Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

М. Б. Дубашинский

О СПЕКТРЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗ ТОНКИХ РУЧЕК

§1. Введение

Пусть Ω – гиперболическая поверхность, то есть риманово многообразие вещественной размерности 2 с постоянной гауссовой кривизной -1; мы предполагаем, что поверхность Ω компактна и не имеет границы. Обозначим через g род поверхности Ω. Пусть Δ – оператор Бельтрами–Лапласа на Ω; он имеет чисто дискретный спектр, так как Ω компактна. Обозначим через $\lambda_j = \lambda_j(\Omega)$ собственное число оператора $-\Delta$ с номером j $(j = 0, 1, 2, \dots)$. Наш основной результат – следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$. Найдётся такая постоянная $c(r) > 0$, что если радиус инъективности поверхности Ω больше, чем r, то $\lambda_{\lceil \varepsilon g \rceil} \geqslant c(r) \cdot \varepsilon^2$ для всякого $\varepsilon \leqslant 2$.*

Всюду далее $c(r)$ обозначает любую положительную постоянную, зависящую только от r (но не от ε, g и Ω).

Предложение 8 (см. ниже) показывает, что наша оценка точна по порядку.

Теорема Отала и Розаса ([3]) утверждает, что $\lambda_{2g-2} > 1/4$ для любой поверхности Ω рода g. С другой стороны, для любых $\delta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ и $g = 2, 3, \dots$ найдётся гиперболическая поверхность Ω рода g, для которой $\lambda_{2g-3} < \delta$ и $\lambda_{2g-2+N} < 1/4 + \delta$. Выполнение этих неравенств связано с наличием на Ω тонких ручек, иначе говоря, с малостью радиуса инъективности поверхности Ω (см. [1]). Теорема 1 даёт нижнюю оценку на собственные числа при предположении о не слишком малом радиусе инъективности.

Благодарности. Задача была поставлена М. Мирзахани. Автор также благодарен П. Г. Зографу за введение в курс дела.

Ключевые слова: гиперболическая поверхность, собственные числа оператора Бельтрами–Лапласа, изопериметрическое неравенство Чигера–Яу.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

§2. Доказательство теоремы 1

Наше доказательство теоремы 1 – незначительная модификация рассуждения Бузера, приводящего к оценке $\lambda_{2g-2} \geqslant 10^{-12}$ (см. [1]), дополненная несложной леммой 7 о графах.

Напомним, что если $X \subset \Omega$ – множество положительной площади с кусочно-гладкой границей, то его *константа Чигера* – это

$$h(X) := \inf \frac{l(A)}{\min\{|B|, |B'|\}},$$

где A пробегает множество всех конечных объединений кусочно-гладких кривых на X, разрезающих X на два дизъюнктных подмножества B и B'. (Символ $l(A)$ обозначает длину A, а $|\cdot|$ – риманов объём на Ω.) Стандартное применение геометрического принципа минимакса в сочетании с изопериметрическим неравенством Чигера–Яу ([1], см. также [4, 5]) приводит к следующему заключению.

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что поверхность Ω представлена в виде объединения множеств $X_1, \ldots, X_k$ с кусочно-гладкими границами и дизъюнктными внутренностями. Тогда*

$$\lambda_k(\Omega) \geqslant \min_{j=1,\ldots,k} \frac{h^2(X_j)}{4}.$$

Подходящее разбиение поверхности Ω будет получено с помощью триангуляции контролируемого размера. Для этого напомним результат Бузера (теорема 4.5.2 в [1], см. также [2]).

Определение 3. Замкнутую область $D \subset \Omega$ будем называть *трёхсторонником*, если D – фигура одного из следующих двух типов.

1. D – односвязный вложенный в Ω геодезический треугольник (*обыкновенный треугольник*).
2. D – вложенная в Ω двусвязная область, ограниченная геодезическим циклом и двумя геодезическими дугами (*трёхсторонник-воротник*).

Геодезические компоненты границ трёхсторонника D будем называть его *сторонами*.

