

М. Г. Григорян

**ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ  
ФУРЬЕ–ХААРА В МЕТРИКЕ  $L^p(0, 1)$ ,  $0 < p < 1$**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению абсолютной сходимости рядов Фурье по системе Хаара в пространствах  $L^p(0, 1)$ ,  $0 < p < 1$ , с точки зрения классических теорем Н. Н. Лузина [1] и Д. Е. Меньшова [2–4] об исправлении функций.

Напомним следующие обозначения и определения. Пусть  $p \in (0, \infty)$  и пусть  $L^p[0, 1]$  – класс всех определенных на  $[0, 1]$  измеримых функций  $f(x)$  с  $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ .

Коэффициенты Фурье функции  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $p \geq 1$ , по системе Хаара  $\{h_k(x)\}_{k=0}^\infty$  (см. [5]) обозначим через

$$c_k(f) := \int_0^1 f(t)h_k(t) dt. \quad (1.1)$$

Пусть

$$\text{спес}(f) := \{k, \quad c_k(f) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \quad (1.2)$$

Под  $\|f\|_\infty$  понимаем  $\sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}$ . Мету Лебега измеримого множества  $E$  обозначим через  $|E|$ .

**Определение 1.** *Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$  ( $f_n \in L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) называется безусловно сходящимся к  $f(x)$  в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, \infty)$ , если для любой перестановки  $\{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$  натуральных чисел ряд  $\sum_{k=1}^\infty f_{\sigma(k)}(x)$  сходится к  $f(x)$  в метрике  $L^p[0, 1]$ ,*

---

*Ключевые слова:* система Хаара, модификация функций, абсолютная сходимость в метрике  $L^p(0, 1)$ ,  $0 < p < 1$ .

т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right|^p dx = 0.$$

**Определение 2.** *Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ( $f_n \in L^p[0, 1]$ ,  $p \in [0, \infty]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) называется абсолютно сходящимся к  $f(x)$  в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, \infty)$ , если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится к  $f(x)$  в метрике  $L^p[0, 1]$  и*

$$\int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p dx < \infty.$$

Напомним, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Лузину (см. [1]).

Им в 1912 г. был получен знаменитый результат, согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию. В 1939 г. Д. Е. Меньшов [2] доказал следующую фундаментальную теорему.

**Теорема (Усиленное  $C$ -свойство).** *Пусть  $f(x)$  измеримая функция, конечная почти всюду на  $[0, 2\pi]$ . Каково бы ни было  $\epsilon > 0$ , можно определить непрерывную функцию  $g(x)$ , совпадающую с  $f(x)$  на некотором множестве  $E$ ,  $|E| > 2\pi - \epsilon$ , и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на  $[0, 2\pi]$ .*

В работе [6] С. В. Кисляков доказал аналог теоремы Меньшова для произвольной локально компактной абелевой группы конечной топологической размерности. Им получен также следующий результат (см. [7]).

**Теорема (С. В. Кисляков).** *Пусть  $f(x) \in L^\infty[0, 2\pi]$ . Каково бы ни было  $\delta > 0$ , можно определить непрерывную функцию  $g(x)$ , такую, что*

$$|\{x : f(x) \neq g(x)\}| < \delta,$$

ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на  $[0, 2\pi]$  и

$$\|g\|_U = \sup \left\{ \left| \sum_{k=n}^m \widehat{g}(k) \zeta^k \right|; n, m \in \mathbb{Z}; |\zeta| = 1 \right\} < \text{const} \left( \ln \frac{1}{\delta} \right) \|f\|_{L^\infty}.$$

Далее в этом направлении интересные результаты получены в работах [8–19]. Ряд работ [20–24] был посвящен теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера) монотонно убывали. Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к утверждениям, полученным в настоящей работе.

В работе [8] автору удалось доказать, что тригонометрическая система обладает усиленным  $L^1$ -свойством для суммируемых функций.

**Теорема 1** (Усиленное  $L^1$ -свойство). *Для любого  $\epsilon > 0$  существует измеримое множество  $E$  с мерой  $|E| > 2\pi - \epsilon$  такое, что для каждой функции  $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$  можно найти функцию  $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$ , совпадающую с  $f(x)$  на  $E$  и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по  $L^1[0, 2\pi]$ -норме.*

Более того, на вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым – обладает ли произвольная ортонормированная система усиленным  $L^1$ -свойством, – автор дал положительный ответ (см. [9] и [10]). Для системы Хаара в работе [11] доказана следующая теорема.

