

В. В. Капустин

ЯДРА ОПЕРАТОРОВ ТЁПЛИЦА И РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Операторы Тёплица суть операторы в пространстве Харди H^2 на единичной окружности $\mathbb{T}$, действующие по формуле $f \mapsto P_+ \gamma f$, $f \in H^2$, где $\gamma \in L^\infty$ – символ оператора Тёплица, P_+ – ортопроектор на H^2 . Подпространство пространства H^2 называется *почти инвариантным* относительно оператора обратного сдвига $f \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$, если для любой функции f из данного подпространства такой, что $f(0) = 0$, функция $\frac{f}{z}$ также принадлежит ему. Ядро произвольного оператора Тёплица является почти инвариантным подпространством. Голоморфная функция в единичном круге $\mathbb{D}$ называется *внутренней*, если она ограничена и имеет унимодулярные граничные значения почти всюду на $\mathbb{T}$. Ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}$, где θ – внутренняя функция, имеет вид $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ и инвариантно относительно обратного сдвига. Хорошо известно, что ядро произвольного оператора Тёплица совпадает с ядром оператора Тёплица с унимодулярным символом. Эта статья посвящена случаю, когда символ имеет вид $\bar{\theta}\Delta$, где θ – внутренняя функция, а Δ – конечное произведение Бляшке.

Известный результат Хитта [1] дает следующее описание почти инвариантных подпространств обратного сдвига: любое почти инвариантное подпространство имеет вид

$$g \cdot K_\omega = \{gh : h \in K_\omega\},$$

где ω – внутренняя функция, $K_\omega = H^2 \ominus \omega H^2$, а $g \in H^2$ – *изометрический множитель* для K_ω , то есть $gh \in H^2$ и $\|gh\| = \|h\|$ для любого $h \in K_\omega$. Это представление не единственно, но если потребовать, чтобы $\omega(0) = 0$, то оно будет единственным с точностью до унимодулярных мультипликативных констант; неединственность связана со сдвигами по Фростману для внутренних функций, см. §2 ниже. Представления подпространств вида $g \cdot K_\omega$, различающиеся лишь унимодулярными мультипликативными константами, будут рассматриваться как совпадающие.

Ключевые слова: внутренняя функция, почти инвариантные подпространства, алгоритм Шура.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-01-00635.

Пусть K – ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}\Delta$, где θ – внутренняя функция, а Δ – конечное произведение Бляшке. Поскольку K – ядро оператора Тёплица, оно является почти инвариантным подпространством и, следовательно, имеет вид

$$K = g \cdot K_\omega, \quad (1)$$

где g – изометрический множитель для K_ω . Наша цель – найти функции g и ω в терминах θ и Δ .

Сомножитель Бляшке есть внутренняя функция вида $b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}$ при $|\lambda| < 1$. Функции, отличающиеся от b_λ унимодулярной мультипликативной константой, также будут называться сомножителями Бляшке. *Произведение Бляшке степени n* – функция, являющаяся произведением n сомножителей Бляшке. Будем предполагать, что Δ – произведение Бляшке степени n с множеством нулей Λ ,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad n < \infty,$$

где все нули функции Δ имеют кратность 1; можно записать

$$\Delta = \prod_{m=1}^n b_{\lambda_m}. \quad (2)$$

Если f – мероморфная функция в единичном круге $\mathbb{D}$, через $f^\sharp$ будет обозначаться мероморфная функция в $\mathbb{D}$, граничные значения которой совпадают с $\bar{f}$ (если такая функция существует). В частности, если f – рациональная функция, то $f^\sharp$ существует и также является рациональной функцией; для любой внутренней функции f имеем $f^\sharp = f^{-1}$.

Если k – неотрицательное целое число, обозначим через $\mathcal{V}_k$ класс всех рациональных функций $f \in H^\infty$ с нормой $\|f\|_\infty < 1$, у которых числитель и знаменатель являются многочленами степени не выше k . Для $f \in \mathcal{V}_k$ множество полюсов функции f располагается во внешности единичного круга (включая бесконечно удаленную точку), и существует произведение Бляшке B степени k такое, что $Bf^\sharp \in H^\infty$. Если при этом $f \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{V}_{k-1}$, то B определяется однозначно с точностью до унимодулярной мультипликативной константы набором полюсов функции f (с учетом кратностей).

Для $\lambda \in \mathbb{D}$ положим

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{\lambda}}.$$

Рассмотрим задачу рациональной интерполяции:

$$f(\lambda_m) = \theta(\lambda_m), \quad f(\lambda_m^*) = \overline{\theta(\lambda_m)}^{-1}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где если $\theta(\lambda_m) = 0$, то имеем условие $f(\lambda_m^*) = \infty$, то есть f должна иметь полюс в точке λ_m^* . Поскольку значения внутренней функции θ естественно определяются во внешности круга формулой

$$\theta(\lambda^*) = \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$$

(это – ее так называемое *псевдопродолжение*), условия (3) можно понимать в смысле интерполяции функции θ функцией f в точках λ_m, λ_m^* .

В нашей основной теореме говорится, что задача описания подпространства K тесно связана с задачей рациональной интерполяции.

Основная теорема. *Предположим, что θ – внутренняя функция, не являющаяся произведением Бляшке степени не выше n . Для конечного набора $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ различных точек единичного круга определим произведение Бляшке Δ формулой (2). Обозначим через K ядро оператора Тёплица с символом $\theta\Delta$ в пространстве Харди H^2 .*

1) *Существуют*

- *рациональная функция $\varphi \in \mathcal{V}_n$, являющаяся решением интерполяционной задачи (3); и, следовательно,*
- *произведение Бляшке B степени n такое, что $B\varphi^\sharp \in H^\infty$.*

2) *Для любой такой пары функций φ, B функция ω , определенная формулой*

$$\omega = \frac{1}{B} \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\sharp \theta}, \quad (4)$$

является внутренней; существует ограниченная и ограниченно обратимая в единичном круге функция $g \in H^2$, удовлетворяющая соотношению

$$\frac{g}{g^\sharp} = \frac{\theta}{\omega \cdot \Delta}, \quad (5)$$

для которой $K = g \cdot K_\omega$; g определяется этой формулой с точностью до ненулевой вещественной мультипликативной константы и может быть выбрана так, что она будет изометрическим множителем для K_ω .

Замечания. 1. Предположение о том, что θ не является произведением Бляшке степени не выше n , означает, что $K \neq \{0\}$.

2. Рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами степени не выше n , определяется $2n + 1$ комплексным параметром, тогда как у нас имеются интерполяционные данные в $2n$ точках. Остающаяся одномерная свобода связана с неединственностью функции ω в представлении (1).

3. Формула (4) допускает обращение:

$$\theta = \frac{B\omega + \varphi}{1 + \varphi^\sharp B\omega}. \quad (6)$$

Если в правой части формулы (6) вместо ω подставлять функции из единичного шара пространства H^∞ , то получатся все функции, являющиеся решениями интерполяционной задачи Пика–Неванлинны: $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ и $f(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)$, $m = 1, \dots, n$. В связи с этой задачей применялся известный алгоритм Шура, см. [2], с которым тесно связан подход настоящей работы.

4. Ограниченная и ограниченно обратимая функция g определяется условием (5) с точностью до ненулевой вещественной константы. Если $\omega(0) = 0$, то $1 \in K_\omega$, и g может быть найдена из условия $\|g\|_2 = 1$. В общем случае см. §7 ниже.

Также будут изучаться класс всех представлений подпространства K в виде (1) и класс всех решений интерполяционной задачи (3), являющихся отношениями полиномов степени не выше n .

