Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

**Б. П. Харламов**

# О НЕДОСТИЖИМОЙ ГРАНИЦЕ ИНТЕРВАЛА ЗНАЧЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА: ПОЛУМАРКОВСКИЙ ПОДХОД

Граничные задачи относятся к числу практически наиболее важных задач в теории диффузионных процессов. Число работ, посвящённых этим задачам огромно. Каждый может убедиться в этом, зайдя на страницы любой математической базы данных в Интернете. Во всех этих работах рассматриваются марковские диффузионные процессы. По-видимому, одним из первых результатов в этой области был представлен в главе 5 книги Гихмана и Скорохода [2]. В книге Чёрного и Энгельберта [10] подводится итог исследованиям в этой области, где проблеме недостижимости границ посвящена вторая глава, в которой исследуется поведение процесса в односторонних окрестностях сингулярных точек стохастических дифференциальных уравнений.

В данной работе к решению граничных задач применяется так называемый полумарковский метод. Этот метод позволяет определить недостижимость границ интервала значений диффузионного процесса в терминах моментов первого выхода, а также дать элементарными средствами критерий недостижимости.

Применение полумарковских методов всегда предполагает возможность распространить полученные результаты на класс более широкий, чем класс марковских процессов. Это класс так называемых полумарковских процессов общего вида и, в частности, класс полумарковских диффузионных процессов (см. [5–9]),

**Постановка задачи. Полумарковский процесс общего вида.** Рассмотрим измеримое пространство элементарных событий $\mathcal{D}$, где любое $\xi \in \mathcal{D}$ представляет собой непрерывную справа в любой точке $t \geqslant 0$ и имеющую предел слева в любой точке $t > 0$ функцию типа $[0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Предположим, что на множестве $\mathcal{D}$ задана метрика Скорохода и определена борелевская сигма-алгебра подмножеств

*Ключевые слова*: диффузионный марковский процесс, полумарковский процесс диффузионного типа, переходные полумарковские функции, недостижимые границы интервала, критерий недостижимости.

$\mathcal{F}$ (см. [2]). Вероятностная мера $P$ на этой сигма-алгебре интерпретируется как распределение некоторого случайного процесса. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $P_x$ – мера множества всех $\xi \in \mathcal{D}$, для которых $\xi(0) = x$. Семейство мер $(P_x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ называется распределением случайного процесса, заданного с точностью до начального состояния. Для марковских и полумарковских процессов элементы этого семейства удовлетворяют некоторым условиям согласования.

При любом множестве $S \in \mathcal{F}$ вероятности $(P_x(S))$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ можно интерпретировать как значения некоторой функции, заданной на $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что эта функция измерима относительно борелевской сигма-алгебры на $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что для любой числовой, $\mathcal{F}$-измеримой функции $\phi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ суперпозиция $P_\phi(S)$ также является $\mathcal{F}$-измеримой функцией. Это свойство важно для определения однородного полумарковского свойства семейства мер $(P_x)$. Пусть $X_t : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{F}$-измеримая функция, определяемая для любого $\xi \in \mathcal{D}$ как $X_t(\xi) = \xi(t)$. Пусть $\mathcal{F}_t$ – сигма-алгебра, порождённая всеми функциями $X_s$ $(s \leqslant t)$ и $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ – натуральная фильтрация.

Определим стандартным образом марковские моменты относительно натуральной фильтрации и для любого марковского момента $\tau$ – сигма-алгебру предшествующих событий $\mathcal{F}_\tau$ на множестве $\{\tau < \infty\}$.

Полумарковским процессом общего вида мы называем случайный процесс, задаваемый с точностью до начального состояния, для которого для любого интервала $\Delta$ выполняется условие согласования семейства мер $(P_x)$ этого процесса вида

$$P_x(\theta_\tau^{-1} A \,|\, \mathcal{F}_\tau) = P_{X_\tau}(A)$$

на множестве $\{\tau < \infty\}$ $P_x$-почти наверное (п.н.), где $\tau \equiv \sigma_\Delta$ – момент первого выхода из открытого множества $\Delta$, $A \in \mathcal{F} \cap \{\tau < \infty\}$ и $\theta_t$ – оператор сдвига на пространстве функций $\mathcal{D}$, а также $\theta_\tau(\xi) \equiv \theta_{\tau(\xi)}(\xi)$ и $\theta_\tau^{-1}$ – соответствующий обратный оператор, заданный на семействе измеримых подмножеств множества $\{\tau < \infty\}$. Это определение можно переписать в более конструктивном виде: для любых $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}_\tau$ справедливо

$$P_x(\theta_\tau^{-1} A, B \cap \{\tau < \infty\}) = E_x(P_{X_\tau}(A);\, B \cap \{\tau < \infty\}),$$

где $E_x(f; B_1)$ – интеграл от функции $f$ по мере $P_x$ на множестве $B_1$.

Класс полумарковским процессов общего вида включает в себя все ступенчатые полумарковские процессы, а также – все непрерывные полумарковские процессы.