**Теорема** (Ф. Г. Арутюнян). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на  $[0, 1]$  функции  $f(x)$  и для любого числа  $0 < \epsilon < 1$  можно найти функцию  $\tilde{f} \in L^2[0, 1]$ ,  $|\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}| < \epsilon$ , так, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на  $[0, 1]$ .*

В работе [26] доказано, что безусловная и абсолютная сходимость почти всюду рядов Хаара  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$  эквивалентны (где  $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  – система Хаара и  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность действительных чисел).

Точнее, верно следующее утверждение.

**Теорема** (Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов). *Для безусловной сходимости почти всюду на множестве  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 0$  ряда*

Хаара  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k(x)$  необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на множестве  $E$  была конечна сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k h_k(x)| < \infty$ .

Отметим, что картина совсем иная в случае сходимости в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, 2]$ .

В самом деле, нетрудно видеть, что ряд Фурье функции

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \frac{1}{k 2^{\frac{k}{2}}} h_{2^k+m}(x) \in L^2[0, 1], \quad (1.3)$$

по системе Хаара сходится безусловно во всех метриках  $L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, 2]$ , однако

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^N |c_n(f) h_n(x)| \right)^p dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)^p = \infty, \quad p \in (0, 2].$$

В этой работе доказывается следующий факт.

**Теорема 2.** Для любого  $0 < \epsilon < 1$  существует измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 1 - \epsilon$  такое, что для каждой функции  $f \in L^1[0, 1]$  можно найти функцию  $g \in L^1[0, 1]$ , совпадающую с  $f$  на  $E$  и такую, что ее ряд Фурье-Хаара абсолютно сходится в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $0 < p < 1$ , все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции  $g$  по системе Хаара расположены в убывающем порядке и

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g) |h_n(x)| \right)^p dx \leq \frac{2^{3-p}}{2^{1-p} - 1} \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right).$$

Легко видеть, что из этой теоремы следует ещё и такой результат.

**Теорема 3.** Для любого  $0 < \epsilon < 1$  существует измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 1 - \epsilon$  такое, что для каждой функции  $f \in L^1[0, 1]$  можно найти функцию  $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ , совпадающую с  $f$  на  $E$  и такую, что ее ряд Фурье-Хаара безусловно сходится к ней как в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $0 < p < 1$ , так и почти всюду на  $[0, 1]$ , и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции  $\tilde{f}$  по системе Хаара расположены в убывающем порядке.

В связи с этой теоремой отметим, что А. М. Олевский [16] построил пример функции  $f \in L^\infty[0, 1]$ , ряд Фурье которой по системе Хаара расходится почти всюду на  $[0, 1]$  после некоторой перестановки.

**Замечание 1.** Необходимо отметить, что как в теоремах Д. Е. Меньшова и С. В. Кислякова, так и в теореме Ф. Г. Арутюняна “исключительное” множество  $e$ , на котором происходит изменение функции  $f(x)$ , зависит от функции, а в теореме 1 и в теоремах 2 и 3, доказанных в настоящей статье, это исключительное множество не зависит от исправляемой функции, оно универсально, т.е. обслуживает целый функциональный класс.

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что теорема 2 неверна для тригонометрической системы.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

**Вопрос 1.** Верна ли теорема 3 в случае  $p = 1$ ?

**Вопрос 2.** Можно ли в теореме 1 исправленную функцию  $g(x)$  выбрать так, чтобы ее ряд Фурье по тригонометрической системе безусловно сходилась по  $L^1[0, 2\pi]$ -норме (хотя бы в метрике  $L^p[0, 2\pi]$ ,  $0 < p < 1$ , или по мере)?

**Вопрос 3.** Для каждой функции  $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$  и для любого  $\epsilon > 0$ , можно ли найти функцию  $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$  с  $|\{x : g(x) \neq f(x)\}| < \epsilon$  так, чтобы ее ряд Фурье по тригонометрической системе безусловно сходилась почти всюду на  $[0, 2\pi]$ ?

**Вопрос 4.** Для каждой функции  $f(x) \in L^1[0, 1]$  и для любого  $\epsilon > 0$ , можно ли найти функцию  $g(x) \in L^1[0, 1]$  с  $|\{g(x) \neq f(x), x \in [0, 1]\}| < \epsilon$  так, чтобы последовательность коэффициентов (или модулей коэффициентов) разложения функции  $g(x)$  по классическим системам (по тригонометрической системе, по системе Франклина и Хаара) была бы монотонно убывающей?

