Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

Т. А. Болохов

РЕЗОЛЬВЕНТЫ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА СОЛЕНОИДАЛЬНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В работе [2] показано, что трехмерные соленоидальные векторные функции трех переменных в сферической системе отсчета могут быть представлены (параметризованы) с помощью двух наборов радиальных функций $\{u_{lm}(r)\}$, $\{\phi_{lm}(r)\}$, $1 \leqslant l$, $|m| \leqslant l$ в следующем виде:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \big(\widehat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \qquad (1)$$

где

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\Omega), \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega \in \mathbb{S}^2, \quad \widehat{l} = \sqrt{l(l+1)},$$

а $\vec{\Upsilon}(\Omega)$ и $\vec{\Psi}(\Omega)$ – это векторные сферические гармоники [8]

$$\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = \frac{\vec{x}}{r}Y_{lm}(\Omega), \quad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \qquad (2)$$

$$\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2} r\vec{\partial}Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \qquad (3)$$

$$\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2}(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l. \qquad (4)$$

Выполнение условия соленоидальности

$$\sum_k \partial_k f^k(\vec{x}) \equiv \vec{\partial}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = 0$$

следует из представления

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \big(\vec{\partial}\times\frac{u_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} + \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}\big)$$

Ключевые слова: оператор Лапласа, соленоидальные векторные функции, самосопряженные расширения операторов, формула Крейна для ядра резольвенты.

и равенства нулю дивергенции каждого слагаемого

$$\vec{\partial}\cdot\vec{\partial}\times\frac{u_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}=0,$$

$$\vec{\partial}\cdot\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}=\big((\frac{\phi_{lm}}{r})'\vec{x}+\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\partial}\big)\cdot\widehat{l}^{-1}(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}(\Omega)=0.$$

Действие оператора Лапласа

$$\Delta=-\sum_k\partial_k^2$$

на функции вида (1) сводится к действию на параметры u_{lm}, ϕ_{lm} радиальных операторов

$$T_l=-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2},$$

так что

$$\Delta\vec{f}(\vec{x})=\sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l}\big(\widehat{l}\frac{T_l u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{T_l u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big)+\sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l}\frac{T_l\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}.$$

В работе [3] показывается, что операторы T_l, действуя на множестве гладких функций, быстро убывающих в окрестности начала координат,

$$\mathring{\mathcal{W}}_l=\{u(r):\ u\in\mathcal{H}_l,\ T_l u\in\mathcal{H}_l,\ u''(0)=0\},\quad l\geqslant 1,\tag{5}$$

в индуцированном из пространства $\mathbb{R}^3$ скалярном произведении $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_l$ для параметров u_{lm} при $l=1$ являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. При этом дефектные векторы (то есть решения уравнений $(T_1^*\mp i\rho^2)c_\pm=0$) имеют следующий вид:

$$c_\pm(r)=D_1\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\}+r^{-1}=D_1\big(\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\}-1\big),\tag{6}$$

где D_1 – это дифференциальная операция

$$D_1=r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}.$$

Действие самосопряженных расширений T_1^κ операторов T_1 на функции u из некоторой области определения $\mathcal{W}_1^\kappa$ выглядит довольно просто:

$$T_1^\kappa u=-\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r^2}u-\frac{2}{r}u'(0),\tag{7}$$

однако перенос этого действия в пространство $\mathbb{R}^3$ представляет из себя сложное выражение, которое трудно использовать в приложениях.

В данной работе с помощью формулы Крейна строится выражение для ядра резольвенты самосопряженного расширения общего вида описанного выше симметрического оператора на соленоидальном пространстве. Основные результаты были ранее представлены в [4], здесь же приводится их подробный вывод.

§1. Аналитические векторы

Дефектные векторы (6) позволяют построить по три (соответственно количеству возможных значений проекции $m = -1, 0, 1$ орбитального момента на третью координатную ось для полного момента $l = 1$) вектора в соленоидальном подпространстве $P^\perp$:

$$\vec{B}^m_\pm(\vec{x}(r,\Omega)) = \vec{\partial} \times \frac{c_\pm(r)}{\sqrt{2}r}(\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{1m}(\Omega) = \vec{\partial} \times (\vec{x} \times \vec{\partial})\frac{c_\pm(r)}{\sqrt{2}r}Y_{1m}(\Omega)$$
$$= \sqrt{2}\frac{c_\pm(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c'_\pm(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega), \quad \vec{B}^m_\pm \in P^\perp.$$