Теорема 4 (Бузер)**.** *Существует триангуляция поверхности Ω, состоящая из трёхсторонников с длинами сторон, не превосходящими* $\log 4$*, и площадями не меньше, чем* 0.19*, но и не больше, чем* 1.36*.*

Зафиксируем такую триангуляцию; обозначим через $\mathcal{T}_c$ и $\mathcal{T}_t$ соответственно множества трёхсторонников-воротников и обыкновенных треугольников из этой триангуляции. Кроме того, обозначим через $\mathcal{S}_c$ и $\mathcal{S}_a$ множества сторон нашей триангуляции, являющихся циклами и дугами соответственно. Наконец, пусть $\mathcal{N}$ – множество вершин триангуляции. В доказательстве теоремы 4 в [1] трёхсторонники из $\mathcal{T}_c$ имеют симметрии: именно, $\mathcal{S}_a$-стороны такого трёхсторонника имеют равные длины. Отсюда следует, что длины дуг из $\mathcal{S}_a$ ограничены снизу положительной абсолютной постоянной; кроме того, углы триангуляции также отделены от нуля положительной абсолютной константой. (Для $\mathcal{T}_t$-трёхсторонников эти оценки очевидны в силу ограничений на площадь, а вычисления для дуг и углов трёхсторонников-воротников проведены в [1].)

Лемма 5. *Если a_1, a_2 – две стороны триангуляции, не имеющие общей вершины, то расстояние* $\operatorname{dist}_\Omega(a_1, a_2)$ *отделено от нуля абсолютной постоянной $d_0 > 0$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что расстояние от каждого $c \in \mathcal{S}_c$ до любой другой стороны ограничено снизу универсальной постоянной – иначе площадь одного из $\mathcal{T}_c$-трёхсторонников вырождается.

Далее, *расстояния между вершинами триангуляции отделены от нуля абсолютной постоянной.* В самом деле, пусть U – метрический шар на Ω с центром в некоторой точке $v \in \mathcal{N}$. Если радиус этого шара достаточно мал, то для каждого $\tau \in \mathcal{T}_c \cup \mathcal{T}_t$ пересечение $U \cap \tau$ не может пересекать стороны триангуляции, кроме тех, которые исходят из v; это легко проверяется для обоих типов трёхсторонников, и из этого следует разделённость вершин из $\mathcal{N}$.

Теперь предположим, что γ – достаточно короткая геодезическая дуга, соединяющая a_1 и a_2; γ не может пересекать циклы из $\mathcal{S}_c$, так как эти циклы достаточно далеки от остальных сторон триангуляции. Предположим, что γ проходит через некоторый трёхсторонник $\tau \in \mathcal{T}_c \cup \mathcal{T}_t$. Тогда множество $\gamma \cap \tau$ расположено достаточно близко к некоторой вершине $v \in \mathcal{N}$ (так как углы триангуляции отделены от нуля). Так как точки из $\mathcal{N}$ разделены, то вся кривая γ расположена достаточно близко к некоторой вершине $v \in \mathcal{N}$, но тогда γ может соединять только стороны, исходящие из v. Доказательство закончено. □

Теперь оценим постоянные Чигера.

Лемма 6. *Пусть $X \subset \Omega$ – объединение N различных трёхсторонников из нашей триангуляции ($N = 1, 2, \dots$). Предположим, что X "связно", если считать два трёхсторонника смежными в случае, когда они имеют общую сторону.* (*Более формально, можно сказать, что внутренность множества X связна.*)

Тогда при ограничении снизу на радиус инъективности поверхности Ω верна оценка

$$h(X) \geqslant \frac{c(r)}{N}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть A, B, B' – множества из определения постоянной Чигера для X; имеем $A \neq \varnothing$, так как X связно. По лемме Яу, ([1], лемма 8.3.6, см. также [5]) мы можем считать, что B, B' связны. Если $l(A) \geqslant r$, то заметим, что $\min\{|B|, |B'|\} \leqslant 1.36 \cdot 1/2 \cdot N$, из чего следует (1). Далее, предположим, что A содержит цикл γ. Тогда γ гомотопен в Ω постоянному циклу (так как $l(A) < r$, а радиус инъективности поверхности Ω больше, чем r). Цикл γ тогда должен ограничивать в Ω компоненту площади не более, чем $l(\gamma)/h(\mathbb{H}) = l(\gamma)$ (хорошо известно, что постоянная Чигера всей плоскости Лобачевского $\mathbb{H}$ – это 1), и в этом случае мы также приходим к (1). Итак, предположим, что A не содержит циклов.