В связи с этим вопросом отметим, что в случае системы Хаара исправленную функцию  $\tilde{f}$ , когда исключительное множество  $e$ , на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции  $f(x)$ , невозможно выбрать так, чтобы для коэффициентов Фурье–Хаара функции  $\tilde{f}$  выполнялись неравенства

$$c_m(\tilde{f}) \geq c_{m+1}(\tilde{f}), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Это следует из следующей теоремы, доказанной в работе [27].

**Теорема** (П. Л. Ульянов). Пусть последовательность положительных чисел  $\{a_i\}$  такова, что

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{для всех натуральных } n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Если ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$$

сходится на множестве положительной меры к функции  $f$ , то функция  $|f|$  интегрируема в любой степени  $q \in [1, \infty)$ .

Действительно, согласно этой теореме, для любого множества  $E \subset [0, 1]$  с  $|E| > 0$ , если выбрать функцию  $f$  таким образом, чтобы имело место соотношение  $\int_E f^2(t) dt = \infty$ , то ни для какой функции  $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ , совпадающей с  $f$  на  $E$ , последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции  $\tilde{f}$  не может монотонно стремиться к нулю.

Но тем не менее, в теоремах 2 и 3 все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье исправленной функции  $\tilde{f}$  расположены в убывающем порядке.

Отметим также, что в работе [28] доказано, что для системы Уолша вопрос 4 имеет положительный ответ, более того, доказано, что для любого  $0 < \epsilon < 1$  существуют измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 1 - \epsilon$  и функция  $g \in L^1[0, 1]$  с

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

такие, что для каждой функции  $f \in L^1[0, 1]$  можно найти функцию  $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ , совпадающую с  $f$  на  $E$ , такую, что ряд Фурье–Уолша функции  $\tilde{f}(x)$  сходится по норме  $L^1[0, 1]$  и все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша удовлетворяют условию

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## §2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Напомним определение системы Хаара  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ , нормированной в  $L^2$  (см., например, [5]).

Возьмем  $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = (0, 1)$ ,  $h_0(x) = h_0^{(0)}(x) = \chi_{(0,1)}$ , и

$$h_1(x) = h_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ -1 & \text{при } x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

где  $\chi(E)$  – характеристическая функция множества  $E$ .

Пусть  $n = 2^k + i$ ,  $0 < i \leq 2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\Delta_n = \Delta_k^{(i)} = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ . Тогда  $h_n(x)$  – функция системы Хаара – определяется следующим образом

$$h_n(x) = h_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}-1} & \text{при } x = \frac{i-1}{2^k}, \\ 2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x \in (\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}), \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x \in (\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}), \\ -2^{\frac{k}{2}-1} & \text{при } x = \frac{i}{2^k}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Значения функции в точках  $\{0, 1\}$  определяются как односторонний предел в этих точках (соответственно правый и левый).

Отметим, что система Хаара является базисом во всех  $L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и безусловным базисом в  $L^p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ .

**Лемма 1.** Пусть даны числа  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $N_0 > 1$ ,  $q > 2$ ,  $\delta \in (0, 1)$  и интервал Хаара  $\Delta = [\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu}]$ ,  $i \in [1, 2^\nu]$ . Тогда существуют измеримое множество  $E \subset \Delta$  и полином по системе Хаара вида

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k h_k(x)$$

такие, что

$$(1) \quad \int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2|\gamma||\Delta|,$$

$$(2) \quad Q(x) = \gamma, \quad x \in E,$$

$$(3) \quad |E| = (1 - 2^{-q})|\Delta|,$$

$$(4) \quad \sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| < 2^q |\gamma|, x \in \Delta, \quad \sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| = 0, x \in [0, 1] \setminus \Delta,$$

$$(5) \quad 0 \leq a_k < \delta,$$

и ненулевые коэффициенты в  $\{a_k\}_{k=N_0}^N$  расположены в убывающем порядке,

$$(6) \quad \int_{\Delta} \left( \sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| \right)^p dx < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} |\gamma|^p |\Delta| \quad \text{для всех } p \in (0, 1).$$

**Доказательство леммы 1.** Пусть  $\{l_i\}$  – подпоследовательность натуральных чисел с

$$l_{i+1} - l_i \geq 2, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

$$l_1 \geq 2 \log_2 \frac{|\gamma|}{\delta} + \nu. \quad (2.3)$$

Определим полином  $Q_1$ , полагая

$$Q_1 = 2^{-\frac{l_1}{2}} |\gamma| \sum_{s (\Delta_{l_1}^{(s)} \subset \Delta)} h_{l_1}^{(s)}.$$