Если $K = g \cdot K_\omega$, то можно еще записать $K = g_\alpha \cdot K_{\omega_\alpha}$ для некоторой функции g_α , где ω_α – сдвиг по Фростману функции ω ,

$$\omega_\alpha(z) = \frac{\omega(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\omega(z)}, \quad |\alpha| < 1; \quad (7)$$

см. §2 ниже. Более того, таким образом получают все возможные функции, появляющиеся в качестве ω в представлениях подпространства K в виде (1) (набросок доказательства: применение сдвига по Фростману сводит общий случай к случаю внутренней функции, обращающейся в нуль в нуле, а в этом случае единственность легко следует из того, что g является функцией из K , ортогональной подпространству $\{f \in K : f(0) = 0\}$). Таким образом, множество всех представлений подпространства K в виде (1) параметризуется точками единичного круга.

В §1 будет показано, что функция g в (1) определяется функцией ω . В наших последующих вычислениях функция g часто не упоминается явно, хотя неявно будет присутствовать информация о том, что g

строится как конечное произведение функций, являющихся ограниченными и ограниченно обратимыми.

В свою очередь, ω существенно определяется функцией φ из формулы (4). Таким образом, нас интересует описание множества Φ всех функций φ , которые могут использоваться в (4) для определения внутренней функции ω , участвующей в формуле (1). Функция B из формулы (4) будет называться произведением Бляшке, ассоциированным с $\varphi \in \Phi$. Для любой функции $\varphi \in \Phi$ ассоциированное произведение Бляшке B определяется с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.

Применяя сдвиг по Фростману к ω из формулы (4), получим формулу вида

$$\omega_\alpha = \frac{1}{B_\alpha} \frac{\theta - \varphi_\alpha}{1 - \varphi_\alpha^\# \theta},$$

где

$$\varphi_\alpha = \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\#},$$

а B_α – произведение Бляшке, ассоциированное с φ_α , см. формулу (9) ниже. Таким образом, если $\varphi \in \Phi$ и B – произведение Бляшке из формулы (4), ассоциированное с φ , то

$$\Phi = \left\{ \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\#} : |\alpha| < 1 \right\}. \quad (8)$$

В основной теореме утверждается, что все функции из $\mathcal{V}_n$, являющиеся решениями интерполяционной задачи (3), принадлежат множеству Φ . Обратно, имеем следующий результат.

Теорема 1. 1) Все функции из Φ , за исключением не более, чем n функций, принадлежат множеству $\mathcal{V}_n$ и являются решениями интерполяционной задачи (3).

2) Для всех $\varphi \in \Phi$ и для всех $\lambda \in \Lambda$ всегда имеем $\varphi(\lambda) = \theta(\lambda)$.

3) Для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует единственный исключительный элемент $\varphi \in \Phi$, для которого $\varphi(\lambda^*) \neq \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$.

Теорема 1 основана на конструкции из §3.

Существование исключительных элементов множества Φ связано с известным в теории рациональной интерполяции эффектом, когда интерполяционное условие $\frac{p}{q} = \theta$ на заданном наборе точек заменяется более слабым: $p = \theta q$, из-за чего добавляются решения, для которых $p = q = 0$ в некоторых из этих точек.

Может оказаться, что элемент $\varphi \in \Phi$ является исключительным для нескольких точек множества Λ . Теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Функция φ принадлежит множеству Φ тогда и только тогда, когда существует неотрицательное целое число k такое, что*

- $\varphi \in \mathcal{V}_k$;
- $\varphi(\lambda) = \theta(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda$;
- $\varphi(\lambda^*) = \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$ в k точках множества Λ .

Легко проверить, что функции f и $\frac{1}{f^\sharp}$ являются или не являются решениями интерполяционной задачи (3) одновременно. Следующий результат показывает, что “почти половина” функций, являющихся отношениями многочленов степени не выше n и решениями интерполяционной задачи (3), принадлежат множеству Φ .

Теорема 3. *Предположим, что f – рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами степени не выше n , и что f – решение интерполяционной задачи (3). Если f не является произведением Бляшке степени n , то одна из функций $f, \frac{1}{f^\sharp}$ принадлежит множеству Φ .*

§1. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ МНОЖИТЕЛЬ

В этом параграфе будет показано, что функция g из формулы (1) определяется соотношением (5), и таким образом наша общая задача сведется к нахождению функции ω .

Напомним, что любое ядро оператора Тёплица является ядром оператора Тёплица с унимодулярным символом; любое ядро оператора Тёплица есть почти инвариантное подпространство оператора обратного сдвига; любое почти инвариантное подпространство допускает представление в виде $g \cdot K_\omega$, где ω – внутренняя функция, а g – изометрический множитель для K_ω .

Формула (5) является частным случаем следующего более общего факта.

Предложение 4. *Пусть K – ядро оператора Тёплица с унимодулярным символом γ ; предположим, что $K \neq \{0\}$. Пусть $K = g \cdot K_\omega$, где ω – внутренняя функция, а g – изометрический множитель для K_ω . Тогда функция $\gamma \cdot \omega \cdot g/\bar{g}$ является унимодулярной константой.*

Таким образом, функция $g/\bar{g}$ может быть восстановлена по унимодулярному символу γ и внутренней функции ω . Поскольку K – ядро оператора Тёплица, функция $g \in H^2$ является внешней; более того, g определяется функцией $g/\bar{g}$ с точностью до мультипликативной константы. Этот факт (в случае, когда $\omega(0) = 0$) содержится, например, в теореме 3 статьи [3], в которой свойство, что g^2 есть выступающая точка единичного шара пространства H^1 , равносильно тому, что $g \in H^2$ с нормой $\|g\|_2 = 1$ определяется функцией $g/\bar{g}$ с точностью до знака $\pm$. На самом деле у нас есть свобода в выборе унимодулярной мультипликативной константы.

Доказательство. Подпространство $g \cdot K_\omega$ всегда содержится в ядре оператора Тёплица с символом $\bar{\omega}\bar{g}/g$. Действительно, для $f \in K_\omega$ имеем $\frac{\bar{\omega}\bar{g}}{g} \cdot gf = \bar{g} \cdot \bar{\omega}f \in H_-^2$.

Теперь допустим, что $g \cdot K_\omega$ содержится в ядре оператора Тёплица с унимодулярным символом γ . Тогда $\gamma \cdot g \cdot K_\omega \subset H_-^2$, что равносильно тому, что $\bar{\gamma} \cdot \bar{g} \cdot \bar{K}_\omega \subset zH^2$, то есть $\bar{\gamma} \cdot \bar{g} \cdot \bar{\omega}K_\omega \subset H^2$. Поскольку функция g внешняя, это равносильно тому, что $\bar{\gamma} \cdot \frac{\bar{g}}{g} \cdot \bar{\omega}K_\omega \subset H^2$. Выбирая внешнюю функцию из K_ω , можно увидеть, что это равносильно тому, что $\bar{\gamma} \cdot \frac{\bar{g}}{g} \cdot \bar{\omega}$ – внутренняя функция. Среди ядер операторов Тёплица с символом γ , обладающих этим свойством, минимальным будет то, когда эта внутренняя функция является унимодулярной константой. Таким образом, ядро оператора Тёплица с символом $\frac{\bar{\omega}\bar{g}}{g}$ является минимальным среди ядер операторов Тёплица, содержащих $g \cdot K_\omega$, и если $g \cdot K_\omega$ есть ядро оператора Тёплица, то это ядро оператора Тёплица с символом $\gamma = \frac{\bar{\omega}\bar{g}}{g}$.