Можно с самого начала считать, что $r < d_0$, где d_0 – постоянная из леммы 5. Множество A – объединение кривых; пусть γ – одна из компонент связности в A. Тогда γ обязательно имеет концы (так как A не содержит циклов), и эти концы лежат на ∂X. Рассмотрим два таких конца, p_1 и p_2, и соединяющую их кривую $\gamma_1 \subset \gamma$. По лемме 5, p_1 и p_2 расположены либо на одной и той же стороне триангуляции, либо на различных сторонах, имеющих общую вершину; эта сторона или эти стороны лежат на ∂X. Но если Y – угол в $\mathbb{H}$ или полуплоскость в $\mathbb{H}$, то $h(Y) = 1$ (см., например, доказательство теоремы 8.1.2 в [1]). Отсюда и из условия на радиус инъективности, скажем, в точке p_1 следует оценка (1). □

Чтобы получить подходящее разбиение поверхности Ω, докажем несложную лемму о графах.

Лемма 7. *Пусть G – конечный связный неориентированный граф, степени вершин которого не превосходят 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Множество вершин графа G может быть разбито в дизъюнктное объединение $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_\alpha \sqcup V'$ (для некоторого $\alpha = 0, 1, 2, \dots$) так, что*:

1) *графы, индуцированные графом G на каждом множестве V_1, $V_2, \dots, V_\alpha$, V', связны;*
2) $2^k \leqslant |V_1|, |V_2|, \dots, |V_\alpha| \leqslant 2^{k+1} - 1$ *и* $0 \leqslant |V'| \leqslant 2^k$.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по числу вершин графа G; для пустого графа утверждение очевидно. Можно считать, что G – дерево. Выберем лист в G и назовём его корнем дерева G. Подвесим наш граф за этот корень. Теперь у каждой вершины, кроме корня, один родитель, и у каждой вершины не более двух детей.

Построим последовательность вершин $v_0, v_1, \dots, v_\beta$ в G (β далее будет некоторым неотрицательным числом). В качестве v_0 возьмём корень дерева G. Предположим, что вершина v_j выбрана и что v_l и v_r – её дети. Не умаляя общности, считаем, что полное число потомков вершины v_l больше либо равно, чем полное число потомков вершины v_r. Положим тогда $v_{j+1} := v_l$. Если v_j имеет только одного ребёнка, то возьмём его в качестве v_{j+1}; и, наконец, если у v_j нет детей, то остановим наш процесс и положим $\beta := j$, это обязательно случится на некотором шаге. Итак, мы построили последовательность вершин.

Теперь пройдём эту последовательность в обратном порядке (начиная с v_β и заканчивая v_0) и будем следить за полным числом потомков проходимых вершин. Если v_{j+1} имеет x потомков (считая саму эту вершину), то v_j имеет не более, чем $2x + 1$ потомка, снова считая саму эту вершину. Разберём два случая.

1. Найдётся вершина v_j, имеющая не менее, чем 2^k, но не более, чем $2^{k+1}-1$ потомков, считая её саму. Тогда в качестве V_1 возьмём множество, состоящее из v_j и всех её потомков. Вырежем их из G и применим предположение индукции для G без V_1.
2. $|G| < 2^k$. В этом случае в качестве V' возьмём всё множество вершин графа G.

□

Доказательство теоремы 1. Сперва предположим, что $\varepsilon g \leqslant 1$. Тогда нам надо показать, что $\lambda_1 > c(r)/g^2$; но, по теореме 2, для этого достаточно доказать, что $h(\Omega) > c(r)/g$. Взяв A из определения постоянной $h(\Omega)$, заключаем, что A должно содержать цикл; но в этом случае мы легко придём к требуемой оценке, рассуждая, как в аналогичном случае в доказательстве леммы 6 (напомним, что $|\Omega| = 2\pi(2g - 2)$).

Теперь предположим, что $\varepsilon g > 1$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $2^k \geqslant \dfrac{8\pi}{0.19 \cdot \varepsilon} \geqslant 2^{k-1}$, это можно сделать, так как $\varepsilon \leqslant 2$. Пусть G – граф триангуляции, полученной в теореме 4: именно, множество вершин графа G – это $\mathcal{T}_t \cup \mathcal{T}_c$, и два таких трёхсторонника смежны, если они имеют общую сторону. Применим лемму 7 к G, возьмём разбиение множества вершин графа G, доставляемое этой леммой, и рассмотрим соответствующее разбиение нашей поверхности: $\Omega = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_\alpha \cup X'$ при некотором $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Так как трёхсторонники имеют площади не менее, чем 0.19, то $|X_j| \geqslant 2^k \cdot 0.19$ при всех $j = 1, 2, \dots, \alpha$. Поэтому

$$\alpha \leqslant \frac{|\Omega|}{2^k \cdot 0.19} < \frac{4\pi g}{2^k \cdot 0.19} \leqslant \frac{\varepsilon g}{2} \leqslant \lceil \varepsilon g \rceil - 1.$$