Полином  $Q_1$  на интервале  $\Delta$  принимает значения  $\gamma$  и  $-\gamma$ . Через  $E_1$  обозначим множество, на котором  $Q_1$  равняется  $-\gamma$ . По индукции определим полиномы  $Q_2, Q_3, \dots, Q_q$  и множества  $E_2, E_3, \dots, E_q$  следующим образом:

$$Q_{i+1} = 2^{i-\frac{l_{i+1}}{2}} |\gamma| \sum_{s (\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i)} h_{l_{i+1}}^{(s)}(x), \quad (2.4)$$

$$E_{i+1} = \{t \in E_i : Q_{i+1}(t) \neq 2^i \gamma\}. \quad (2.5)$$

Ясно, что

$$|Q_{i+1}(x)| = 2^{i-\frac{l_{i+1}}{2}} |\gamma| \sum_{s (\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i)} |h_{l_{i+1}}^{(s)}(x)| = \begin{cases} 2^i |\gamma|, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i. \end{cases}, \quad (2.6)$$

$$|E_1| = \frac{|\Delta|}{2} \quad \text{и} \quad |E_{i+1}| = \frac{|E_i|}{2} \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (2.7)$$

и

$$\Delta = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \dots \supset E_q. \quad (2.8)$$

Определим множество  $E$  и полином  $Q$  следующим образом:

$$E = \Delta \setminus E_q, \quad (2.9)$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^q Q_i(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k h_k(x) \quad (\text{см. (1.4), (2.3), (2.4)}), \quad (2.10)$$



где

$$a_k = \int_0^1 Q(x) h_k(x) dx.$$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты в разложениях полиномов  $Q_i$  неотрицательны, поэтому неотрицательными будут и коэффициенты  $a_k$ . Все ненулевые коэффициенты полинома  $Q_i$  равняются  $2^{i-1-\frac{i_i}{2}} |\gamma|$ , а согласно (2.2) имеем

$$2^{i-1-\frac{i_i}{2}} |\gamma| \geq 2^{i-\frac{i_1+i}{2}} |\gamma|,$$

поэтому все ненулевые числа в  $\{a_k\}_{k=N_0}^N$  расположены в убывающем порядке.

Для окончания доказательства первого пункта леммы остается заметить, что

$$2^{i-\frac{i_1+i}{2}} |\gamma| \leq 2^{-\frac{i_1}{2}} |\gamma| < \delta,$$

где мы воспользовались неравенством (2.3).

Из (2.7) и (2.9) непосредственно следует, что

$$|E| = (1 - 2^{-q})|\Delta|.$$

А согласно (2.4)–(2.8) и (2.10) получаем

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{на } \Delta \setminus E_q, \\ -(2^q - 1)\gamma & \text{на } E_q, \\ 0 & \text{вне } \Delta, \end{cases}$$

$$\int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2|\gamma||\Delta|,$$

$$\sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| = \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| < 2^q |\gamma|, \quad x \in \Delta,$$

$$\sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| = 0, \quad x \in [0, 1] \setminus \Delta.$$

Учитывая соотношения (2.4)–(2.8), для всех  $p \in (0, 1)$  будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Delta} \left( \sum_{k=N_0}^N a_k |h_k(x)| \right)^p dx \\
 &= \sum_{s=0}^{q-1} \int_{E_s \setminus E_{s+1}} \left( \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| \right)^p dx + \int_{E_q} \left( \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| \right)^p dx \\
 &= \sum_{s=0}^{q-1} \int_{E_s \setminus E_{s+1}} \left( \sum_{i=1}^s |Q_i(x)| \right)^p dx + \int_{E_q} \left( \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| \right)^p dx \\
 &\leq |\gamma|^p \sum_{s=0}^q 2^{sp} \frac{|\Delta|}{2^s} < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} |\gamma|^p |\Delta|. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть даны числа  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \epsilon, \delta < 1$ , и полином  $f(x)$  по системе Хаара. Тогда можно найти измеримое множество  $E \subset [0, 1]$ , функцию  $g$  и полином по системе Хаара вида

$$Q = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k h_{n_k}, \quad n_k \nearrow,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1)  $|E| > 1 - \epsilon$ ,
- 2)  $g(x) = f(x)$  для всех  $x \in E$ ,
- 3)  $\int_0^1 |g(x)| dx < 2 \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)$ ,
- 4)  $\int_0^1 |Q(x) - g(x)| dx < \delta$ ,
- 5)  $\delta > a_k > a_{k+1} > 0$ ,  $k \in (k_0, \bar{k})$ ,
- 6)  $\int_0^1 \left| \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \right|^p dx < \frac{2^{2-p}}{2^{1-p}-1} \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^p$   
для всех  $p \in (0, 1)$ .