Теперь предложение следует из того, что если ядра операторов Тёплица с унимодулярными символами совпадают, то их символы совпадают с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. Действительно, пусть T_1, T_2 – операторы Тёплица с унимодулярными символами γ_1, γ_2 соответственно. Функция $f \in H^2$ принадлежит ядру оператора T_i , $i = 1, 2$, когда $\gamma_i f \in H_-^2$, или, что равносильно, $f_i = \bar{z}\bar{\gamma}_i \bar{f} \in H^2$. Предположим, что ядро оператора T_1 содержится в ядре оператора T_2 , и выберем f в ядре оператора T_1 так, чтобы функция f_1 была внешней. Тогда $f_2 = \gamma_1 \bar{\gamma}_2 f_1 \in H^2$, и, поскольку f_1 – внешняя, функция $\gamma_1 \bar{\gamma}_2$ является внутренней. Аналогично, из того, что ядро оператора T_2 содержится в ядре оператора T_1 , следует, что функция $\bar{\gamma}_1 \gamma_2$ внутренняя, и следовательно $\bar{\gamma}_1 \gamma_2$ – константа. $\square$

Для функции ω , записанной в виде (4), где φ, B – такие, как в основной теореме, функция g представляется как

$$g = (1 - \varphi^\sharp \theta) \cdot v^\sharp,$$

где v – ограниченная и ограниченно обратимая функция такая, что $\frac{v}{v^\sharp} = \frac{\Delta}{B}$, а именно,

$$v(z) = v(0) \cdot \prod_{m=1}^n \frac{1 - \bar{\mu}_m z}{1 - \lambda_m z},$$

где μ_m – нули произведения Бляшке B . Действительно, запишем

$$\begin{aligned} (1 - \varphi^\sharp(z)\theta(z)) \cdot v^\sharp(z) &= \frac{B(z) - (B\varphi^\sharp)(z)\theta(z)}{B(z)} \cdot \overline{v(0)} \cdot \prod_{m=1}^n \frac{z - \mu_m}{z - \lambda_m} \\ &= \left(B(z) - (B\varphi^\sharp)(z)\theta(z) \right) \cdot \overline{v(0)} \cdot \prod_{m=1}^n \frac{1 - \bar{\mu}_m z}{z - \lambda_m}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)^{-1}$, функция в скобках обращается в нуль в точках λ_m (если $\theta(\lambda_m) = 0$, то $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \infty$, и из того, что $B\varphi^\sharp \in H^\infty$, вытекает, что $B(\lambda_m) = 0$). Следовательно, все выражение целиком есть функция из H^2 . Поскольку g – функция из представления (1) для ядра оператора Тёплица (а в нашем случае даже ограниченная и ограниченно обратимая функция), она определяется с точностью до мультипликативной константы функцией $\frac{g}{g}$; при этом справедлива формула (5):

$$\frac{(1 - \varphi^\sharp \theta) \cdot v^\sharp}{((1 - \varphi^\sharp \theta) \cdot v^\sharp)^\sharp} = \frac{1 - \varphi^\sharp \theta}{1 - \varphi \theta^\sharp} \cdot \frac{v^\sharp}{v} = \frac{\theta}{\omega \cdot B} \cdot \frac{B}{\Delta} = \frac{\theta}{\omega \cdot \Delta}.$$

§2. Сдвиги по ФРОСТМАНУ

В наших построениях будет использоваться следующий простой хорошо известный факт, см., например, теорему 10 в статье [4].

Лемма 5. Пусть ω – внутренняя функция, $K_\omega = H^2 \ominus \omega H^2$, α – комплексное число, $|\alpha| < 1$, и пусть ω_α – сдвиг функции ω по Фростману, определенный по формуле (7). Тогда

$$K_\omega = \frac{1 - \bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} \cdot K_{\omega_\alpha},$$

причем $\frac{1 - \bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}$ – изометрический множитель для K_{ω_α} .

Имея представление $g \cdot K_\omega$ для почти инвариантного подпространства относительно обратного сдвига в H^2 , можно получить представление с дополнительным свойством $\omega(0) = 0$, применяя описанную выше процедуру при $\alpha = \omega(0)$. Более общо, если взять $\alpha = \omega(\lambda)$, получим свойство $\omega(\lambda) = 0$ для произвольной точки $\lambda \in \mathbb{D}$.

Рассмотрим подпространство $g \cdot K_\omega$, где ω имеет вид (4), и где g – изометрический множитель для K_ω . Заменим K_ω в этой формуле в соответствии с леммой:

$$g \cdot K_\omega = g \cdot \frac{1 - \bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} \cdot K_{\omega_\alpha} = g_\alpha \cdot K_{\omega_\alpha}, \quad |\alpha| < 1,$$

где $g_\alpha = g \cdot \frac{1 - \bar{\alpha}\omega}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}}$ – изометрический множитель для K_{ω_α} . Как было сказано выше, эти представления исчерпывают все возможные представления вида (1) для заданного почти инвариантного подпространства.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{\omega - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\omega} = \frac{\frac{1}{B} \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\# \theta} - \alpha}{1 - \frac{\bar{\alpha}}{B} \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\# \theta}} = \frac{(\theta - \varphi) - \alpha \cdot B \cdot (1 - \varphi^\# \theta)}{B \cdot (1 - \varphi^\# \theta) - \bar{\alpha} \cdot (\theta - \varphi)} \\ &= \frac{(1 + \alpha B \varphi^\#) \theta - (\varphi + \alpha B)}{(B + \bar{\alpha} \varphi) - (\bar{\alpha} + B \varphi^\#) \theta} = \frac{1 + \alpha B \varphi^\#}{B + \bar{\alpha} \varphi} \cdot \frac{\theta - \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\#}}{1 - \frac{\bar{\alpha} + B \varphi^\#}{B + \bar{\alpha} \varphi} \theta} \\ &= \frac{1}{B_\alpha} \cdot \frac{\theta - \varphi_\alpha}{1 - \varphi_\alpha^\# \theta}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_\alpha = \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\#}, \quad B_\alpha = \frac{B + \bar{\alpha} \varphi}{1 + \alpha B \varphi^\#}, \quad (9)$$

что было использовано выше при получении формулы (8). Поскольку функция B унимодулярна на единичной окружности, функция B_α также унимодулярна. Функции $\bar{\alpha}\varphi, \alpha B \varphi^\#$ принадлежат H^∞ и имеют нормы строго меньше 1. Следовательно, если B – конечное произведение Бляшке, то по теореме Руше B_α – произведение Бляшке той же степени, что и B .

Имеем

$$\varphi_\alpha^\# = \frac{\varphi^\# + \bar{\alpha} B^\#}{1 + \bar{\alpha} B^\# \varphi} = \frac{B \varphi^\# + \bar{\alpha}}{B + \bar{\alpha} \varphi},$$

и из того, что $B\varphi^\sharp \in H^\infty$, $\|B\varphi^\sharp\|_\infty < 1$, получаем

$$B_\alpha \varphi_\alpha^\sharp = \frac{B + \bar{\alpha}\varphi}{1 + \alpha B\varphi^\sharp} \cdot \frac{B\varphi^\sharp + \bar{\alpha}}{B + \bar{\alpha}\varphi} = \frac{B\varphi^\sharp + \bar{\alpha}}{1 + \alpha B\varphi^\sharp} \in H^\infty.$$

§3. КОНСТРУКЦИЯ

В этом параграфе будут построены функции φ , B и, следовательно, ω , такие, что $\varphi \in \mathcal{V}_n$ – решение интерполяционной задачи (3) и ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}\Delta$ имеет вид $g \cdot K_\omega$ для некоторой ограниченной и ограниченно обратимой функции g , являющейся изометрическим множителем для K_ω . Поскольку

$$\Delta \cdot K = \{f \in K_\theta : f|_\Lambda = 0\},$$

это может быть сделано применением известного алгоритма Шура ко внутренней функции θ : выбирая на каждом шаге точку $\lambda \in \Lambda$, сдвигом по Фростману можно получить нуль внутренней функции в точке λ , а затем поделить получающуюся функцию на b_λ . После n шагов это даст искомую функцию ω , причем нетрудно видеть, что ω будет иметь вид (4). Это даст нам только одно решение; кроме того, получающаяся функция φ будет принадлежать множеству $\mathcal{V}_{n-1}$, и по предложению 8 ниже φ не может быть решением интерполяционной задачи (3). Поэтому мы несколько изменим алгоритм добавлением ещё одного сдвига по Фростману в самом конце.

Построение будет происходить по индукции по n . База $n = 0$ тривиальна ($\varphi \equiv 0$, $B \equiv 1$, $\omega = \theta$, $g \equiv 1$).