Значит, $\alpha + 1 \leqslant \lceil \varepsilon g \rceil$. По лемме 6, $h(X_j), h(X') \geqslant c(r)/2^k$ при всех j. Это неравенство и теорема 2 приводят к требуемой оценке. $\square$

Наконец, покажем точность нашей оценки (можно считать, что ε – это $1/k$).

Предложение 8. *Для каждых $k, l \in \mathbb{N}$ найдётся гиперболическая поверхность Ω рода $kl + 1$, радиус инъективности которой отделён от нуля универсальной постоянной, такая, что $\lambda_{l-1}(\Omega) \leqslant C/k^2$, где постоянная $C < +\infty$ также абсолютна.*

Доказательство. Пусть P – фиксированные гиперболические штаны, граница которых состоит из трёх геодезических циклов длины 1 (существование и единственность таких штанов хорошо известна). Пусть $P_1, \dots, P_{2k}$ – копии этих штанов. Обозначим через $\gamma_1(P_j)$, $\gamma_2(P_j)$, $\gamma_3(P_j)$ компоненты границы штанов P_j, $j = 1, 2, \dots, 2k$. При $j = 1, 2, \dots, k$ приклеим $\gamma_2(P_{2j-1})$ к $\gamma_2(P_{2j})$, а также $\gamma_3(P_{2j-1})$ к $\gamma_3(P_{2j})$. Далее, при $j = 1, 2, \dots, k-1$ приклеим $\gamma_1(P_{2j})$ к $\gamma_1(P_{2j+1})$. Обозначим через Q полученную поверхность; это гиперболическая поверхность с границей, образованной двумя замкнутыми геодезическими длины 1. Найдётся соболевская функция $f : Q \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям: во-первых, $f = 0$ на ∂Q; во-вторых, f принимает значения в $[j-1, j]$ на P_j и на P_{2k-j+1} при $j = 1, 2, \dots, k$; в-третьих, $|\operatorname{grad} f|$ не превосходит некоторой абсолютной постоянной, где grad – метрический градиент. (Чтобы построить такую функцию, достаточно сделать её подходящей постоянной на каждой из компонент границ штанов и далее проинтерполировать её во внутренность штанов.) Теперь возьмём l копий поверхности Q и склеим их в циклическом порядке; полученная таким образом гиперболическая поверхность Ω не будет иметь края. Тогда род Ω равен $kl+1$. Более того, можно выбрать соболевские функции $f_1, f_2, \dots, f_l \colon \Omega \to \mathbb{R}$ с дизъюнктными носителями так, что $\int_\Omega f_j^2 \geqslant c_1 \cdot k^3$, $\int_\Omega |\operatorname{grad} f_j|^2 \leqslant c_2 \cdot k$ (постоянные c_1, c_2 абсолютны). По геометрическому принципу минимакса, этого достаточно для требуемой оценки на собственные числа. Радиус инъективности поверхности Ω отделён от нуля, так как это верно для каждых штанов. $\square$

Список литературы

1. P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser (2010; репринт издания 1992 г.).
2. P. Buser, *Cubic graphs and the first eigenvalue of a Riemann surface.* — Math. Z. **162** (1978), 87–99.
3. J.-P. Otal, E. Rosas, *Pour toute surface hyperbolique de genre g,* $\lambda_{2g-2} > 1/4$. — Duke Math. J. **150**, No. 1 (2009), 101–115.
4. J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, in: Problems in analysis, a symposium in honor of S. Bochner, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1970), 195–199.
5. S.-T. Yau, *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **8**, No. 4 (1975), 487–507.

Dubashinskiy M. B. On the spectra of hyperbolic surfaces without thin handles.

We obtain a sharp lower estimate on eigenvalues of Laplace–Beltrami operator on a hyperbolic surface with injectivity radius bounded from the below.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
Санкт-Петербургский государственный университет
14 линия В.О., дом 29Б, Санкт-Петербург
199178, Россия
E-mail: mikhail.dubashinskiy@gmail.com

Поступило 18 апреля 2018 г.