Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

А. А. Илларионов

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ДВУХ СИГМА-ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

§1. Введение

Под решеткой L будем понимать дискретную аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$, то есть множество одного из следующих трех видов

$$L = \{0\}, \quad L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}, \quad L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ω_1, ω_2 – линейно независимые над $\mathbb{R}$ комплексные числа.

Сигма-функция Вейерштрасса $\sigma_L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ассоциированная с решеткой L, определяется формулой:

$$\sigma_L(z) = z \cdot \prod_{l \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right).$$

Если $L = \{0\}$, то $\sigma_L(z) = z$. Если $L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}$, то $\pi\sigma_L(z) = \omega \sin(\pi z/\omega) \cdot \exp\big((\pi z/\omega)^2/6\big)$. Функция σ_L нечетная и целая (голоморфная на всем $\mathbb{C}$). Все ее нули простые и расположены в точках решетки L.

Определение. *Целую, не равную тождественно нулю функцию $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ будем называть решением функционального уравнения*

$$f(x+y)f(x-y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y), \tag{1}$$

если

1) *существуют функции $\alpha_j, \beta_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию* (1) *для всех $x, y \in \mathbb{C}$;*

Ключевые слова: функциональное уравнение, эллиптические функции, сигма-функция Вейерштрасса, теоремы сложения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 18-01-00638) и гранта Министерства образования и науки Хабаровского края (договор 129/2018Д от 06.08.2018).

2) *не существует функций* $\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *таких, что для всех* $x, y \in \mathbb{C}$

$$f(x+y)f(x-y) = \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{\alpha}_j(x)\widetilde{\beta}_j(y).$$

Замечание (см. [1] или [2])**.** Условие 2) определения эквивалентно линейной независимости систем функций $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, $\{\beta_j\}_{j=1}^n$. Функции α_j, β_j из разложения (1) могут определяться разными способами. Однако они всегда являются целыми.

Функциональное уравнение (1) возникает при анализе операторов ранга n, действующих на пространствах Фока (см. [3]). Оно также тесно связано (см. [2, 4]) с функциональным уравнением

$$f_1(u+z)f_2(v+z)f_3(u+v-z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(u,v)\psi_j(z),$$

играющим важную роль в теории трилинейных дифференциальных операторов (см. [5]).

Согласно классической формуле сложения

$$\sigma_L(x+y)\sigma_L(x-y) = \sigma_L^2(x)\sigma_L^2(y)\left(\wp_L(y) - \wp_L(x)\right), \tag{2}$$

где $\wp_L = -(\log \sigma_L)''$ (эллиптическая функция Вейештрасса), функция σ_L является решением уравнения (1) при $n = 2$.

Уравнение (1) ранее изучалось в работах [1–4, 6–12]. Однако его общее решение известно только при $n = 1$ (тривиальный случай), $n = 2$ (см. любую из работ [1–3, 11]) и при $n = 3$ (см. [11]). Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
&f(z) = e^{Az^2+Bz+C}, && \text{если } n = 1,\\
&f(z) = \sigma_L(z+z_0) \cdot e^{Az^2+Bz+C}, && \text{если } n = 2,\\
&f(z) = \sigma_L(z+z_0)\sigma_L(z+z_1) \cdot e^{Az^2+Bz+C}, && \text{если } n = 3,
\end{aligned}$$

где L – решетка, $z_0, z_1, A, B, C \in \mathbb{C}$, причем $(z_1 - z_0) \notin (\frac{1}{2}L) \setminus L$. Вопрос об описании множества всех решений уравнения (1) при $n \geq 4$ является открытым.

Произведение $\sigma_L\sigma_\Lambda$ двух сигма-функций Вейерштрасса обладает следующими свойствами.