**Доказательство леммы 2.** Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x) \quad (\text{где } \Delta_k \text{ имеют вид } \Delta_m^{(i)}), \quad [0, 1] = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} \Delta_\nu. \quad (2.11)$$

Положим

$$q = \left[ \log_2 \left( \epsilon^{-1} \int_0^1 |f(x)| dx \right) \right] + 1. \quad (2.12)$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить множества  $E_\nu \subset \Delta_\nu$  и полиномы вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} h_{n_k}(x), \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu_0, \quad m_0 = k_0 + 1, \quad (2.13)$$

которые для всех  $1 \leq \nu \leq \mu_0$  удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| = 0, \quad x \notin \Delta_\nu, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \delta > a_{m_{\nu-2}}^{(\nu-1)} \geq \dots \geq a_k^{(\nu-1)} \geq a_{k+1}^{(\nu-1)} \geq \dots \geq a_{m_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)} \\ & > a_{m_{\nu-1}}^{(\nu)} \dots \geq a_k^{(\nu)} \geq a_{k+1}^{(\nu)} \geq \dots \geq a_{m_\nu-1}^{(\nu)} > 0, \quad 1 \leq \nu \leq \mu_0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$|E_\nu| = (1 - 2^{-q}) |\Delta_\nu|, \quad (2.16)$$

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x)| dx < 2 |\gamma_\nu| |\Delta_\nu|, \quad (2.18)$$

$$\int_{\Delta_\nu} \left( \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \leq \frac{2^{1-p}}{2^{1-p} - 1} |\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu|, \quad p \in (0, 1), \quad (2.19)$$

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| < 2^q |\gamma|, \quad x \in \Delta,$$

$$\sum_{k=N_0}^N a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| = 0, \quad x \in [0, 1] \setminus \Delta. \quad (2.20)$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x), \quad (2.21)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} E_\nu, \quad (2.22)$$

$$Q(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k h_{n_k}(x), \quad \bar{k} = m_{\mu_0} - 1, \quad (2.23)$$

где

$$a_k = b_k + \frac{\frac{1}{2} \inf_{0 < p \leq 1} \left\{ \frac{\epsilon \delta}{2}, \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}}{2^k \max_{x \in [0,1]} |h_{n_{\bar{k}}}(x)|}, \quad k \in (k_0, \bar{k}] \quad (2.24)$$

и

$$b_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in [m_{\nu-1}, m_\nu), \quad \nu \in [1, \mu_0]. \quad (2.25)$$

Из (2.11), (2.12), (2.17) и (2.21)–(2.23) вытекает, что

$$g(x) = f(x) \text{ при } x \in E,$$

$$|E| > 1 - \epsilon.$$

В силу (2.13), (2.15), (2.17)–(2.19) и (2.23)–(2.25), получим

$$\frac{1}{2} \left( \int_0^1 |f(x)| dx \right) \leq \int_0^1 |g(x)| dx < 2 \int_0^1 |f(x)| dx,$$

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)| dx < \delta, \quad \delta > a_k > a_{k+1} > 0, \quad k \in (k_0, \bar{k}).$$

Учитывая соотношения (2.11), (2.19) и (2.23)–(2.25), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left( \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \\
& \leq \int_0^1 \left( \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} b_k |h_{n_k}(x)| \right)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p dx}{2} \\
& \quad \times \int_0^1 \left( \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} \frac{1}{2^k \max_{x \in [0,1]} |h_{n_k}(x)|} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \\
& \leq \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_\nu} \left( \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} b_k |h_{n_k}(x)| \right)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p dx}{2} \\
& = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta_\nu} \left( \sum_{k=m_\nu-1}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p dx}{2} \\
& \leq \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \sum_{\nu=1}^{\mu_0} |\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu| + \frac{\int_0^1 |f(x)|^p dx}{2} \\
& \leq 2 \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 |f(x)|^p dx. \quad \square
\end{aligned}$$

**Замечание 3.** Из доказательства леммы 2 видно, что функция  $g(x)$  и полином  $Q(x)$  удовлетворяют также условиям

$$\|Q(x) - g(x)\|_\infty < \delta, \quad \left\| \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \right\|_\infty < \frac{2\|f\|_\infty}{\epsilon}.$$

### §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

**Доказательство.** Пусть  $\epsilon > 0$  и  $p \in (0, 1)$ . Обозначив через

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по системе Хаара с рациональными коэффициентами и последовательно применив лемму 2, можем найти последовательности функций  $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , множеств  $\{E_n\}$  и полиномов

