γ и функция $\gamma(\cdot)^2$ на G – один и тот же характер; точка 0 группы G – это функция на G, тождественно равная единице; и т.д.)

Поскольку функции $f_0, g_1, g_2, \ldots$ попарно ортогональны, имеем

$$\|f_0\|^2_{L^2(G)} + \sum_{j=1}^{n} \|g_j\|^2_{L^2(G)} = \int\limits_G f_n^2 \leqslant \int\limits_G f_n = a, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому функции f_n сходятся в $L^2(G)$ к некоторой функции f. Некоторая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ последовательности $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду, откуда следует, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $\int\limits_G f \leqslant |a|$ по лемме Фату. Ясно, что спектр функции f лежит в объединении $K \cup E \cup F$. Далее, из (1) следует, что $f(1-f) = 0$, т.е. $f = \chi_b$ для некоторого множества b, $|b| \leqslant |a|$.

Нам осталось проверить, что на самом деле $|b| = |a|$. По построению, все функции $\widehat{g}_n$ обращаются в нуль в некоторой (одной и той же) окрестности нуля группы Γ и непрерывны. Имеет место равенство $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widehat{g}_j = \widehat{f} - \widehat{f}_0$ (сходимость в $L^2(\Gamma)$). Тем самым, левая часть этого равенства обращается в нуль п.в. в упомянутой окрестности нуля, а правая непрерывна, так что равна нулю там же тождественно. Значит, $\widehat{f}(0) = \widehat{f}_0(0) = |a|$. $\square$

Доказательство леммы 1. Нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение (см. [3, лемма 4]; для полноты доказательство будет воспроизведено ниже).

Лемма 2. *Пусть* (V, W) *– достаточная пара подмножеств группы* Γ*, а* φ *– непрерывный гомеоморфизм группы* Γ *в локально компактную абелеву группу* Λ *такой, что множество* $\operatorname{clos}\varphi(\Gamma)$ *не компактно. Тогда* $(V \setminus \varphi^{-1}(C), W \setminus \varphi^{-1}(C))$ *есть достаточная пара в* Γ *для любого компактного подмножества* C *группы* Λ.

Выведем лемму 1 из леммы 2. По индукции носители преобразований Фурье функций $g_1, \dots, g_{n-1}$ компактны. Пусть L – (компактное) объединение этих носителей и множества K. Пусть также S – носитель преобразования Фурье функции $f_{n-1}^2(1 - f_{n-1})^2$. Положим $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : 2\gamma = 0\}$, $\Lambda = \Gamma/\Gamma_0$. Пусть $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ – каноническое фактор-отображение. Возможны 2 случая:

1) группа Λ некомпактна;

2) группа Λ компактна.

В случае 1) положим $\widetilde{L} = \{t \in \Lambda : 2t \in \varphi(L)\}$. Поскольку в Λ нет элементов порядка 2, умножение на 2 есть гомеоморфизм между группой Λ и ее замкнут подгруппой. Следовательно, множество $\widetilde{L}$ компактно в Λ. Применив лемму 2, найдем такой характер $\gamma \in \Gamma$, что

$$\gamma + \big(S \cup \{0\}\big) \subset E \setminus \varphi^{-1}(\varphi(L) \cup \widetilde{L}), -\gamma + \big(S \cup \{0\}\big) \subset F \setminus \varphi^{-1}(\varphi(L) \cup \widetilde{L}).$$

Разумеется, множества $\gamma + S$ и $-\gamma + S$ не пересекаются с L. Далее, из написанных включений следует, что $\pm\varphi(\gamma) \notin \widetilde{L}$, т.е. $\varphi(\pm 2\gamma) \notin \varphi(L)$, откуда заведомо $\pm 2\gamma \notin L$.

В случае 2) воспользуемся тем, что отображение φ непрерывно и открыто (см. [6, теорема B6]). Отсюда легко получить, что $\varphi(C) = \Lambda$ для некоторого симметричного компактного множества $C \subset \Gamma$. Найдем такой характер $\mu \in \Gamma$, что

$$\mu + S - C \subset E \setminus L, \quad -\mu + S - C \subset F \setminus L$$

(пара $E \setminus L, F \setminus L$) достаточна по лемме 2 с тождествнным отображением в роли "φ"). Пусть λ – такая точка множества C, что $\varphi(\mu) = \varphi(\lambda)$. Поскльку $-\lambda$ тоже лежит в C, получаем, что

$$(\mu - \lambda) + S \subset E \setminus L, \quad -(\mu - \lambda) + S \subset F \setminus L.$$

Так как $2(\mu - \lambda) = 0$, лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы 2. Пусть D – компактное подмножество группы Γ. Зафиксируем характер $\mu \in \Gamma$, выбор которого мы уточним позже. Множество $D_1 = D \cup (-\mu + D) \cup (\mu + D)$ компактно, поэтому найдется такая точка $\lambda \in \Gamma$, что $\lambda + D_1 \subset V$, $-\lambda + D_1 \subset W$. Покажем, что при подходящем выборе точки μ одно из множеств $(\lambda + D) \cup (-\lambda + D)$, $(\lambda + \mu + D) \cup (-\lambda - \mu + D)$ не пересекается с $\varphi^{-1}(C)$.

