Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

**М. Б. Дубашинский**

# О МАЛОСТИ ФУНКЦИИ КЛАССА ПЭЛИ–ВИНЕРА ВБЛИЗИ ЕЕ ЦЕЛЫХ НУЛЕЙ

Мы отвечаем на вопрос, поставленный А. И. Буфетовым. Пусть $\mathrm{PW}_\pi \subset L^2(\mathbb{R})$ – обычное пространство Пэли–Винера, состоящее из преобразований Фурье функций класса $L^2(\mathbb{R})$, исчезающих вне $[-\pi,\pi]$. (Мы определяем *унитарное* преобразование Фурье функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ так: $\hat{g}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x)\,dx$. Подробнее о пространстве Пэли–Винера см., напр., [1].) Наш основной результат – следующее утверждение в духе принципа неопределённости.

**Теорема 1.** *Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, а функция $f \in \mathrm{PW}_\pi$ исчезает на $\mathbb{Z}\setminus E$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus U_1(E)} |f|^2 \le C \cdot \int\limits_{U_1(E)} |f|^2.$$

*Здесь постоянная $C < +\infty$ абсолютна, а $U_1(E)$ – 1-окрестность множества $E$ в $\mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Оценка основана на том, что $⨍ \sin^2 = 1/2 < 1$. Система $\left\{\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – образ ортонормированного базиса в $L^2[-\pi,\pi]$ под действием унитарного преобразования Фурье и потому также образует ортонормированный базис в $\mathrm{PW}_\pi \subset L^2(\mathbb{R})$. По тем же соображениям, $\left\langle f, \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = f(k)$; иначе говоря, функция $\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}$ – *воспроизводящее ядро* функционала "значение в точке $k$" в $\mathrm{PW}_\pi$. Отсюда следует, что функция $f$ из условия допускает разложение

$$f(x) = \sum_{k\in E} \frac{a_k \cdot \sin(\pi x)}{\pi(x-k)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

*Ключевые слова*: класс Пэли–Винера, принцип неопределённости.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

для некоторых $a_k \in \mathbb{C}$. Поэтому достаточно доказать оценку вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}\smallsetminus U_1(E)} |f|^2 \le (1-\varepsilon)\cdot \sum_{k\in E} |a_k|^2$$

с некоторым $\varepsilon > 0$, не зависящим ни от $E$, ни от $f$. Пусть

$$E' = \{l \in \mathbb{Z} : \operatorname{dist}(l + 1/2, E) > 1\};$$

имеем $E \cap E' = \varnothing$. Мы будем рассматривать разные операторы с областью задания $\ell^2(E)$ и со значениями в $L^2(\mathbb{R}\smallsetminus U_1(E))$ или в $\ell^2(E')$. Положим

$$K_1(x,k) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi\cdot(x-k)}, \quad x \in \mathbb{R}\smallsetminus U_1(E),\ k\in E.$$

Далее, пусть

$$K_2(x,k) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\cdot\frac{1}{[x]-k}, \quad x \in \mathbb{R}\smallsetminus U_1(E),\ k\in E.$$

Пусть

$$T_{K_j}\colon \ell^2(E) \to L^2(\mathbb{R}\smallsetminus U_1(E))$$

– операторы, порождённые соответствующими ядрами $K_j$. Нам нужно показать, что $\|T_{K_1}\| < 1$. Для этого оценим $T_{K_2}(\{a_k\}_{k\in E})$ и $(T_{K_1} - T_{K_2})(\{a_k\}_{k\in E})$.

Начнём с $T_{K_2}$. При $k \in E$, $l \in E'$ положим $\tilde K_2(l,k) := \dfrac{1}{l-k}$. Пусть $x \in \mathbb{R}\smallsetminus U_1(E)$. Тогда $x \in (l, l+1)$ при некотором $l \in E'$. Пусть $b_l = \sum\limits_{k\in\mathbb{E}} \tilde K_2(l,k)a_k$, то есть вектор $\{b_l\}_{l\in E'}$ получается из вектора $\{a_k\}_{k\in E}$ умножением на матрицу $\big(\tilde K_2(l,k)\big)_{l\in E',k\in E}$. Видно, что эта матрица – подматрица матрицы Тёплица

$$\begin{pmatrix}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots\\
\cdots & 0 & -1 & -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/5 & \cdots\\
\cdots & 1 & 0 & -1 & -1/2 & -1/3 & -1/4 & \cdots\\
\cdots & 1/2 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & -1/3 & \cdots\\
\cdots & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & \cdots\\
\cdots & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & -1 & \cdots\\
\cdots & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & \cdots\\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.$$