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} h_{s_k}(x), \quad m_n \nearrow, s_k \nearrow, m_0 = 0, \quad (3.2)$$

которые для всех  $n \geq 1$  удовлетворяют условиям:

$$\bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad (3.3)$$

$$|E_n| > 1 - 2^{-n-2}, \quad (3.4)$$

$$\int_0^1 |\bar{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad (3.5)$$

$$\int_0^1 \left| \bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x) \right| < 2^{-8(n+1)p^{-1}} \lambda, \quad \text{где } \lambda = \min \left\{ \left( \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; 1 \right\}, \quad (3.6)$$

$$0 < a_{s_{m_n}} < a_{s_{k+1}} < a_{s_k} < \dots; \quad k \in [m_{n-1}; m_n), \quad n \geq 1, \quad (3.7)$$

$$\int_0^1 \left( \sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx \leq 2 \frac{2^{1-p}}{2^{1-p} - 1} \left( \int_0^1 |f_n(x)|^p dx \right). \quad (3.8)$$

Положим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{s_k} h_{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{s_k} h_{s_k}(x) \quad (3.9)$$

и

$$E = \left( \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n \right), \quad n_0 = \left| \log_{\frac{1}{2}} \epsilon \right| + 1. \quad (3.10)$$

Очевидно, что (см. (3.4), (3.10))  $|E| > 1 - \epsilon$ .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i(x), \quad (3.11)$$

где

$$a_i = a_{s_k} - \frac{a_{s_k} - a_{s_{k+1}}}{(s_{k+1} - s_k)}(i - s_k) \quad \text{при } i \in [s_k, s_{k+1}), \quad k \geq 0, \\ a_i = a_{s_0} + (s_0 - i), \quad i \in [0, s_0). \quad (3.12)$$

Ясно, что  $a_i > a_{i+1} > 0$ ,  $i \geq 1$ ,  $(a_i \searrow 0)$  (см. (3.7)).

Пусть  $p \in (0, 1)$ ,  $f(x) \in L^1[0, 1]$ . Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность  $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right| dx = 0, \quad k_1 > n_0, \quad (3.13)$$

$$\int_0^1 |f_{k_n}(x)| dx < 2^{-8np^{-1}} \lambda, \quad n \geq 2, \quad \lambda = \min \left\{ \left( \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; 1 \right\}. \quad (3.14)$$

Ясно, что

$$\int_0^1 |f_{k_1}(x)|^p dx < \frac{3}{2} \int_0^1 |f(x)|^p dx. \quad (3.15)$$

Предположим, что уже определены числа  $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$ , функции  $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$ ,  $\bar{g}_{k_1}(x) = g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$  и полиномы

$$\bar{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{k=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_k} h_{s_k}(x), \quad 1 \leq n \leq q-1, \quad (3.16)$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 2^{-(n+1)}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x)] \right| dx < 2^{-(n+1)p^{-1}}, \quad 1 < n \leq q-1, \quad (3.17)$$

$$\int_0^1 \left( \sum_{i=m_{\nu_n-1}}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx < \left( \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^p dx \right) 2^{-n},$$

$$1 < n \leq q-1, \quad p \in (0, 1).$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число  $\nu_q > \nu_{q-1}$  (функцию  $f_{\nu_q}(x)$  из последовательности (3.1)) таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left( f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx < 2^{-8qp^{-1}} \lambda. \quad (3.18)$$

В силу (3.14), (3.17) и (3.18) имеем

$$\left( \int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx \right) < 2^{-2qp^{-1}} \lambda.$$

Отсюда и из (3.18) вытекает

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p dx < 2^{-q} \lambda^p. \quad (3.19)$$

Положим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)]. \quad (3.20)$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.5), (3.10) и (3.17)–(3.20), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_q(x)| dx &\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left( f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx \\ &+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx < 2^{-q-1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.14), (3.17) и (3.18) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx &\leq \int_0^1 \left| \overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x) \right| dx \\ + \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left( f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right) \right| dx &< 2^{-2qp^{-1}} \lambda. \end{aligned} \quad (3.23)$$



В силу (3.8), (3.14) и (3.19) имеем

$$\int_0^1 \left( \sum_{i=m_{\nu_q-1}}^{m_{\nu_q}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx < \left( \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^p dx \right) 2^{-q}. \quad (3.24)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций  $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$  ( $g_1(x) = f_{k_1}(x)$ ) и полиномов  $\{\bar{Q}_{\nu_q}(x)\}$ , удовлетворяющих условиям (3.21)–(3.24) для всех  $q > 1$ . Из (3.22) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |g_q(x)| dx < \infty.$$