1. Функция $f = \sigma_L \sigma_\Lambda$ есть решение уравнения (1) при $n = 4$, если $L \neq \Lambda$. Действительно, согласно формуле (2),

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y) \times \Big(\wp_L(y)\wp_\Lambda(y) - \wp_L(y)\wp_\Lambda(x) - \wp_\Lambda(y)\wp_L(x) + \wp_L(x)\wp_\Lambda(x) \Big).$$

   Если $L \neq \Lambda$, то функции $\wp_L \wp_\Lambda$, $\wp_L$, $\wp_\Lambda$, 1 линейно независимы над $\mathbb{C}$.
2. Функция $f = \sigma_L \sigma_\Lambda$ четная, имеющая нуль в точке $z = 0$.

Наш основной результат заключается в доказательстве обратного утверждения.

Теорема 1. *Пусть f – решение уравнения* (1) *при $n = 4$, причем функция f – четная и $f(0) = 0$. Тогда f имеет вид*

$$f(z) = \sigma_L(z)\sigma_\Lambda(z) \cdot e^{Az^2+C},$$

где $A, C \in \mathbb{C}$, а L, Λ – некоторые решетки, причем $L \neq \Lambda$.

Замечание. Если $L = \Lambda$, то функция $f = \sigma_L \sigma_\Lambda$ является решением уравнения (1) при $n = 3$.

Утверждение теоремы 1 нарушается, если f не является четной или $f(0) \neq 0$.

Пример 1. Функция $f = \sigma_L^3$ является нечетной и имеет нуль в точке $z = 0$. Согласно (2) она удовлетворяет условию (1) при $n = 4$.

Пример 2. Пусть $\Theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ – тета-функция двух переменных (определение см. в [13, глава 2, §1]). Это четная функция. Согласно классической теореме сложения

$$\frac{\Theta(\mathbf{u}+\mathbf{v})\Theta(\mathbf{u}-\mathbf{v})}{\Theta^2(\mathbf{u})\Theta^2(\mathbf{v})} = \sum_{j=1}^{4} \phi_j(\mathbf{u})\psi_j(\mathbf{v}),$$

где ϕ_j, $\psi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ четная функция $f(z) = \Theta(z\mathbf{u})$ является решением уравнения (1) при $n = 4$ (за исключением некоторых вырожденных случаев, в которых $n < 4$).

§2. Основная лемма

Целью параграфа является доказательство следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда множество нулей* $\mathcal{N}=\{z\in\mathbb{C}:f(z)=0\}$ *функции* f *можно представить в виде*

$$\mathcal{N}=L\cup\Lambda,$$

где L,Λ *– аддитивные подгруппы поля* $\mathbb{C}$*, причем нули из* $L\cap\Lambda$ *являются двукратными, а все остальные – простыми.*

Все другие результаты носят вспомогательный характер.

Лемма 2. *Пусть* f *– решение уравнения* (1)*, а* α_j,β_j *– функции из правой части уравнения* (1). *Тогда векторы*

$$(\alpha_1(z),\dots,\alpha_n(z)),\quad (\beta_1(z),\dots,\beta_n(z))$$

не обращаются в нуль ни при одном $z\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть, например, $\alpha_j(x_0)=0$, $j=1,\dots,n$. Тогда

$$f(x_0+y)f(x_0-y)=0$$

для любого $y\in\mathbb{C}$. Поэтому $f\equiv 0$. Получили противоречие. □

Лемма 3 ([11, лемма 3])**.** *Пусть* f *– решение уравнения* (1). *Тогда кратность любого нуля функции* f *не больше, чем* $(n-1)$.

Всюду ниже до конца раздела считаем выполненными условия теоремы 1. Используем следующие обозначения:

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4):\mathbb{C}\to\mathbb{C}^4,\quad \beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4):\mathbb{C}\to\mathbb{C}^4,$$

где α_j,β_j – функции из правой части уравнения (1). Определим также

$$\alpha(x)\cdot\beta(y)=\sum_{j=1}^{4}\alpha_j(x)\beta_j(y)\qquad(x,y\in\mathbb{C}).$$

Из (1) вытекают равенства, справедливые для любых $x,y\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\alpha(x)\cdot\beta(y)&=f(x+y)f(x-y),\\ \alpha(x)\cdot\beta'(y)&=f'(x+y)f(x-y)-f(x+y)f'(x-y),\\ \alpha(x)\cdot\beta''(y)&=f''(x+y)f(x-y)-2f'(x+y)f'(x-y)\\ &\quad+f(x+y)f''(x-y).\end{aligned}\tag{3}$$

Лемма 4. *Кратность нуля* $z=0$ *функции* f *равна* 2.