Если оба эти множества пересекаются с $\varphi^{-1}(C)$, то как $\varphi(\lambda)$, так и $\varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$ лежат в множестве $H = (C - \varphi(D)) \cup (\varphi(D) - C)$, а тогда $\varphi(\mu)$ лежит в компактном множестве $H - H$. Но поскольку множество $\operatorname{clos} \varphi(\Gamma)$ некомпактно, в группе Γ найдется такой элемент μ, для которого последнее не выполнено. $\square$

В заключение сделаем еще несколько замечаний. Пусть, как в [1], $G = \mathbb{R}$. Тогда формула для функции f принимает (как в [1]) вид

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \cos s_j t (f_{j-1}(t)(1 - f_{j-1}(t)). \tag{2}$$

Леммы 1 и 2 в этом случае не очень нужны – все необходимые действия при выборе чисел s_j совершенно наглядны.

Следует отметить, что спектры слагаемых этого ряда при быстром росте чисел s_j хорошо разделены, и это – один из необходимых элементов в стандартных схемах доказательства теорем типа Меньшова об исправлении. Однако доказать равномерную ограниченность чатичных интегралов Фурье

$$\int_{-\tau}^{\tau} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t}\, dt$$

здесь вряд ли удастся (и, скорее всего, ее и нет), посклньку L^1-нормы преобразований Фурье слагаемых ряда (2), по-видимому, растут (и довольно быстро). Иными словами, отсутствует второй обязательный элемент в доказательствах теорем типа Меньшова.

Может быть, вне особой связи со сказанным, стоит еще отметить, что и преобразование Гильберта функции f заведомо не может быть огарниченным – см. [7, Гл. IV, §5.2] и имеющиеся там ссылки.

Укажем, однако, на то, что для окружности (и вообще для любой *компактной* группы G) характеристическую функцию с “редким” (примерно в том же смысле) спектром можно построить еще методом А. Б. Александрова, см. [8].

Следующая теорема фактически содержится в [8] (это становится ясным, если прочитать внимательно все имеющиеся там неформальные замечания). Она не была сформулирована явно, видимо, потому, что главным мотивом работы [8] было построение аналитических функций от нескольких переменных с заданным модулем граничных значений, так что вещественные функции остались несколько в стороне.

Теорема. *Пусть φ – положительная непрерывная функция на бесконечной компактной группе G, а (E, F) – достаточная пара в двойственной группе Γ. Тогда существует вещественная функция f на G со спектром в объединении $E \cup F$ и такая, что $|f| = \varphi$.*

Взяв $\varphi \equiv 1$, получим, что f принимает лишь значения ± 1. Если $0 \notin E \cup F$, то, кстати, эти значения принимаются на множествах одинаковой меры. Обсуждаемый метод не приводит к неконтролируемому множеству K (см. формулировку основной теоремы), не содержит нелинейностей и допускает варианты с не зависящими от φ (если считать, например, что $\varphi \leqslant 1$) оценками частичных сумм ряда Фурье функции f. См. по этому поводу теорему 1 в [9] для случая окружности (формулировка, правда, содержит неточность: из доказательства получается лишь ограниченность частичных сумм ряда Фурье функции f по самметричным, а не по любым промежуткам; иначе и не может быть в принципе из-за сделанного выше замечания о преобразовании Гильберта). См. еще теорему 3 в [3] (которая тоже приспособлена к построению аналитических, а не вещественных функций с заданным модулем, но допускает “вещественную” модификацию). Из этой теоремы, кстати, видно, что для некомпактных групп метод тоже работает, но дает худшие результаты.

Список литературы

1. F. Nazarov, A. Olevskii, *A function with support of finite measure and “small” spectrum* In: 50 years with Hardy spaces. A tribute to Victor Havin. Operator theory: advances and applications, v. 261, Birkhäuser, Basel, 2018.
2. Ф. Г. Арутюнян, *Представление функций кратными рядами.* — Докл. АН Арм. ССР **64**, No. 2 (1977), 72–76.
3. С. В. Кисляков, *Новая теорема об исправлении.* — Изв. АН СССР, Сер. метем. **48**, No. 2 (1984), 305–330.

4. П. Иванишвили, С. В. Кисляков, *Исправление до функции с редким спектром и равнмерно сходящимся рядом Фурье.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 25–47.
5. С. В. Кисляков, *Исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся интегралом Фурье в случае группы* $\mathbb{R}^n$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **467** (2018), 116–127.
6. W. Rudin, *Fourier analysis on groups.* — Interscience, New York – London, 1962.
7. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* "Мир", Москва, 1974.
8. А. Б. Александров, *Внутренние функции на компактных пространствах.* — Функц. анализ и его прил. **18**, No. 2 (1984), 1–13.
9. С. В. Кисляков, *Замечания об "исправлении".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **135** (1984), 69–75.

Kislyakov S. V. A remark on indicator functions with gaps in the spectrum.

Developing a recent result of F. Nazarov and A. Olevskii, we show that for every subset a of $\mathbb{R}$ of finite measure and every $\varepsilon > 0$, there exists $b \subset \mathbb{R}$ with $|b| = |a|$ and $|(b \setminus a) \cup (a \setminus b)| \leqslant \varepsilon$ such that the spectrum of χ_b is fairly thin. A generalization to locally compact Abelian groups is also provided.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 27 августа 2018 г.