Теперь предположим, что результат уже получен для $n - 1$ точки множества $\Lambda \setminus \{\lambda_n\}$, а именно, ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}\Delta\bar{b}_{\lambda_n}$ представлено в виде $\dot{g} \cdot K_{\dot{\omega}}$ для некоторой ограниченной и ограниченно обратимой функции $\dot{g}$, являющейся изометрическим множителем для $K_{\dot{\omega}}$;

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\dot{B}} \frac{\theta - \dot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^\sharp \theta},$$

где $\dot{\varphi} \in \mathcal{V}_{n-1}$ удовлетворяет соотношениям (3) для $m = 1, \dots, n - 1$, и $\dot{B}$ – произведение Бляшке степени $n - 1$, $\dot{B}\dot{\varphi}^\sharp \in H^\infty$. Условие $\varphi(\lambda_m^*) = \overline{\theta(\lambda_m)}^{-1}$ равносильно тому, что $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \theta^\sharp(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)^{-1}$, следовательно имеем функцию $\dot{\varphi} \in \mathcal{V}_{n-1}$, для которой

$$\dot{\varphi}(\lambda_m) = \theta(\lambda_m), \quad \dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = \frac{1}{\theta(\lambda_m)}, \quad m = 1, \dots, n - 1;$$

и ищем функции $\varphi \in \mathcal{V}_n$ такие, что

$$\varphi(\lambda_m) = \theta(\lambda_m), \quad \varphi^\#(\lambda_m) = \frac{1}{\theta(\lambda_m)}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (10)$$

что равносильно тому, что φ является решением интерполяционной задачи (3).

Для этой цели сделаем три преобразования: во-первых, применим сдвиг по Фростману к $\dot{\omega}$, как было сделано в §2, чтобы у получающейся функции был нуль в точке λ_n ; во-вторых, поделим полученную внутреннюю функцию на сомножитель Бляшке b_{λ_n} ; и в-третьих, снова применим сдвиг по Фростману, параметр которого будет выбран так, чтобы были выполнены требуемые интерполяционные соотношения. В результате получится новая внутренняя функция ω .

Теперь найдем соответствующие формулы. Исходной является внутренней функция $\dot{\omega}$.

Применяя процедуру из §2 с параметром $\beta = \dot{\omega}(\lambda_n)$, получим сдвиг по Фростману функции $\dot{\omega}$, обращающийся в нуль в точке λ_n . Согласно (9), из пары функций $(\dot{\varphi}, \dot{B})$ получим пару

$$\left(\frac{\dot{\varphi} + \beta \dot{B}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\#}, \quad \frac{\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\#} \right),$$

которая по формуле (4) определяет внутреннюю функцию, входящую в представление вида (1) для ядра оператора Тёплица пока еще с символом $\bar{\theta} \Delta \bar{b}_{\lambda_n}$.

Теперь преобразуем ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta} \Delta \bar{b}_{\lambda_n}$ в ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta} \Delta$. Функция, играющая роль ω , обращается в нуль в точке λ_n , и ее надо разделить на b_{λ_n} . Из формулы (4) видно, что в терминах пары функций вида (φ, B) это означает, что первая функция остается прежней, а вторую надо умножить на b_{λ_n} . Таким образом, получаем пару

$$\left(\frac{\dot{\varphi} + \beta \dot{B}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\#}, \quad b_{\lambda_n} \cdot \frac{\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\#} \right).$$

Наконец, применяя сдвиг по Фростману с произвольным параметром α , $|\alpha| < 1$, согласно процедуре из §2, получим пару (φ, B) , в

которой

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\frac{\dot{\varphi} + \beta \dot{B}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\sharp} + \alpha \cdot b_{\lambda_n} \cdot \frac{\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\sharp}}{1 + \alpha \cdot b_{\lambda_n} \cdot \frac{\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\sharp} \cdot \left(\frac{\dot{\varphi} + \beta \dot{B}}{1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\sharp} \right)^\sharp} \\ &= \frac{(\dot{\varphi} + \beta \dot{B}) + \alpha b_{\lambda_n} \cdot (\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi})}{(1 + \beta \dot{B} \dot{\varphi}^\sharp) + \alpha b_{\lambda_n} \cdot (\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}) \cdot \frac{\dot{B} \dot{\varphi}^\sharp + \bar{\beta}}{\dot{B} + \bar{\beta} \dot{\varphi}}} \\ &= \frac{\dot{B} r + \dot{\varphi}}{1 + \dot{\varphi}^\sharp \dot{B} r},\end{aligned}$$

где

$$r = r_\alpha = \frac{\alpha b_{\lambda_n} + \beta}{1 + \beta \alpha b_{\lambda_n}} \in H^\infty, \quad \|r\|_\infty < 1;$$

B – произведение Бляшке степени n , ассоциированное с φ , для которого $B\varphi^\sharp \in H^\infty$. По построению имеем $\varphi \in \mathcal{V}_n$.

Теперь найдем значения функций φ и $\varphi^\sharp$ в точках λ_m , $m = 1, \dots, n$. Будем использовать обозначение

$$\dot{\psi} = \dot{B}\dot{\varphi}^\sharp,$$

когда важно подчеркнуть свойство $\dot{\psi} \in H^\infty$, $\|\dot{\psi}\|_\infty < 1$.

Поскольку $b_{\lambda_n}(\lambda_n) = 0$, имеем

$$r(\lambda_n) = \beta = \dot{\omega}(\lambda_n)$$

и

$$\varphi(\lambda_n) = \frac{\dot{B}(\lambda_n)r(\lambda_n) + \dot{\varphi}(\lambda_n)}{1 + \dot{\psi}(\lambda_n)r(\lambda_n)} = \frac{\dot{B}(\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n) + \dot{\varphi}(\lambda_n)}{1 + \dot{\psi}(\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n)}.$$

Из формулы обращения (6) получаем

$$\frac{\dot{B}\dot{\omega} + \dot{\varphi}}{1 + \dot{\psi}\dot{\omega}} = \theta,$$

откуда $\varphi(\lambda_n) = \theta(\lambda_n)$.

Для $m < n$ по предположению имеем $\dot{\varphi}(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)$, $\dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)^{-1}$. Имеем

$$\varphi(\lambda_m) = \frac{\dot{B}(\lambda_m)r(\lambda_m) + \dot{\varphi}(\lambda_m)}{1 + \dot{\psi}(\lambda_m)r(\lambda_m)}.$$

Умножая знаменатель на $\dot{\varphi}(\lambda_m)$, получим числитель. Действительно, если $\dot{\varphi}(\lambda_m) \neq 0$, вспомним, что $\dot{\psi} = \dot{B}\dot{\varphi}^\sharp$ и $\dot{\varphi}(\lambda_m) \cdot \dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = 1$; если

$\dot{\varphi}(\lambda_m) = 0$, то $\dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = \infty$, и из того, что $\dot{\psi} = \dot{B}\dot{\varphi}^\sharp \in H^\infty$, следует, что $\dot{B}(\lambda_m) = 0$. Поскольку $|\dot{\psi}(\lambda_m)r(\lambda_m)| < 1$, знаменатель не обращается в нуль, и получаем $\varphi(\lambda_m) = \dot{\varphi}(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)$.