Доказательство. Так как функция f четная, то $f'(0) = f'''(0) = 0$. Если $f''(0) = 0$, то кратность нуля $z = 0$ не меньше, чем 4. Это невозможно по лемме 3. Поэтому $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$. □

Лемма 5. *Точка $z = z_0$ является нулем функции f кратности большей, чем 1 тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $C \in \mathbb{C}$, что для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равентсво*

$$C \cdot f(z - z_0) f(z + z_0) = f^2(z). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (4). Отметим, что C не равно 0, так как в противном случае $f \equiv 0$. Выбирая $z = z_0$, имеем $f(z_0) = 0$. Дважды продифференцируем (4) по z и положим $z = 0$. Используя равенства $f(0) = f'(0) = 0$, $f(-z_0) = f(z_0) = 0$, получаем

$$-2Cf'(-z_0)f'(z_0) = 0.$$

Отсюда в силу четности функции f вытекает, что $f'(z_0) = 0$. Значит, кратность нуля $z = z_0$ не меньше, чем 2.

Пусть $f(z_0) = f'(z_0) = 0$. Докажем, что тогда выполняется равенство (4). Используя формулы (3) и учитывая, что $f(0) = f'(0) = f(z_0) = f'(z_0) = 0$, имеем

$$\begin{cases} \alpha(0) \cdot \beta(0) = 0 \\ \alpha(0) \cdot \beta(z_0) = 0 \\ \alpha(0) \cdot \beta''(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha(z_0) \cdot \beta(0) = 0 \\ \alpha(z_0) \cdot \beta(z_0) = 0 \\ \alpha(z_0) \cdot \beta''(0) = 0 \end{cases}.$$

Отсюда вытекает, что векторы $\alpha(0)$, $\alpha(z_0)$ линейно зависимы либо векторы $\beta(0)$, $\beta(z_0)$, $\beta''(0)$ линейно зависимы (над полем $\mathbb{C}$). Действительно, если $\alpha(0)$, $\alpha(z_0)$ линейно независимы, то векторы $\beta(0)$, $\beta(z_0)$, $\beta''(0)$ принадлежат множеству $\{u \in \mathbb{C}^4 : \alpha(0) \cdot u = 0, \ \alpha(z_0) \cdot u = 0\}$, которое является двумерным линейным пространством над $\mathbb{C}$. Следовательно, $\beta(0)$, $\beta(z_0)$, $\beta''(0)$ линейно зависимые. Отдельно рассмотрим оба случая.

1. Пусть векторы $\alpha(0)$, $\alpha(z_0)$ линейно зависимы. Тогда функции

$$\begin{aligned} &y \mapsto \alpha(0) \cdot \beta(y) = f(y)f(-y) = f^2(y), \\ &y \mapsto \alpha(z_0) \cdot \beta(y) = f(z_0 + y)f(z_0 - y) = f(y + z_0)f(y - z_0) \end{aligned}$$

также линейно зависимы, то есть существуют $(c_0, c_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ такие, что

$$\forall y \in \mathbb{C} \qquad c_1 f(y + z_0) f(y - z_0) = c_0 f^2(y).$$

Если $c_0 = 0$, то $f \equiv 0$. Поэтому $c_0 \neq 0$. Следовательно, выполняется равенство (4).