*Норма последней матрицы как оператора* $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *равна* $\pi$. Действительно, этот оператор – свёрточный и исследуется с помощью преобразования Фурье; символ этой матрицы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\zeta^{-k}-\zeta^{k}}{k}\right)$ равен $\pi - t$ при $\zeta = e^{it}, t \in (0, 2\pi)$. Таким образом, имеем

$$\sum_{l\in E'} |b_l|^2 \le \pi^2 \cdot \sum_{k\in E} |a_k|^2.$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus U_1(E)} |T_{K_2}(\{a_k\}_{k\in E})|^2 = \sum_{l\in E'} |b_l|^2 \cdot \int\limits_{l}^{l+1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)^2 dx \le \frac{\|\{a_k\}_{k\in E}\|^2_{\ell^2(E)}}{2}.$$

Итак, мы доказали, что $\|T_{K_2}\| \le 1/\sqrt{2}$. Поэтому нам осталось получить оценку вида $\|T_{K_1} - T_{K_2}\| < C$, где постоянная $C < 1 - 1/\sqrt{2}$ не зависит от $E$. Оператор $T_{K_1} - T_{K_2} \colon \ell^2(E) \to L^2(\mathbb{R} \setminus U_1(E))$ имеет ядро

$$K_3(x,k) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{x-k} - \frac{1}{[x]-k}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus U_1(E),\ k \in E.$$

Наша цель – применить простейший тест Шура:

*пусть* $(X,\mu)$, $(Y,\nu)$ *– пространства с мерами, а оператор*

$$T \colon L^2(X,\mu) \to L^2(Y,\nu)$$

*имеет измеримое ядро* $K(x,y)$; *предположим, что нашлись* $C_1, C_2 < +\infty$, *для которых*

$$\int\limits_X |K(x,y)|\, d\mu(x) < C_2 \quad \textit{при почти всех} \ \ y \in Y$$

*и*

$$\int\limits_Y |K(x,y)|\, d\nu(y) < C_1 \quad \textit{при почти всех} \ \ x \in X;$$

*тогда* $\|T\|_{L^2(X,\mu)\to L^2(Y,\nu)} \le \sqrt{C_1 C_2}$.

Сперва при фиксированном $k \in E$ оценим $\int\limits_{\mathbb{R}\setminus U_1(E)} |K_3(x,k)|\, dx$. Имеем

$$|K_3(x,k)| = \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi} \cdot \frac{\{x\}}{(k-x)\cdot(k-[x])}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus U_1(E)} |K_3(x,k)|\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[k-1,k+1]} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi}\cdot\frac{\{x\}}{(k-x)\cdot(k-[x])}\,dx.$$

Вычислим последний интеграл; не умаляя общности, считаем, что $k=0$. Тогда этот интеграл равен

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi}\left(\frac{\{x\}}{x\cdot[x]}+\frac{1-\{x\}}{x\cdot\lceil x\rceil}\right)dx$$

$$= \int\limits_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\sin(\pi t)|}{\pi}\cdot\left(\frac{t}{(m+t)m}+\frac{1-t}{(m+t)(m+1)}\right)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\sin(\pi t)|}{\pi}\cdot\frac{1}{m(m+1)}\,dt = \frac{2}{\pi^2}.$$

(Мы подставили $x=m+t$, $t\in[0,1)$, $m=1,2,\dots$.)

Теперь при фиксированном $x\in\mathbb{R}\setminus U_1(E)$ оценим $\sum\limits_{k\in E}|K_3(x,k)|$. Последняя сумма не больше, чем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus U_1(x)} |K_3(x,k)|. \tag{1}$$

Достаточно провести оценку при $x\notin\mathbb{Z}$. Можно, не умаляя общности, считать, что $x\in(0,1)$. Тогда сумма (1) принимает вид

$$\frac{x\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k-x)}+\frac{1}{k(k+x)}\right)\right)$$

$$= \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{x}{x+1}+x\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-x^2}\right). \tag{2}$$

Используя известное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-x^2}=\frac{1-\pi x\operatorname{ctg}(\pi x)}{2x^2}$$

(см., например, [2]) и монотонность сомножителей в последнем выражении в (2) на $(0,1/2)$ и на $(1/2,1)$, с помощью вычисления можно установить, что величина (2) не превосходит $1.3/\pi$.

Итак, применяя тест Шура, имеем

$$\|T_{K_1} - T_{K_2}\| \le \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1.3}{\pi}}$$

и

$$\|T_{K_1}\| \le \sqrt{\frac{2.6}{\pi^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.9966... < 1,$$

что завершает доказательство. □

## Список литературы


1. L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Том 2, М., Наука, 1974.



Dubashinskiy M. B. On the smallness of a Paley–Wiener function near its integer zeroes.

An arbitrary function in the Paley–Wiener class vanishing on a subset of $\mathbb{Z}$ fails to be concentrated in the vicinity of this subset.



Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербургский государственный университет,
14 линия В. О., дом 29Б,
Санкт-Петербург, 199178, Россия
*E-mail*: mikhail.dubashinskiy@gmail.com


Поступило 26 июня 2018 г.