Далее, имеем

$$\varphi^\sharp = \frac{\dot{B}^\sharp r^\sharp + \dot{\varphi}^\sharp}{1 + \dot{\varphi} \dot{B}^\sharp r^\sharp} = \frac{r^\sharp + \dot{B}\dot{\varphi}^\sharp}{\dot{B} + \dot{\varphi} r^\sharp} = \frac{r^\sharp + \dot{\psi}}{\dot{B} + \dot{\varphi} r^\sharp},$$

$$r^\sharp = \frac{\bar{\alpha} b_{\lambda_n}^\sharp + \bar{\beta}}{1 + \beta \bar{\alpha} b_{\lambda_n}^\sharp} = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta} b_{\lambda_n}}{b_{\lambda_n} + \beta \bar{\alpha}}.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$; тогда из соотношения $b_{\lambda_n}(\lambda_n) = 0$ получаем

$$r^\sharp(\lambda_n) = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\dot{\omega}(\lambda_n)}.$$

Если $\beta = \dot{\omega}(\lambda_n) = 0$, то $r^\sharp = \frac{\bar{\alpha}}{b_{\lambda_n}}$, $r^\sharp$ имеет полюс в точке λ_n , и, поскольку $\dot{\psi}$ и $\dot{B}$ – ограниченные функции, из формулы для $\varphi^\sharp$ получаем $\varphi^\sharp(\lambda_n) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\lambda_n)}$. Формулу (4) для $\dot{\omega}$ можно переписать в виде $\theta - \dot{\varphi} = (\dot{B} - \dot{\psi}\theta)\dot{\omega}$; если $\beta = 0$, то правая часть обращается в нуль в точке λ_n и, следовательно, $\dot{\varphi}(\lambda_n) = \theta(\lambda_n)$. Таким образом, в случае $\beta = 0$ получаем $\varphi^\sharp(\lambda_n) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\lambda_n)} = \frac{1}{\theta(\lambda_n)}$. Теперь предположим, что $\beta \neq 0$. Тогда, применяя формулу обращения (6), имеем

$$\begin{aligned} \varphi^\sharp(\lambda_n) &= \frac{r^\sharp(\lambda_n) + \dot{\psi}(\lambda_n)}{\dot{B}(\lambda_n) + \dot{\varphi}(\lambda_n)r^\sharp(\lambda_n)} = \frac{\frac{1}{\dot{\omega}(\lambda_n)} + \dot{\psi}(\lambda_n)}{\dot{B}(\lambda_n) + \dot{\varphi}(\lambda_n)\frac{1}{\dot{\omega}(\lambda_n)}} \\ &= \frac{1 + \dot{\psi}(\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{B}(\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n) + \dot{\varphi}(\lambda_n)} = \frac{1}{\theta(\lambda_n)}, \end{aligned}$$

что можно сделать, так как $|\dot{\psi}(\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n)| < 1$ и числитель не обращается в нуль.

Наконец, для $m < n$ имеем

$$\varphi^\sharp(\lambda_m) = \frac{r^\sharp(\lambda_m) + \dot{\psi}(\lambda_m)}{\dot{\varphi}(\lambda_m)r^\sharp(\lambda_m) + \dot{B}(\lambda_m)}.$$

Если $r^\sharp(\lambda_m) = \infty$, то, как и для λ_n выше, получаем $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\lambda_m)}$, что равно $\frac{1}{\theta(\lambda_m)}$. Теперь предположим, что значение $r^\sharp(\lambda_m)$ конечно. Умножая числитель на $\dot{\varphi}(\lambda_m)$, получим знаменатель: если $\dot{\varphi}(\lambda_m) \neq 0$, применим соотношение $\dot{\varphi}(\lambda_m) \cdot \dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = 1$; если $\dot{\varphi}(\lambda_m) = 0$, то также имеем $\dot{\varphi}(\lambda_m)\dot{\psi}(\lambda_m) = 0$, а из того, что $\dot{\varphi}^\sharp(\lambda_m) = \infty$ и $\dot{B}\dot{\varphi}^\sharp \in H^\infty$,

получаем $\dot{B}(\lambda_m) = 0$. Это доказывает, что $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\lambda_m)} = \frac{1}{\dot{\theta}(\lambda_m)}$ при условии, что числитель не обращается в нуль: $r^\sharp(\lambda_m) + \dot{\psi}(\lambda_m) \neq 0$, или

$$\alpha \neq -\overline{b_{\lambda_n}(\lambda_m)} \cdot \frac{\overline{\dot{\psi}(\lambda_m)} + \beta}{1 + \bar{\beta} \cdot \overline{\dot{\psi}(\lambda_m)}}. \quad (11)$$

В противном случае получаем исключительное значение α (отметим, что его модуль строго меньше 1), для которого равенство $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \frac{1}{\dot{\theta}(\lambda_m)}$ может нарушаться; ниже будет показано, что на самом деле оно нарушается всегда. Для $m = n$ эта формула дает ограничение $\alpha \neq 0$, которое использовалось при получении соотношения $\varphi^\sharp(\lambda_n) = \frac{1}{\dot{\theta}(\lambda_n)}$.

Таким образом, для каждого $m = 1, \dots, n$ всегда имеем $\varphi(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)$, а при ограничении (11) имеем и $\varphi^\sharp(\lambda_m) = \frac{1}{\dot{\theta}(\lambda_m)}$. Семейство Φ функций $\varphi \in \mathcal{V}_n$ построено в виде

$$\varphi = \frac{\dot{B} \cdot r + \dot{\varphi}}{1 + \dot{\varphi}^\sharp \dot{B}r}, \quad r = r_\alpha = \frac{\alpha b_{\lambda_n} + \beta}{1 + \bar{\beta} \alpha b_{\lambda_n}};$$

эти функции удовлетворяют соотношениям (10), и следовательно также и соотношениям (3), при ограничении (11) для $m = 1, \dots, n$.

В частности, доказано утверждение 1) основной теоремы, а в теореме 1 остается только показать, что для исключительного значения α всегда имеем $\varphi(\lambda_m^*) \neq \overline{\theta(\lambda_m)}^{-1}$, или, что равносильно, $\varphi^\sharp(\lambda_m) \neq \theta(\lambda_m)^{-1}$.

§4. ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ МНОЖЕСТВА Φ

В этом параграфе изучаются исключительные элементы $\varphi \in \Phi$, соответствующие исключительным значениям α из формулы (11). Удобно переписать формулы для исключительных элементов множества Φ через фиксированную функцию $\varphi_0 \in \Phi$, удовлетворяющую соотношениям (10), и произведение Бляшке B_0 степени n , ассоциированное с φ_0 . Существование таких пар φ_0, B_0 было установлено в конструкции из §3. Имеем

$$\psi_0 = B_0 \varphi_0^\sharp \in H^\infty, \quad \|\psi_0\|_\infty < 1$$

и

$$\Phi = \left\{ \varphi_\alpha = \frac{\varphi_0 + \alpha B_0}{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\sharp} : |\alpha| < 1 \right\}. \quad (12)$$

Для произведения Бляшке B_α , ассоциированного с φ_α , по формуле (9) имеем

$$B_\alpha = \frac{B_0 + \bar{\alpha}\varphi_0}{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\#} = \frac{B_0 + \bar{\alpha}\varphi_0}{1 + \alpha \psi_0},$$

$$\varphi_\alpha^\# = \frac{B_0 \varphi_0^\# + \bar{\alpha}}{B_0 + \bar{\alpha}\varphi_0} = \frac{\psi_0 + \bar{\alpha}}{B_0 + \bar{\alpha}\varphi_0}, \quad B_\alpha \varphi_\alpha^\# = \frac{B_0 \varphi_0^\# + \bar{\alpha}}{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\#} = \frac{\psi_0 + \bar{\alpha}}{1 + \alpha \psi_0}.$$

Лемма 6. Для $\varphi \in \Phi$, $\lambda \in \Lambda$, если $\varphi^\#(\lambda) \neq \frac{1}{\theta(\lambda)}$, то $\varphi = \varphi_\alpha$ при

$$\alpha = -\overline{\psi_0(\lambda)},$$

откуда для $B = B_\alpha$ имеем

$$B(\lambda) = 0, \quad (B\varphi^\#)(\lambda) = 0. \quad (13)$$

Доказательство. В случае $\varphi_0(\lambda) = \theta(\lambda) \neq 0$ имеем

$$\varphi_\alpha^\#(\lambda) - \frac{1}{\theta(\lambda)} = \frac{B_0(\lambda)\varphi_0^\#(\lambda) + \bar{\alpha}}{B_0(\lambda) + \bar{\alpha}\varphi_0(\lambda)} - \varphi_0^\#(\lambda) = \frac{\bar{\alpha}(1 - \varphi_0^\#(\lambda)\varphi_0(\lambda))}{B_0(\lambda) + \bar{\alpha}\varphi_0(\lambda)}.$$