2. Пусть $\beta(0)$, $\beta(z_0)$, $\beta''(0)$ линейно зависимые. Тогда функции

$$\begin{aligned} &x \mapsto \alpha(x) \cdot \beta(0) = f^2(x), \\ &x \mapsto \alpha(x) \cdot \beta(z_0) = f(x+z_0)f(x-z_0), \\ &x \mapsto \alpha(x) \cdot \beta''(0) = 2f''(x)f(x) - 2f'^2(x), \end{aligned}$$

также линейно зависимы, то есть существуют $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ такие, что

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad c_0 f^2(x) = c_1 f(x+z_0)f(x-z_0) + c_2 \left(f''(x)f(x) - f'^2(x)\right).$$

Дважды дифференцируя последнее соотношение, полагая $x = 0$, учитывая четность функции f и условия $f(0) = f'(0) = f(z_0) = f'(z_0) = 0$, получаем $-c_2 f''^2(0) = 0$. Согласно лемме 4 $f''(0) \neq 0$. Значит, $c_2 = 0$. Следовательно, выполняется равенство (4). □

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения.*

а) *Любой нуль функции f имеет кратность* 1 *или* 2.

б) *Множество $\mathcal{N}_2$, состоящее из двукратных нулей функции f, образует аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$.*

в) *Если z_0 – двукратный, а z_1 – простой нуль функции f, то $(z_1 + z_0)$ – простой нуль.*

Доказательство. Докажем а). Пусть z_0 – нуль функции f кратности большей, чем 1. Тогда выполняется соотношение (4). Так как функция f – четная, то из (4) вытекает, что кратность нуля $z = z_0$ равна кратности нуля $z = 0$ функции f, которая равна 2.

Докажем б). Пусть $z_0, z_1 \in \mathcal{N}_2$. Согласно сщцтношению (4) точка $z = z_1$ является нулем функции $z \mapsto f(z+z_0)f(z-z_0)$ кратности 4. Учитывая утверждение а), заключаем, что $(z_1 \pm z_0) \in \mathcal{N}_2$. Значит, справедливо утверждение б).

Докажем в). Если z_0 – двукратный, а z_1 – простой нуль функции f, то $(z_1 + z_0)$ – простой нуль, так как иначе $z_1 = (z_1 + z_0) - z_0 \in \mathcal{N}_2$ согласно б). □

Лемма 6. *Пусть z_1, z_2 – простые нули функции f. Тогда*

$$f(z_1 + z_2)f(z_1 - z_2) = 0,$$

если и только если существуют такие постоянные $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, *что* $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ *и*

$$\forall y \in \mathbb{C} \qquad c_1 f(z_1 + y) f(z_1 - y) + c_2 f(z_2 + y) f(z_2 - y) = c_0 f^2(y). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $f(z_1 + z_2) f(z_1 - z_2) = 0$. Используя первое соотношение из (3), четность функции f и условия $f(0) = f(z_1) = f(z_2) = 0$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha(0) \cdot \beta(z_1) = 0 \\ \alpha(z_1) \cdot \beta(z_1) = 0 \\ \alpha(z_2) \cdot \beta(z_1) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha(0) \cdot \beta(z_2) = 0 \\ \alpha(z_1) \cdot \beta(z_2) = 0 \\ \alpha(z_2) \cdot \beta(z_2) = 0 \end{array} \right. .$$

Следовательно, векторы $\beta(z_1), \beta(z_2)$ либо векторы $\alpha(0), \alpha(z_1), \alpha(z_2)$ линейно зависимы.

Пусть $\beta(z_1), \beta(z_2)$ линейно зависимые. Тогда согласно (3) функции

$$x \mapsto \alpha(x) \cdot \beta(z_1) = f(x + z_1) f(x - z_1),$$
$$x \mapsto \alpha(x) \cdot \beta(z_2) = f(x + z_2) f(x - z_2)$$

также линейно зависимы, то есть существуют такие $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, что

$$c_1 f(x + z_1) f(x - z_1) + c_2 f(x + z_2) f(x - z_2) = 0.$$

Учитывая четность функции f, получаем соотношение (5), где $c_0 = 0$. Очевидно, что $c_1 \cdot c_2 \neq 0$, так как в противном случае $f \equiv 0$.