Пусть $\mathcal{H}^\perp$ – это линейное пространство функций вида (1), с коэффициентами u_{lm}, лежащими в $\mathring{\mathcal{W}}_l$. Определим симметрический оператор $\Delta^\perp$ как сужение операции Δ на $\mathcal{H}^\perp$. Из симметричности оператора T_l на $\mathring{\mathcal{W}}_l$ следует, что оператор $\Delta^\perp$ симметричнен, а из принадлежности функций $c_\pm(r)$ дефектным подпространствам T_1 следует, что векторы $\vec{B}^m_\pm$ лежат в дефектных подпространствах операторов $\Delta^\perp$, то есть удовлетворяют уравнениям

$$(\vec{B}^m_\pm, (\Delta \pm i\chi^2)\vec{h}^\perp) = 0, \quad \vec{h}^\perp \in \mathcal{H}^\perp. \tag{8}$$

Самосопряженные расширения симметрического оператора $\Delta^\perp$ общего вида определяются с помощью преобразования Кэли [1, стр. 186] посредством некоторой унитарной матрицы, переводящей элементы $\vec{B}^m_-$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}^m_+$ другого. Формула Крейна [5] позволяет построить выражение для ядра резольвенты произвольного самосопряженного расширения через ядро резольвенты в фиксированной точке области регулярности. С помощью преобразования Фурье можно вычислить выражение для ядра резольвенты $\mathring{R}_w$ самосопряженного оператора Лапласа $\Delta_0^\perp$, заданного на множестве регулярных два раза дифференцируемых функций [7, стр. 73]:

$$\mathring{R}^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{i\sqrt{w}|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\delta_{jj'}, \quad \left[(\Delta_0 - w)\mathring{R}_w\right]^{jj'}(\vec{x},\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{jj'}, \tag{9}$$

здесь разрез у корня из спектрального параметра w выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\bar{w}} = -\overline{\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \tag{10}$$

Резольвента (9) определена на пространстве векторных функций произвольного вида, однако можно показать, что она, так же как и оператор $\Delta_0^\perp$, оставляет подпространства $P^\parallel$ и $P^\perp$ инвариантными. Тем самым, выражение (9) может быть использовано и для построения резольвент операторов, действующих в том числе и на подпространствах $P^\parallel$ и $P^\perp$. Формула Крейна опирается на понятие аналитического вектора [5, стр. 473]. В нашей ситуации это вектор $\vec{B}_w^m$, который в регулярных точках рассматриваемых самосопряженных расширений аналитически зависит от спектрального параметра w и удовлетворяет уравнению

$$\vec{B}_w^m = \vec{B}_{w_0}^m + (w - w_0)\mathring{R}_w \vec{B}_{w_0}^m. \tag{11}$$

Здесь под понятием *вектор* подразумевается элемент линейного пространства – области определения оператора $(\Delta^\perp)^*$, сопряженного к симметрическому оператору $\Delta^\perp$, в то время как символ вектора у $\vec{B}_w^m$ относится к структуре этого пространства, а индекс m нумерует возможные аналитические векторы. Необходимым условием построения резольвенты с помощью аналитических векторов $\vec{B}_w^m$ является принадлежность этих векторов, взятых в точках $\pm i\chi^2$, дефектным подпространствам симметрического оператора $\Delta^\perp$:

$$(\Delta^\perp \pm i\chi^2)^* \vec{B}_{\pm i\chi^2}^m = 0.$$

Для построения аналитических векторов рассмотрим функцию

$$c_w(r) = D_1\bigl(e^{i\sqrt{w}r} - 1\bigr) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\bigl(e^{i\sqrt{w}r} - 1\bigr)$$

с разрезом по спектральному параметру w, определенному формулой (10), и перенесем ее с помощью разложения (1) в трехмерное пространство. Определим соленоидальный вектор $\vec{B}_w^m$ следующим образом:

$$\vec{B}_w^m(\vec{x}(r,\Omega)) = \sqrt{2}\frac{c_w(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c_w'(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega). \tag{12}$$

Непосредственные вычисления с подстановкой выражений для векторных сферических гармоник [8] дают для этого вектора следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
[B_w^m(\vec{x})]^j = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big(&\frac{x_m x_j}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r}-1}{r} \\
&-\frac{\delta_{jm}}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r}-1}{r}\Big)_{r=|x|}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Вычисление, аналогичное вычислению в [3] для дефектных векторов $c_\pm(r)$, показывает, что для любого элемента $u \in \mathring{\mathcal{W}}_1$ выполнено равенство

$$\langle c_w, (T_1 - w)u\rangle_1 = 0,$$

а значит функция $c_w(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(T_1 - w)^* c_w(r) = (T_1 - w)^* D_1\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = 0.$$

Как следствие, вектор $\vec{B}_w^m$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta^\perp - w)^* \vec{B}_w^m = 0,$$

из которого, совместно с аналитичностью и поведением на бесконечности функции $\vec{B}_w^m$ по параметру w, следует, что функция $\vec{B}_w^m$ является решением уравнения (11).