Определим функцию  $g(x)$  и последовательность чисел  $\{\delta_i\}$  следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \quad (3.25)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i \in \{s_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \bigcup_{q=1}^{\infty} [m_{\nu_q-1}, m_{\nu_q}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Из (3.13), (3.21) и (3.25) вытекает

$$g(x) \in L^1[0, 1], \quad g(x) = f(x), \quad x \in E.$$

В силу (3.22), (3.2), (3.25) и (3.26) для всех  $q > k_0$  будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{s_{m_{\nu_q}}} \delta_i a_i h_i(x) - g(x) \right| dx \\ & \leq \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} [\bar{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)] \right| dx + \sum_{i=q}^{\infty} \int_0^1 |g_i(x)| dx < 2^{-q} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\delta_i a_i = \int_0^1 g(x) h_i(x) dx = c_i(g), \quad i = 1, 2, \dots$$

Учитывая соотношения (3.13), (3.15) и (3.26), получим для  $p \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i(g) |h_i(x)| \right)^p dx \\ & \leq \int_0^1 \left( \sum_{i=m_{\nu_1}-1}^{m_{\nu_1}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \left( \sum_{i=m_{\nu_n}-1}^{m_{\nu_n}-1} a_{s_i} |h_{s_i}(x)| \right)^p dx \\ & \leq 2 \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \left( \int_0^1 |f_{k_1}(x)|^p dx \right) + \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \frac{2^{3-p}}{2^{1-p}-1} \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right). \quad \square \end{aligned}$$

**Замечание 4.** Из доказательства теоремы 2 (применяя также замечание 3) видно, что можно получить более общий результат.

**Теорема 4.** *Существует ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x), \quad a_i > a_{i+1} > 0, \quad i \geq 1, \quad (a_i \searrow 0),$$

удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для любого  $0 < \epsilon < 1$  существует измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 1 - \epsilon$  такое, что для каждой функции  $f \in L^1[0, 1]$  можно найти функцию  $g \in L^1[0, 1]$ , совпадающую с  $f$  на  $E$  и такую, что ее ряд Фурье-Хаара абсолютно сходится во всех метриках  $L^p[0, 1]$ ,  $p \in (0, 1)$ , и

$$c_n(g) = a_n, \quad n \in \text{спес}(g),$$

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g) |h_n(x)| \right)^p dx \leq \frac{2^{3-p}}{2^{1-p}-1} \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right), \quad p \in (0, 1).$$

2. Для любой измеримой, почти всюду конечной на  $[0, 1]$  функции  $f(x)$  и для любого числа  $0 < \epsilon < 1$  можно найти функцию  $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$ ,  $|\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}| < \epsilon$ , так, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на  $[0, 1]$  и

$$c_n(\tilde{f}) = a_n, \quad n \in \text{спес}(\tilde{f}).$$

**Замечание 5.** Отметим, что в пункте 2 теоремы 4 “исключительное” множество, на котором происходит изменение, существенно зависит от

исправляемой функции  $f(x)$ : для системы Хаара невозможно выбрать универсальное “исключительное” множество.

Отметим также, что в работе [30] доказано, что для системы Фабера–Шаудера это возможно.

**Теорема 5.** *Для любого  $0 < \epsilon < 1$  существует измеримое множество  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $|E| > 1 - \epsilon$  такое, что для каждой функции  $f \in L^1[0, 1]$  можно найти функцию  $g \in L^1[0, 1]$ , совпадающую с  $f$  на  $E$ , такую, что ее разложение  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(g)\varphi_k(x)$  по системе Фабера–Шаудера абсолютно сходится равномерно на  $[0, 1]$  и*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(g)|\varphi_n \right\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty} < 2\|f\|_{L^\infty}.$$

Необходимо отметить, что теорема 5 не верна для всех базисов пространства  $C[0, 1]$ , в частности в работе [29] доказано, что она не верна для системы Франклина. Заметим, что система Франклина является ортогональным базисом пространства  $C[0, 1]$  (функции этой системы непрерывны на  $[0, 1]$  и ортогональны).