Пусть $\alpha(0), \alpha(z_1), \alpha(z_2)$ линейно зависимые. Согласно формулам (3) функции

$$y \mapsto \alpha(0) \cdot \beta(y) = f(y) f(-y),$$
$$y \mapsto \alpha(z_1) \cdot \beta(y) = f(z_1 + y) f(z_1 - y),$$
$$y \mapsto \alpha(z_2) \cdot \beta(y) = f(z_2 + y) f(z_2 - y)$$

также линейно зависимы. Учитывая четность функции f, получаем соотношение (5), в котором $(c_0, c_1, c_2) \neq 0$. Если, например, $c_1 = 0$, то z_2 есть нуль кратности 2 по лемме 5. Поэтому $c_1 \cdot c_2 \neq 0$.

Пусть выполняется равенство (5). Выбирая в нем $y = z_2$, получаем $c_1 f(z_1 + z_2) f(z_1 - z_2) = 0$. Значит, $f(z_1 + z_2) f(z_1 - z_2) = 0$. □

Определение. *Пусть* $\mathcal{N}_1$ *– множество простых нулей функции* f. *Будем говорить, что нули* $z_1, z_2 \in \mathcal{N}_1$ *эквивалентны и писать* $z_1 \sim z_2$, *если* $f(z_1 + z_2) f(z_1 - z_2) = 0$.

Лемма 7. *Бинарное отношение* $\sim$ *есть отношение эквивалентности на множестве* $\mathcal{N}_1$.

Доказательство. Так как $f(0) = 0$, то $z_1 \sim z_1$. Так как функция f – четная, то из условия $z_1 \sim z_2$ вытекает, что $z_2 \sim z_1$. Осталось доказать свойство транзитивности. Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{N}_1$, причем $z_1 \sim z_2$, $z_2 \sim z_3$. По лемме 6 найдутся такие $c_0, c_1, k_0, k_2 \in \mathbb{C}$, что $c_1 \cdot k_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} c_1 f(z_1 + y) f(z_1 - y) + f(z_2 + y) f(z_2 - y) &= c_0 f^2(y), \\ f(z_2 + y) f(z_2 - y) + k_2 f(z_3 + y) f(z_3 - y) &= k_0 f^2(y). \end{aligned}$$

Разность двух последних соотношений имеет вид

$$c_1 f(z_1 + y) f(z_1 - y) - k_2 f(z_3 + y) f(z_3 - y) = (c_0 - k_0) f^2(y).$$

Следовательно, $f(z_1 + z_3) f(z_1 - z_3) = 0$, то есть $z_1 \sim z_3$. □

Лемма 8. *Из любых трех простых нулей функции* f *можно выбрать два эквивалентных.*

Доказательство. Пусть z_1, z_2, z_3 – простые нули функции f. Положим $z_0 = 0$. Согласно первому соотношению из (3)

$$\alpha(z_j) \cdot \beta(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Так как $\beta(0) \neq 0$ по лемме 3, то система векторов $\{\alpha(z_j)\}_{j=0}^3$ линейно зависима. Следовательно, функции

$$y \to \alpha(z_j) \cdot \beta(y) = f(z_j + y) f(z_j - y), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

также линейно зависимы, то есть существуют такие $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, что

$$\sum_{j=1}^{3} c_j f(z_j + y) f(z_j - y) = c_0 f(y) f(-y).$$

Отметим, что $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$ (иначе $f \equiv 0$). Выбирая $y = z_1$, $y = z_2$ и $y = z_3$, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_2 f(z_2 + z_1) f(z_2 - z_1) + c_3 f(z_3 + z_1) f(z_3 - z_1) &= 0, \\ c_1 f(z_1 + z_2) f(z_1 - z_2) + c_3 f(z_3 + z_2) f(z_3 - z_2) &= 0, \\ c_1 f(z_1 + z_3) f(z_1 - z_3) + c_2 f(z_2 + z_3) f(z_2 - z_3) &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных (c_1, c_2, c_3). Поскольку $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$, определитель системы равен нулю. Обозначая $F(x, y) = f(x-y)f(x+y)$ и учитывая, что $F(x, y) = F(y, x)$ (в силу четности f), заключаем