Далее вычислим скалярное произведение аналитических векторов $\vec{B}_w^m$ для разных значений спектрального параметра: воспользуемся определением (12), снимем интеграл по переменной Ω, проинтегрируем по частям и при помощи формулы

$$D_l^* D_l = -r^{-l}\frac{d}{dr}r^{2l}\frac{d}{dr}r^{-l} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l-1)}{r^2} = T_{l-1}$$

получим

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}_w^m(\vec{x})}\vec{B}_{\widetilde{w}}^m(\vec{x})\,d^3x &= \int\limits_0^\infty \Big(2\frac{\bar{c}_w(r)c_{\widetilde{w}}(r)}{r^2} + \bar{c}'_w(r)c'_{\widetilde{w}}(r)\Big)\,dr \\
&= \int\limits_0^\infty D_1^*\bar{c}_w(r)D_1^*c_{\widetilde{w}}(r)\,dr \\
&= \int\limits_0^\infty D_1^*D_1(e^{i\sqrt{\bar{w}}r} - 1)D_1^*D_1(e^{i\sqrt{\widetilde{w}}r} - 1)\,dr
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$= \int_0^\infty \frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\bar{w}}r}-1)\frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}-1)\,dr = \bar{w}\tilde{w}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\bar{w}}r}e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}\,dr$$
$$= \frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}}+\sqrt{\tilde{w}}}. \tag{15}$$

Вследствие ортогональности векторных сферических гармоник [8], аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ ортогональны при отличающихся значениях индекса m, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}^m_w(\vec{x})}\vec{B}^{\tilde{m}}_{\tilde{w}}(\vec{x})\,d^3x = \delta_{m\tilde{m}}\frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}}+\sqrt{\tilde{w}}}. \tag{16}$$

Из преобразования (15) и положительности мнимой части корня (10) при $0 < \arg w < 2\pi$ также можно вычислить выражение для нормы этих векторов

$$\|\vec{B}^m_w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}^m_w(\vec{x})}\vec{B}^m_w(\vec{x})\,d^3x = \frac{i\bar{w}w}{\sqrt{w}-\overline{\sqrt{w}}} = \frac{|w|^2}{2\mathrm{Im}\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \tag{17}$$

Отсюда также видно, что, в соответствие с предписанием теории Крейна, нормы векторов $\vec{B}^m_{+i\chi^2}$ и $\vec{B}^m_{-i\chi^2}$, лежащих в разных дефектных подпространствах симметрического оператора $\Delta^\perp$, совпадают.

§2. Построение резольвенты

Самосопряженное расширение общего вида $\Delta^\perp_u$ симметрического оператора $\Delta^\perp$ может быть задано с помощью унитарного отображения U^α, переводящего элементы $\vec{B}^m_-$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}^m_+$ другого:

$$U^\alpha:\ u^n_m\vec{B}^m_{-i\chi^2} \to \alpha_n u^n_{m'}\vec{B}^{m'}_{+i\chi^2}, \quad u^{n'}_m\bar{u}^n_m = \delta_{n'n}, \quad |\alpha_n| = 1$$

(здесь суммирование производится по индексам m и m', но не по n). Мы определили действие преобразования U^α таким образом, чтобы векторы u^n_m по индексу m являлись собственными для отображения U^α из базиса $\{\vec{B}^m_{-i\chi^2}\}$ в базис $\{\vec{B}^{m'}_{+i\chi^2}\}$, и при этом U^α могло быть записано в следующем виде:

$$U^\alpha = \frac{U^\alpha_{mm'}}{\|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3}, \quad U^\alpha_{mm'} = \sum_{n=1}^{3}\alpha_n u^n_m \bar{u}^n_{m'}. \tag{18}$$

Можно заметить, что введенное в (9) ядро резольвенты $\mathring{R}_w(\vec{x},\vec{y})$ соответствует самосопряженному расширению $\Delta_0^\perp$, определяемому единичной матрицей, то есть отображению $\vec{B}^m_{-i\chi^2}$ в $\vec{B}^m_{+i\chi^2}$. Из определения преобразования Кэли [1, стр. 186] и формулы (17) следует, что разность резольвент рассматриваемых самосопряженных расширений, взятых в точке $i\chi^2$, определяется выражением

$$\begin{aligned} R_{i\chi^2} - \mathring{R}_{i\chi^2} &= \frac{U^\alpha_{mm'} - \delta_{mm'}}{2i\chi^2\|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3} \\ &= \sum_n u^n_m \bar{u}^n_{m'}\frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}i\chi^5}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned} \tag{19}$$

И, таким образом, унитарная матрица $U^\alpha_{mm'}$, задающая самосопряженное расширение, связывается с его резольвентой. Альтернативными способами задать самосопряженное расширение симметрического оператора являются описание через пространство граничных значений [9, 10] и теория Бирмана–Вишика–Крейна [11, 12] для положительно определенных операторов.