Поскольку $\varphi_0^\#(\lambda) = \frac{1}{\varphi_0(\lambda)}$, числитель равен нулю, следовательно все выражение равно нулю, кроме случая, когда и знаменатель также обращается в нуль, или, что равносильно,

$$\bar{\alpha} = -\frac{B_0(\lambda)}{\varphi_0(\lambda)} = -B_0(\lambda)\varphi_0^\#(\lambda) = \psi_0(\lambda),$$

что и требовалось. В этом случае, очевидно, $B_\alpha(\lambda) = 0$; кроме того, из формул для B_α и $B_\alpha \varphi_\alpha^\#$ получаем $B_\alpha(\lambda)\varphi_\alpha^\#(\lambda) = \frac{B_\alpha(\lambda)}{\varphi_0(\lambda)} = 0$. Свойства (13) получены при условии $\theta(\lambda) \neq 0$. (Отметим, что для $\lambda \in \Lambda$ в случае $\theta(\lambda) \neq 0$ исключительный элемент $\varphi \in \Phi$ однозначно определяется свойством, что ассоциированное с ним произведение Бляшке обращается в нуль в точке λ .)

Теперь предположим, что $\varphi_0(\lambda) = \theta(\lambda) = 0$, тогда $\varphi_0^\#(\lambda) = \frac{1}{\theta(\lambda)} = \infty$. Поскольку $B_0 \varphi_0^\# \in H^\infty$, имеем $B_0(\lambda) = 0$ и, следовательно, $B_\alpha(\lambda) = 0$. В формуле для $\varphi_\alpha^\#$ знаменатель обращается в нуль в точке λ , и для того, чтобы $\varphi_\alpha^\#(\lambda) \neq \infty$, числитель в точке λ должен также обращаться в нуль, что равносильно условию $\alpha = -\overline{\psi_0(\lambda)}$. Тогда, очевидно, $(B_\alpha \varphi_\alpha^\#)(\lambda) = 0$ также и в этом случае. $\square$

Лемма 7. Допустим, что для $\varphi \in \Phi$ количество точек $\lambda \in \Lambda$, для которых $\varphi^\#(\lambda) = \frac{1}{\theta(\lambda)}$, не превосходит k . Тогда $\varphi \in \mathcal{V}_k$.

В частности, если функция $\varphi \in \Phi$ является исключительной только для одной точки $\lambda \in \Lambda$, то $\varphi \in \mathcal{V}_{n-1}$ – единственная рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами степени не выше $n-1$, для которой выполнены все соотношения из (3) за исключением $\varphi^\sharp(\lambda) = \frac{1}{\theta(\lambda)}$.

Доказательство. Обозначим через Λ' подмножество множества Λ , состоящее из точек λ , для которых $\varphi^\sharp(\lambda) \neq \frac{1}{\theta(\lambda)}$; по предположению Λ' состоит из по крайней мере $n-k$ элементов. Определим произведение Бляшке Δ' степени не меньше $n-k$ формулой

$$\Delta' = \prod_{\lambda \in \Lambda'} b_\lambda.$$

По лемме 6 соотношения (13) выполняются для всех $\lambda \in \Lambda'$. Следовательно, B/Δ' – произведение Бляшке степени не более k и $\varphi^\sharp \cdot B/\Delta' \in H^\infty$. Поскольку $\varphi \in H^\infty$ и $\|\varphi\|_\infty < 1$, получаем $\varphi \in \mathcal{V}_k$. $\square$

§5. АЛГОРИТМ ШУРА

Для заданного набора $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ точек единичного круга и функции $f \in H^\infty$ с нормой $\|f\|_\infty \leq 1$ алгоритм Шура дает функции f_m следующим образом:

$$f_0 = f; \quad s_m = f_{m-1}(\lambda_m), \quad f_m = \frac{1}{b_{\lambda_m}} \frac{f_{m-1} - s_m}{1 - \bar{s}_m f_{m-1}}, \quad m = 1, \dots, n.$$

Наш алгоритм из предыдущего параграфа, если его остановить перед последним сдвигом по Фростману на n -м шаге, по сути совпадает с алгоритмом Шура, примененным к θ . Действительно, композиция двух сдвигов по Фростману совпадает с одним сдвигом по Фростману с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, а каждый шаг нашего алгоритма начинается и заканчивается сдвигом по Фростману; следовательно, для каждого шага кроме n -го его последний сдвиг по Фростману может быть объединен с первым сдвигом по Фростману следующего шага. Все внутренние функции на каждом шаге алгоритма Шура имеют вид (4), а в конце алгоритма Шура получается функция $\varphi \in \mathcal{V}_{n-1}$, являющаяся исключительным элементом множества Φ , соответствующим последней выбранной точке $\lambda \in \Lambda$, для которой $\varphi(\lambda^*) \neq \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$ в соответствии с утверждением 3) теоремы 1 и предложением 8 ниже; для выполнения условия $\varphi(\lambda_n^*) = \overline{\theta(\lambda_n)}^{-1}$ необходим заключительный сдвиг по Фростману на n -м шаге.

Возьмем рациональную функцию f , удовлетворяющую интерполяционным условиям (3). Применим алгоритм Шура к f для набора точек $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. На каждом шаге, если текущая функция обращается в нуль в некоторой из оставшихся точек множества Λ , то такая точка (или одна из таких точек) выбирается в первую очередь, и тогда преобразование этого шага сводится к делению на сомножитель Бляшке. В общем случае возьмем $\lambda \in \Lambda$, положим $s = f(\lambda)$ (на первом шаге имеем $s = \theta(\lambda)$) и определим

$$\tilde{f} = \frac{1}{b_\lambda} \frac{f - s}{1 - \bar{s}f}.$$

Вначале, согласно формуле (3), имеем условие симметрии

$$f(\lambda_m^*) = \overline{f(\lambda_m)}^{-1}$$

для $m = 1, \dots, n$, и это свойство сохраняется для $\tilde{f}$ во всех точках $\lambda_m \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda_m^*) &= \frac{1}{b_\lambda(\lambda_m^*)} \frac{f(\lambda_m^*) - s}{1 - \bar{s}f(\lambda_m^*)} = \frac{1 - \bar{\lambda}/\bar{\lambda}_m}{1/\bar{\lambda}_m - \lambda} \cdot \frac{\overline{f(\lambda_m)}^{-1} - s}{1 - \bar{s}\overline{f(\lambda_m)}^{-1}} \\ &= \frac{\overline{\lambda_m - \lambda}}{1 - \bar{\lambda}\lambda_m} \cdot \frac{1 - \bar{s}f(\lambda_m)}{f(\lambda_m) - s} = \overline{\tilde{f}(\lambda_m)}^{-1}. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{f}$ рациональна, и максимальная степень ее числителя и знаменателя строго меньше, чем максимальная степень числителя и знаменателя функции f . Действительно, предположим, что $f = \frac{p}{q}$, где p, q — многочлены. Тогда $\tilde{f} = \frac{1}{b_\lambda} \frac{p - sq}{q - \bar{s}p}$; поскольку $p - sq$ обращается в нуль в точке λ , а $q - \bar{s}p$ обращается в нуль в λ^* , можно выделить сомножители $z - \lambda$ и $1 - \bar{\lambda}z$ в числителе и в знаменателе соответственно, и таким образом сократить b_λ . (Для $\lambda = 0$ перед делением на $b_0(z) = z$ функция $\frac{p - sq}{q - \bar{s}p}$ обращается в нуль в нуле, следовательно по условию симметрии на бесконечности она стремится к бесконечности, и таким образом степень ее числителя строго больше, чем степень знаменателя.)