$$\det \begin{pmatrix} 0 & F(z_2, z_1) & F(z_3, z_1) \\ F(z_1, z_2) & 0 & F(z_3, z_2) \\ F(z_1, z_3) & F(z_2, z_3) & 0 \end{pmatrix} = 2F(z_1, z_2)F(z_1, z_3)F(z_2, z_3) = 0.$$

Значит, существуют такие $j, l \in \{1, 2, 3\}$, что $j \neq l$, $F(z_j, z_l) = 0$, то есть $z_j \sim z_l$. □

Лемма 9. *Если* $f(z_0) = 0$, *то* $f(2z_0) = 0$.

Доказательство. Если кратность нуля z_0 равна 2, то $f(2z_0) = 0$ согласно следствию 1 б). Пусть z_0 – простой нуль. Используя (3) и условия $f(0) = f'(0) = f(z_0) = 0$, имеем

$$\alpha(0) \cdot \beta(0) = 0, \quad \alpha(0) \cdot \beta(z_0) = 0, \quad \alpha(0) \cdot \beta'(z_0) = 0, \quad \alpha(0) \cdot \beta''(0) = 0.$$

Так как $\alpha(0) \neq 0$, то векторы $\beta(0), \beta(z_0), \beta''(0), \beta'(z_0)$ линейно зависимы. Значит, функции

$$\begin{aligned} x &\mapsto \alpha(x) \cdot \beta(0) = f^2(x), \\ x &\mapsto \alpha(x) \cdot \beta(z_0) = f(x+z_0)f(x-z_0), \\ x &\mapsto \alpha(x) \cdot \beta'(z_0) = f'(x+z_0)f(x-z_0) - f(x+z_0)f'(x-z_0), \\ x &\mapsto \alpha(x) \cdot \beta''(0) = 2(f''(x)f(x) - f'^2(x)), \end{aligned}$$

также линейно зависимы, то есть существуют такие $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, что

$$c_0 f^2(x) + c_1 f(x+z_0)f(x-z_0) + c_2 \Big(f'(x+z_0)f(x-z_0) - f(x+z_0)f'(x-z_0)\Big) = c_3 \Big(f''(x)f(x) - f'^2(x)\Big). \quad (6)$$

Выбирая $x = z_0$, получаем $c_3 f'^2(z_0) = 0$. Значит, $c_3 = 0$. Следовательно, $c_2 \neq 0$, так как иначе z_0 – двукратный нуль по лемме 5. Дифференцируя по x соотношение (6) и полагая $x = z_0$, заключаем $c_2 f(2z_0) f''(0) = 0$. Поэтому $f(2z_0) = 0$. □

Доказательство леммы 1. Пусть $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ – множества простых и двукратных нулей функции f соответственно. По следствию 1 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, причем $\mathcal{N}_2$ – аддитивная подгруппа поля $\mathbb{C}$. Если $\mathcal{N}_1 = \varnothing$, то утверждение леммы выполняется при $L = \Lambda = \mathcal{N}_2$. Пусть $\mathcal{N}_1 \neq \varnothing$. Согласно лемме 8 множество $\mathcal{N}_1$ можно разбить не более, чем на два класса эквивалентности относительно $\sim$, то есть существуют множества L' и Λ' (второе может быть пустым) такие, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_1 = L' \cup \Lambda', \quad L' \cap \Lambda' = \varnothing, \\ &x_1 \sim x_2, \quad \text{если} \quad x_1, x_2 \in L' \text{ или } x_1, x_2 \in \Lambda', \\ &x_1 \not\sim x_2, \quad \text{если} \quad x_1 \in L', \ x_2 \in \Lambda'. \end{aligned}$$

Положим

$$L = L' \cup \mathcal{N}_2, \quad \Lambda = \Lambda' \cup \mathcal{N}_2.$$

Тогда $\mathcal{N} = L \cup \Lambda$, причем нули из $L \cap \Lambda = \mathcal{N}_2$ являются двукратными, а все остальные – простыми. Осталось доказать, что L и Λ – аддитивные подгруппы. Не умаляя общности, рассмотрим только множество L.