Формула Крейна [5, стр. 475] утверждает, что разность резольвент самосопряженных расширений симметрического оператора в произвольной точке w может быть записана через аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ в следующем виде:

$$R_w - \mathring{R}_w = \beta_{mm'}(w)\vec{B}^m_w\big(\vec{B}^{m'}_{\bar{w}},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3}, \tag{20}$$

где $\beta_{mm'}(w)$ – это матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\beta^{-1}_{mm'}(w) = \beta^{-1}_{mm'}(i\chi^2) - (w - i\chi^2)\big(\vec{B}^m_{\bar{w}}, \vec{B}^{m'}_{i\chi^2}\big)_{\mathbb{R}^3}. \tag{21}$$

Формула (19) дает нам выражение для функции $\beta_{mm'}(w)$ в точке $i\chi^2$:

$$\beta_{mm'}(i\chi^2) = \sum_n u^n_m \bar{u}^n_{m'}\frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}i\chi^5},$$

из которого, решая уравнение (21), можно вычислить значение $\beta_{mm'}(w)$ в произвольной точке:

$$\beta_{mm'}(w) = \sum_n \frac{u^n_m \bar{u}^n_{m'}}{i\chi^2} \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}\chi^3 + iw(\alpha_n - 1)(\sqrt{w} + \sqrt{i\chi^2})}. \tag{22}$$

Переходя к конкретным функциям в координатах в формуле (20), получаем следующее выражение для разности ядер резольвент

$$R^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) - \mathring{R}^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) = \beta_{mm'}(w)[B^m_w(\vec{x})]^j [B^{m'}_w(\vec{y})]^{j'}, \tag{23}$$

где явный вид векторов $[B^m_w(\vec{x})]^j$ приведен в (13). Данное выражение является аналитической функцией спектрального параметра w в области $0 < \arg w < 2\pi$, за исключением некоторого количества полюсов, определяемых знаменателями матричной функции $\beta_{mm'}(w)$. Эти полюса определяют собственные значения дискретного спектра оператора $\Delta^{\perp}_u$, а соответствующие вычеты резольвенты – проекторы на собственные подпространства.

§3. Заключение

Мы построили выражение (23) с подстановкой (22) для ядра резольвенты самосопряженного расширения симметрического оператора Лапласа на соленоидальном подпространстве в сферических координатах. Самосопряженное расширение имеет общий вид и задается с помощью преобразования Кэли отображением (18).

Список литературы

1. Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики*, т. 1, Мир, М., 1982, 486.
2. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **433** (2015), 78–110.
3. Т. А. Болохов, *Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **434** (2015), 32–52.
4. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичных форм векторного оператора Лапласа и сингулярные возмущения оператора Шредингера*, автореферат канд. физ.-мат. наук, СПб, 2018, 16с.
5. М. Г. Крейн, *Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения.* — Мат. сб. **20(63)** (1947), 431–495.
6. В. Хатсон, Дж. С. Пим, *Приложения функционального анализа и теория операторов*, Пер. с англ., Мир, М., 1983, 432.
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность*, Мир, М., 1978, 395.

8. R. G. Barrera, G. A. Estevez, J. Giraldo, *Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics.* — European J. Phys. **6**, No. 4 (1985), 287–294.
9. В. М. Брук, *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии.* — Мат. сб. **100**, No. 2 (1976), 210–216.
10. А. Н. Кочубей, *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.* — Мат. заметки **17**, No. 1 (1975), 41–48.
11. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.* — Тр. ММО **1**, ГИТТЛ, М.Л., 1952, 187–246.
12. М. Ш. Бирман, *К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов.* — Мат. сб., **38(80)**, No. 4 (1956), 431–450.

Bolokhov T. A. Resolvents of selfadjoint extensions of the Laplace operator on the solenoidal subspace.

On the space of solenoidal vector-valued functions vanishing at the origin with their derivatives, the Laplace operator is symmetric and has defect indices (3,3). With the help of the Krein formula, an expression for the kernel of the resolvent for selfadjoint extensions of this operator is found as the sum of the Green function for the Laplace operator on the space of all vector-valued functions and a certain finite rank addendum.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 25 июня 2018 г.