Кроме того имеем

$$f = \frac{b_\lambda \tilde{f} + s}{1 + \bar{s} b_\lambda \tilde{f}},$$

и $\tilde{f} \in H^\infty$ и $\|\tilde{f}\|_\infty < 1$ тогда и только тогда, когда $f \in H^\infty$ и $\|f\|_\infty < 1$; f является произведением Бляшке степени $n > 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}$ является произведением Бляшке степени $n - 1$.

Теперь применим эту процедуру к $\tilde{f}$ вместо f во второй выбранной точке множества Λ , и далее, аналогично, повторим ее последовательно для всех точек множества Λ .

Зафиксируем порядок выбора точек множества Λ ; таким образом также фиксируются числа $s = s_m$ для каждого шага, поскольку они определяются значениями функции θ на множестве Λ . Применим алгоритм Шура к рациональным функциям f , удовлетворяющим соотношениям (3). Если числитель и знаменатель функции f – многочлены степени не выше n , то после n -го шага получим константу $\kappa = \kappa_f$. Поскольку все шаги алгоритма Шура обратимы, f однозначно определяется соответствующим числом κ . Нетрудно увидеть, что если $|\kappa| = 1$, то f – произведение Бляшке степени n ; если $|\kappa| < 1$, то $f \in H^\infty$ и $\|f\|_\infty < 1$.

Предложение 8. *Не существует рациональной функции f , удовлетворяющей условиям (3), числитель и знаменатель которой имеют степень строго меньше n одновременно.*

Доказательство. Действительно, в таком случае константа получилась бы после $(n - 1)$ -го шага алгоритма Шура, примененного к f . Это невозможно, так как значения в остающейся точке $\lambda \in \Lambda$ и в λ^* должны иметь модули < 1 и > 1 соответственно. $\square$

Отметим, что это рассуждение также показывает, что κ не может быть нулем.

Следствие 9. *Предположим, что функция φ из $\mathcal{V}_n$ удовлетворяет условиям (3). Тогда произведение Бляшке B степени n , для которого $B\varphi^\sharp \in H^\infty$, существует и единственно с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.*

Доказательство. Действительно, тогда согласно предложению $\varphi \in \mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$. Следовательно φ имеет ровно n полюсов (с учетом кратностей) во внешности единичного круга, и эти полюса определяют произведение Бляшке B степени n . $\square$

Как и в §4, зафиксируем функцию $\varphi_0 \in \Phi$, являющуюся решением интерполяционной задачи (3), или, что равносильно, задачи (10), и

пусть B_0 – произведение Бляшке степени n , ассоциированное с φ_0 . Мы знаем, что $\Phi = \{\varphi_\alpha : |\alpha| < 1\}$, где

$$\varphi_\alpha = \frac{\varphi_0 + \alpha B_0}{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\sharp}.$$

Эта формула также определяет рациональные функции при α с модулем $|\alpha| \geq 1$; для $\alpha = \infty$ естественно полагаем $\varphi_\infty = 1/\varphi^\sharp$.

Лемма 10. *Если f – рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами степени не выше n , и f является решением интерполяционной задачи (3), то существует число α из расширенной комплексной плоскости такое, что $f = \varphi_\alpha$.*

Доказательство. Алгоритм Шура, примененный к φ_α , $|\alpha| < 1$ (с фиксированным порядком выбора точек множества Λ и параметров s_m), после n -го шага дает константу $\kappa = \kappa(\alpha)$, причем $|\kappa| < 1$. Нетрудно увидеть, что κ аналитически зависит от α . Для α с модулем $|\alpha| = 1$ эта же процедура даст $|\kappa(\alpha)| = 1$. Поскольку f восстанавливается по κ , имеем $\kappa(\alpha_1) \neq \kappa(\alpha_2)$, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Таким образом, функция $\kappa(\alpha)$ является сомножителем Бляшке, или, иными словами, α и κ взаимосвязаны преобразованием Мебиуса, которое может быть продолжено на всю комплексную плоскость до взаимно однозначного отображения расширенной комплексной плоскости на себя. Теперь, если алгоритм Шура, примененный к функции f из предположения леммы, дает некоторое значение κ , то $\kappa = \kappa(\alpha)$ для некоторого α , и можно заключить, что $f = \varphi_\alpha$. $\square$

Отметим, что имеются некоторые значения κ , в частности $\kappa = 0$, которые не могут быть получены из функций f как в лемме; это означает, что для соответствующего числа $\alpha = \alpha(\kappa)$ функция φ_α не является решением интерполяционной задачи (3).

§6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство основной теоремы. Утверждение 1) вытекает из конструкции из §3.

Чтобы доказать утверждение 2), возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{V}_n$, являющуюся решением интерполяционной задачи (3), и произведение Бляшке B степени n такое, что $B\varphi^\sharp \in H^\infty$, и построим ω по формуле (4);

запишем

$$\omega = \frac{\theta - \varphi}{B - B\varphi^\sharp \theta}.$$

Числитель и знаменатель являются функциями из H^∞ , обращающимися в нуль на множестве Λ . Поскольку $B\varphi^\sharp \in H^\infty$ и $\|B\varphi^\sharp\|_\infty < 1$, по теореме Руше знаменатель имеет ровно n нулей в единичном круге, а мы знаем, что эти нули являются точками множества Λ , причем эти точки не являются полюсами для ω . Функция ω унимодулярна на единичной окружности, следовательно она является внутренней функцией.

По лемме 10 имеем $\varphi = \varphi_\alpha$ для некоторого α из расширенной комплексной плоскости. Построим число κ как в §5. Поскольку $\varphi \in H^\infty$ и $\|\varphi\|_\infty < 1$, имеем $|\kappa| < 1$, откуда $|\alpha| < 1$ и таким образом $\varphi \in \Phi$.

Поскольку $\varphi \in \mathcal{V}_n$ является решением интерполяционной задачи (3), по следствию 9 произведение Бляшке степени n , для которого $B\varphi^\sharp \in H^\infty$, определяется функцией φ однозначно с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, и следовательно оно совпадает с произведением Бляшке, ассоциированным с $\varphi \in \Phi$. Таким образом, функции φ, B совпадают с соответствующими функциями из конструкции из §3.

Имеем $K = g \cdot K_\omega$ для некоторой функции $g \in H^2$, являющейся изометрическим множителем для K_ω , и по предложению 4 g удовлетворяет соотношению (5). $\square$

Доказательство теоремы 1. Утверждения 1) и 2) теоремы были доказаны в §3. Кроме того в лемме 6 было показано, что если для $\lambda \in \Lambda$ существует элемент $\varphi \in \Phi$, для которого $\varphi(\lambda^*) \neq \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$, то он единственный и совпадает с φ_α при $\alpha = -\psi_0(\lambda)$. Нужно доказать, что для этого элемента φ_α всегда имеем $\varphi_\alpha(\lambda^*) \neq \overline{\theta(\lambda)}^{-1}$, или, что равносильно, $\varphi_\alpha^\sharp(\lambda) \neq \theta(\lambda)^{-1}$.

Допустим, что, однако, $\varphi_\alpha^\sharp(\lambda) = \theta(\lambda)^{-1}$. В доказательстве леммы 6 для $\varphi = \varphi_\alpha$ были установлены свойства (13) в точке λ . Пусть k — количество точек множества Λ , в которых $\varphi_\alpha^\sharp = \theta^{-1}$. Как и в доказательстве леммы 7, свойства (13) выполнены для всех точек множества Λ , в которых $\varphi_\alpha^\sharp \neq \theta^{-1}$, количество которых равно $n - k$, а также для λ , то есть для $n - k + 1$ точек. Рассуждение из доказательства леммы 7 дает, что $\varphi_\alpha \in \mathcal{V}_{k-1}$. Рассматривая аналог интерполяционной задачи (3) только для точек множества Λ , в которых $\varphi_\alpha^\sharp = \theta^{-1}$ и

количество которых равно k , по предложению 8 с числом k вместо n получаем противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 2. Возьмем $\varphi = \varphi_\alpha \in \Phi$. Всегда имеем $\varphi(\lambda_m) = \theta(\lambda_m)$, $m = 1, \dots, n$. Допустим, что $\varphi^\sharp(\lambda) = \frac{1}{\theta(\lambda)}$ для k точек множества Λ . Тогда $\varphi \in \mathcal{V}_k$ по лемме 7.