Пусть $z_0 \in L = L' \cup \mathcal{N}_2$. Если $z_0 \in \mathcal{N}_2$, то $(-z_0) \in \mathcal{N}_2 \subset L$. Если $z_0 \in L'$, то $f(-z_0) = 0$, так как функция f – четная. Кроме того, $z_0 \sim (-z_0)$, поскольку $f(0) = 0$. Значит, $(-z_0) \in L'$. В обоих случаях $(-z_0) \in L$.

Пусть $z_1, z_2 \in L$. Нужно доказать, что $(z_1+z_2) \in L$. Если $z_1, z_2 \in \mathcal{N}_2$, то это вытекает из следствия 1 б). Пусть $z_1 \in L'$, $z_2 \in \mathcal{N}_2$. Тогда $(z_1 + z_2)$ – простой нуль по следствию 1 в). Кроме того,

$$f((z_1 + z_2) - z_1) = 0,$$

поэтому $(z_1+z_2) \sim z_1$, следовательно, $(z_1+z_2) \in L'$. Осталось рассмотреть последний случай: $z_1, z_2 \in L'$. Докажем сначала, что $f(z_1 + z_2) = 0$. Так как $z_1 \sim z_2$, то по лемме 6 существует такая тройка постоянных $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^3$, что $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ и

$$\forall y \in \mathbb{C} \quad c_1 f(z_1 + y) f(z_1 - y) + c_2 f(z_2 + y) f(z_2 - y) = c_0 f^2(y).$$

Если $c_0 \neq 0$, то выбирая $y = (z_1 + z_2)$, получаем $f(z_1 + z_2) = 0$. Пусть $c_0 = 0$. Рассмотрим равенство

$$f(z_1 + y) = -\frac{c_2}{c_1} \frac{f(z_2 - y)}{f(z_1 - y)} f(z_2 + y)$$

при $y \to z_2$. Учитывая, что $f(2z_2) = 0$ по лемме 9, а кратность нуля $z = 0$ не меньше, чем кратность любого другого нуля функции f, приходим к выводу: $f(z_1 + z_2) = 0$. Если кратность нуля $(z_1 + z_2)$ функции f равна двум, то $(z_1 + z_2) \in L$ по определению множества L. Если нуль $(z_1 + z_2)$ простой, то из равенства $f((z_1 + z_2) - z_1) = 0$ вытекает, что $(z_1+z_2) \sim z_1$. Поэтому $(z_1+z_2) \in L' \subset L$. Таким образом, $(z_1 + z_2) \in L$ при любых $z_1, z_2 \in L$. Значит, L – аддитивная подгруппа поля $\mathbb{C}$. $\square$

§3. Доказательство теоремы 1

Порядок $\rho = \rho(f)$ целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\rho = \limsup_{R \to \infty} \frac{\log \log M_f(R)}{\log R}, \qquad M_f(R) = \sup\{|f(z)| : |z| = R\}.$$

Будем использовать следующую теорему, вытекающую из классического результата о представлении целых функций конечного порядка в виде произведения Вейерштрасса (см., например, [14, стр. 252, формула (35)]).