**Интересно было бы выяснить: существует ли ортогональный базис пространства  $C[0, 1]$ , для которого имела бы место теорема 5?**

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Лузин, *К основной теореме интегрального исчисления*. — Мат. Сб., **28**, No. 2 (1912), 266–294.
2. Д. Е. Меньшов, *О равномерной сходимости рядов Фурье*. — Мат. Сб., **53**, No. 2 (1942), 67–96.
3. Д. Е. Меньшов, *О рядах Фурье от суммируемых функций*. — Тр. Моск. мат. общества, **1** (1952), 5–38.
4. Д. Е. Меньшов, *О рядах Фурье непрерывных функций*. — Уч. Записки, Математика, **148**, No. 4 (1951), 108–132.
5. А. Нааг, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. — Math. Ann. **69** (1910), 331–371.
6. С. В. Кисляков, *Замечания об исправлении*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **135** (1984), 69–75.
7. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **92** (1979), 182–191.
8. М. Г. Grigoryan, *On the convergence of Fourier series in the metric of  $L^1$* . — Analysis Math. **17** (1991), 211–237.

9. М. Г. Григорян, *О сходимости в метрике  $L^1$  и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам*. — *Мат. Сб.*, **181**, No. 8 (1990), 1011–1030.
10. М. Г. Григорян, *Об усиленном  $L^p_\mu$  свойстве*. — *Мат. Сб.*, **194**, No. 10 (2003), 77–106.
11. Ф. Г. Арутюнян, *О рядах по системе Хаара*. — *ДАН Арм. ССР*, **42** (1966), 134–140.
12. Б. И. Кашин, Г. Г. Кошелева, *Об одном подходе к теоремам об исправлении*. — *Вестник МГУ, Сер. мат. мех.*, **1** (1988), 6–8.
13. К. И. Осколков, *Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры*. — *ДАН СССР* **228**, No. 2 (1976), 304–306.
14. J. J. Price, *Walsh series and adjustment of functions on small sets*. — *Illinois J. Math.* **13** (1969), 131–136.
15. Ш. В. Хеладзе, *Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики  $L^1$* . — *Мат. Сб.* **107**, No. 2 (1978), 245–258.
16. А. М. Олевский, *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана*. — *ДАН СССР* **238** (1978), 796–799.
17. Г. Г. Геворкян, *О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина*. — *Доклады АН Арм. ССР* **83**, No. 1 (1986) 15–18.
18. M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, *On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series*. — *J. Math. Anal. Appl.* **434**, No. 1 (2016), 554–567.
19. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении*. II. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **217** (1994), 83–91.
20. M. G. Grigoryan, R. E. Zink, *Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system*. — *Proc. of the Amer. Mat. Soc.*, **134**, No. 12 (2006), 3495–3505.
21. М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, *Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций*. — *Analysis Math.*, **32** (2006), 49–80.
22. M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, *On the coefficients of expansion of elements from  $C[0, 1]$  space by the Faber–Schauder system*. — *J. Funct. Spaces Appl.* **2** (2011), 34–42.
23. М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, *Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера–Шаудера*. — *Мат. Заметки* **93**, No. 3 (2013), 17–25.
24. К. А. Навасардян, А. А. Степанян, *О рядах Хаара*. — *Изв. НАН Армении*, **43**, No. 4 (2007), 3–12.
25. М. Г. Григорян, *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация*. — *Мат. Сб.* **203**, No. 3 (2012), 49–78.
26. Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, *Об абсолютной и безусловной сходимости*. — *УМН* **22**, No. 3 (1967), 240–242.
27. П. Л. Ульянов, *О рядах по системе Хаара*, *Мат. Сб.*, **63**, No. 3 (1964), 356–391.

28. М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, *Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша*. — Изв. РАН, Сер. матем. **80**, No. 6 (2016), 65–92.
29. Л. Н. Галоян, М. Г. Григорян, А. Х. Кобелян, *О сходимости рядов Фурье по классическим системам*. — Мат. Сб. **206**, No. 7 (2015), 55–94.
30. М. G. Grigoryan, T. M. Grigoryan, *On the absolute convergence Schauder series*. — Advances Theor. Appl. Math. **9**, No. 1 (2014), 11–14.

Grigoryan M. G. On the absolute convergence of Fourier–Haar series in the metric of  $L^p(0, 1)$ ,  $0 < p < 1$ .

It is proved that for any  $\epsilon > 0$  there exists a measurable set  $E \subset [0, 1]$  with  $|E| > 1 - \epsilon$  such that for any function  $f(x) \in L^1[0, 1]$  one can find a function  $g(x) \in L^1[0, 1]$  equal to  $f(x)$  on  $E$  such that its Fourier–Haar series converges absolutely in the metric of  $L^p(0, 1)$ ,  $0 < p < 1$ .

Физический факультет,  
Кафедра высшей математики  
Ереванский государственный  
университет,  
ул. А. Манукяна 1,  
0025, Ереван, Арм. Республика  
*E-mail*: gmarting@ysu.am

Поступило 8 июня 2018 г.