Обратно, возьмем функцию φ , удовлетворяющую условиям, перечисленным в формулировке теоремы, и определим

$$\Lambda'' = \left\{ \lambda \in \Lambda : \varphi^\sharp(\lambda) = \frac{1}{\theta(\lambda)} \right\}, \quad \Lambda' = \Lambda \setminus \Lambda'';$$

$$\Delta' = \prod_{\lambda \in \Lambda'} b_\lambda, \quad \Delta'' = \prod_{\lambda \in \Lambda''} b_\lambda.$$

По основной теореме, примененной к Λ'' вместо Λ , ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}\Delta''$ может быть записано в виде $g \cdot K_{\check{\omega}}$ при $\check{\omega} = \frac{1}{\check{B}} \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\sharp \theta}$, где $\check{B}$ – произведение Бляшке степени k такое, что $\check{B}\varphi \in H^\infty$. По следствию 9 (также примененному к множеству Λ''), $\check{B}$ с такими свойствами определяется функцией φ с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. Кроме того, поскольку для $\lambda \in \Lambda'$ имеем $\varphi(\lambda) = \theta(\lambda)$, но $\varphi^\sharp(\lambda) \neq \frac{1}{\theta(\lambda)}$, в таких точках имеем $\check{\omega}(\lambda) = 0$, и, следовательно,

$$\omega = \frac{\check{\omega}}{\Delta'} = \frac{1}{\check{B} \cdot \Delta'} \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\sharp \theta} \quad (14)$$

является внутренней функцией. Значит, ядро оператора Тёплица с символом $\bar{\theta}\Delta = \bar{\theta}\Delta'' \cdot \Delta'$ имеет вид $g \cdot K_\omega$, где функция ω определена формулой (14), и таким образом $\varphi \in \Phi$. $\square$

Формула (14) содержит описание произведения Бляшке B , ассоциированного с исключительным элементом $\varphi \in \Phi$; а именно, $B = \check{B} \cdot \Delta'$, где $\check{B}$ – произведение Бляшке степени k , определяемое условием $\check{B}\varphi \in H^\infty$, а Δ' – произведение Бляшке степени $n - k$ с нулями в точках $\lambda \in \Lambda$, для которых $\varphi^\sharp(\lambda) \neq \frac{1}{\theta(\lambda)}$.

Доказательство теоремы 3. По лемме 10 имеем

$$f = \varphi_\alpha = \frac{\varphi_0 + \alpha B_0}{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\sharp}$$

для некоторого α из расширенной комплексной плоскости. Если $|\alpha| = 1$, то φ_α – произведение Бляшке степени n . Если $|\alpha| < 1$, то $\varphi_\alpha \in \Phi$ согласно формуле (12). Если $|\alpha| > 1$ (включая случай $\alpha = \infty$), то

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^\sharp} &= \left(\frac{1 + \alpha B_0 \varphi_0^\sharp}{\varphi_0 + \alpha B_0} \right)^\sharp = \frac{1 + \bar{\alpha} B_0^\sharp \varphi_0}{\varphi_0^\sharp + \bar{\alpha} B_0^\sharp} \\ &= \frac{B_0 + \bar{\alpha} \varphi_0}{B_0 \varphi_0^\sharp + \bar{\alpha}} = \frac{\varphi_0 + \frac{1}{\bar{\alpha}} B_0}{1 + \frac{1}{\bar{\alpha}} B_0 \varphi_0^\sharp} = \varphi_{1/\bar{\alpha}} \in \Phi, \end{aligned}$$

как и требовалось. $\square$

§7. ДОБАВЛЕНИЕ

Когда статья уже была принята к публикации, автору удалось найти формулу для изометрического множителя g с правильной мультипликативной константой, а именно,

$$g = \frac{B \cdot (1 - \varphi^\sharp \theta)}{\Delta \cdot \mathcal{O}}, \quad (15)$$

где $\mathcal{O}$ – внешняя функция с модулем $\sqrt{1 - |\varphi|^2}$. Доказательство удобно проводить вместе с выполнением нашего алгоритма, а ключевым его моментом является проверка того, что это свойство сохраняется при преобразовании из §2; а именно, в предположении, что выполнена формула (15), требуется проверить, что для

$$\begin{aligned} g_\alpha &= g \cdot \frac{1 - \bar{\alpha} \omega}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} = \frac{B \cdot (1 - \varphi^\sharp \theta)}{\Delta \cdot \mathcal{O}} \cdot \frac{1 - \frac{\bar{\alpha}}{B} \cdot \frac{\theta - \varphi}{1 - \varphi^\sharp \theta}}{\sqrt{1 - |\alpha|^2}} \\ &= \frac{(B + \bar{\alpha} \varphi) - (B \varphi^\sharp + \bar{\alpha}) \theta}{\Delta \cdot \mathcal{O} \cdot \sqrt{1 - |\alpha|^2}} \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} g_\alpha &= \frac{B_\alpha \cdot (1 - \varphi_\alpha^\sharp \theta)}{\Delta \cdot \mathcal{O}_\alpha} = \frac{\left(\frac{B + \bar{\alpha} \varphi}{1 + \alpha B \varphi^\sharp} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\sharp} \right)^\sharp \theta \right)}{\Delta \cdot \mathcal{O}_\alpha} \\ &= \frac{(B + \bar{\alpha} \varphi) - (B \varphi^\sharp + \bar{\alpha}) \theta}{(1 + \alpha B \varphi^\sharp) \cdot \Delta \cdot \mathcal{O}_\alpha}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{O}_\alpha$ – внешняя функция с модулем $\left(1 - \left| \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\sharp} \right|^2 \right)^{1/2}$. Поскольку $1 + \alpha B \varphi^\sharp$ – внешняя функция, нужно проверить совпадение модулей

у знаменателей:

$$\sqrt{1-|\varphi|^2} \cdot \sqrt{1-|\alpha|^2} = |1 + \alpha B \varphi^\sharp| \cdot \left(1 - \left| \frac{\varphi + \alpha B}{1 + \alpha B \varphi^\sharp} \right|^2\right)^{1/2},$$

и нетрудно убедиться, что это действительно так.

Функция $\mathcal{O}$ является рациональной, и ясно, что нули ее знаменателя суть нули знаменателя рациональной функции φ . Функция $1 - \varphi^\sharp \varphi$ также является рациональной, на окружности совпадает с $|\mathcal{O}|^2$, и обращается в нуль в точках λ, λ^* , где $\lambda \in \Lambda''$. Из этого нетрудно вывести формулу $g = (1 - \varphi^\sharp \theta) \cdot v^\sharp$ и свойства функции v из §1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Hitt, *Invariant subspaces of $\mathcal{H}^2$ of an annulus*. — Pacific J. Math, **134**, No.1 (1988), 101–120.
2. R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*. — Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, **13**, No. 1 (1920).
3. E. Hayashi, *Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift*. — Proc. Amer. Math. Soc., **110**, No.2 (1990), 441–448.
4. R. B. Crofoot, *Multipliers between invariant subspaces of the backward shift*. — Pacific J. Math. **166**, No. 2 (1994), 225–246.

Kapustin V. V. Kernels of Toeplitz operators and rational interpolation.

The kernel of a Toeplitz operator on the Hardy class H^2 in the unit disk is a nearly invariant subspace of the backward shift operator, and, by D. Hitt's result, it has the form $g \cdot K_\omega$, where ω is an inner function, $K_\omega = H^2 \ominus \omega H^2$, and g is an isometric multiplier on K_ω . We describe the functions ω and g for the kernel of the Toeplitz operator with symbol $\bar{\theta}\Delta$, where θ is an inner function and Δ is a finite Blaschke product.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 13 августа 2018 г.