Теорема 2. *Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – целые функции конечных порядков. Если f_1 и f_2 имеют одинаковые множества нулей, то*

$$f_1(z) = e^{P(z)} \cdot f_2(z),$$

где P – многочлен степени не большей, чем $\max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть множества L и Λ такие же, как и в лемме 1. Множество нулей функции f не имеет предельных точек (кроме ∞). Поэтому L и Λ – решетки. Рассмотрим функцию $\sigma_L \cdot \sigma_\Lambda$. Так как все нули функции σ_L (функции σ_Λ) простые и расположены в точках множества L (в точках множества Λ), то множество нулей отображения $\sigma_L \cdot \sigma_\Lambda$ совпадает с $L \cup \Lambda$, причем нули из $L \cap \Lambda$ являются двукратными, а все остальные – простыми. Значит, функции f и $\sigma_L \cdot \sigma_\Lambda$ имеют одинаковые множества нулей. Известно (см. [1, лемма 1.3] либо [10]), что порядок любого решения уравнения (1) не превосходит 2. Порядок функции $\sigma_L \cdot \sigma_\Lambda$ также не больше, чем 2. Используя теорему 2, заключаем, что

$$f(z) = \sigma_L(z) \cdot \sigma_\Lambda(z) \cdot e^{Az^2 + Bz + C}.$$

Так как f и $\sigma_L \cdot \sigma_\Lambda$ – четные функции, то $B = 0$. Если $L = \Lambda$, то функция f удовлетворяет условию (1) при $n = 3$. Поэтому $L \neq \Lambda$. Теорема 1 полностью доказана. □

Список литературы

1. M. Bonk, *The addition theorem of Weierstrass's sigma function.* — Math. Ann. **298**, No. 1 (1994), 591–610.
2. В. А. Быковский, *Гиперквазимногочлены и их приложения.* — Функц. анализ и его приложения **50**, No. 3 (2016), 34–46.
3. R. Rochberg, L. Rubel, *A Functional Equation.* — Indiana Univ. Math. J. **41**, No. 2 (1992), 363–376.

4. А. А. Илларионов, *Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями.* — Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы Тр. МИАН, МАИК, М. **299** (2017), 96–108.
5. В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Трилинейные функциональные уравнения.* — УМН **60**, No. 2 (2005), 151–152.
6. P. Sinopoulos, *Generalized sine equation*, I. — Aequationes Math. **48** (1994), 171–193.
7. M. Bonk, *The characterization of theta functions by functional equations.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **65** (1995), 29–55.
8. M. Bonk, *The addition formula for theta function.* — Aequationes Math. **53**, No. 1–2 (1997), 54–72.
9. A. Jarai, W. Sander, *On the characterization of Weierstrass's sigma function.* — Functional Equations – Results and Advances, Adv. Math. **3**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2002), 29–79.
10. В. А. Быковский, *О ранге нечетных гиперквазимногочленов.* — Докл. РАН **470**, No. 3 (2016), 255–256.
11. А. А. Илларионов, *Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса.* — Функц. анализ и его приложения **50**, No. 4 (2016), 43–54.
12. А. А. Илларионов, М. А. Романов, *О связи между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций.* — Дальневост. матем. журн. **17**, No. 2 (2017), 210–220.
13. Д. Мамфорд, *Лекции о тета-функциях.* М., Изд-во иностр. литер., 1988.
14. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного.* Т. 1, М., ИЛ, 1962.

Illarionov A. A. On products of Weierstrass sigma functions.

We prove the following result. Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be an even entire function. Let there exist $\alpha_j, \beta_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ with

$$f(x+y)f(x-y) = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j(x)\beta_j(y), \qquad x, y \in \mathbb{C}.$$

Then $f(z) = \sigma_L(z) \cdot \sigma_\Lambda(z) \cdot e^{Az^2+C}$, where L and Λ are lattices in $\mathbb{C}$, σ_L is the Weierstrass sigma function associated to the lattice L, and $A, C \in \mathbb{C}$.

Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН,
ул. Дзержинского 54,
680000, г. Хабаровск;
Тихоокеанский государственный университет,
Тихоокеанская, 136,
680035, Хабаровск, Россия
E-mail: illar_a@list.ru

Поступило 29 января 2018 г.