**Диффузионный полумарковский процесс.** Полумарковской переходной функцией любого одномерного однородного во времени случайного процесса $X(t)$ с семейством мер $(P_x)$ называется функция

$$Y_\Delta(T \times S \,|\, x) \equiv P_x(\sigma_\Delta \in T,\, X(\sigma_\Delta) \in S),$$

где $\Delta$ – интервал, $x \in \Delta$, $T$ – некоторое подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$, $S$ – некоторое подмножество значений процесса. Определим также

$$Y_\Delta(T \times S \,|\, x) = I_{T \times S}(0, x),$$

если $x \notin \Delta$. Это значит, что $Y_\Delta(T \times S \,|\, x) = 1$, если $0 \in T$ и $x \in S$, и равно 0 в противном случае. Полумарковское условие согласования семейства таких функций связано с очевидным соотношением между моментами первого выхода из интервалов: для любых интервалов $\Delta_1$, $\Delta_2$, где $\Delta_1 \subset \Delta_2$ на множестве $\{\xi : \sigma_{\Delta_1}\xi < \infty\}$, справедливо

$$\sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_1} + \sigma_{\Delta_2} \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}.$$

Это условие согласования состоит в том, что в терминах предыдущих интервалов выполняется соотношение

$$Y_{\Delta_2}([0, t) \times S \,|\, x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R} \setminus \Delta_1} Y_{\Delta_1}(ds \times dy \,|\, x)\, Y_{\Delta_2}([0, t-s) \times S \,|\, y). \quad (1)$$

В [4] доказано, что априори заданное согласованное семейство вероятностных ядер $Y_\Delta(T \times S \,|\, x)$ определяет согласованное семейство вероятностных мер некоторого полумарковского процесса с траекториями, непрерывными справа при $t \geqslant 0$ и имеющими предел слева в любой точке $t > 0$. Условие $P_x$-п.н. непрерывности траекторий построенного процесса очень просто: для любого $\Delta \equiv (a, b)$ и $x \in \Delta$ выполняется

$$Y_\Delta(T \times \{a, b\}, \,|\, x) = Y_\Delta(T \times \mathbb{R} \,|\, x).$$

Мы считаем, что семейство полумарковских переходных ядер определено, если определено семейство их преобразований Лапласа $(L_\Delta)$ по первому аргументу: для любого $\lambda \geqslant 0$

$$L_\Delta(\lambda,\, S \,|\, x) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} Y_\Delta(dt \times S \,|\, x).$$

Согласно формуле (1), условие согласования этих ядер имеет вид

$$L_{\Delta_2}(\lambda, S \mid x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Delta_1} L_{\Delta_1}(\lambda, dy \mid x)\, L_{\Delta_2}(\lambda, S \mid y), \tag{2}$$

а также

$$L_{\Delta}(\lambda, S \mid x) = I_S(x),$$

если $x \notin \Delta$.

Определение диффузионного полумарковского процесса проще всего формулировать в терминах преобразования Лапласа от полумарковских переходных функций по первому аргументу. Пусть $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ – полумарковский процесс с непрерывными траекториями и с согласованным семейством мер $(P_x)$ $(x \in (a,b))$. Для $\Delta = (a,b)$ определим

$$g_{\Delta}(\lambda \mid x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_{\Delta}};\, \sigma_{\Delta} < \infty,\, X(\sigma_{\Delta}) = a),$$

$$h_{\Delta}(\lambda \mid x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_{\Delta}};\, \sigma_{\Delta} < \infty,\, X(\sigma_{\Delta}) = b).$$

Пусть $\Delta_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $\Delta_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ и $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Согласно (2), справедливо

$$g_{\Delta_2}(\lambda \mid x) = g_{\Delta_1}(\lambda \mid x) g_{\Delta_2}(\lambda, \alpha_1) + h_{\Delta_1}(\lambda \mid x) g_{\Delta_2}(\lambda, \beta_1), \tag{3}$$

$$h_{\Delta_2}(\lambda \mid x) = g_{\Delta_1}(\lambda \mid x) h_{\Delta_2}(\lambda, \alpha_1) + h_{\Delta_1}(\lambda \mid x) h_{\Delta_2}(\lambda, \beta_1), \tag{4}$$

Непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным в окрестности точки $x$, если существуют функции $A(x)$ и $B(\lambda \mid x)$ такие, что

$$g_{(x-r,x+r)}(\lambda \mid x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(\lambda \mid x)r^2) + o(r^2), \tag{5}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(\lambda \mid x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(\lambda \mid x)r^2) + o(r^2) \tag{6}$$

при $r \to 0$, где $A(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x$, $B(\lambda \mid x)$ положительна, непрерывна по второму аргументу в окрестности точки $x$, не убывает и имеет вполне монотонную частную производную по первому аргументу. Обоснованность этого определения, и в частности, свойства коэффициента $A$, который не зависит от $\lambda$, вытекает из свойств преобразования Лапласа (см. [4], стр. 159–163).

Если условие диффузионности выполняется для любой точки открытого интервала $(a,b)$ при некоторых допустимых функциях $A(x)$, $B(\lambda \mid x)$ $(x \in (a,b), \lambda \geqslant 0)$, то дважды дифференируемые функции

$g_{(a,b)}(\lambda\,|\,x)$, $h_{(a,b)}(\lambda\,|\,x)$ удовлетворяют на этом интервале дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda\,|\,x)f = 0, \tag{7}$$

с краевыми значениями

$$g_{(a,b)}(\lambda\,|\,a) = h_{(a,b)}(\lambda\,|\,b) = 1, \quad g_{(a,b)}(\lambda\,|\,b) = h_{(a,b)}(\lambda\,|\,a) = 0.$$

и, следовательно, при любом $\lambda \geqslant 0$ составляют фундаментальную систему решений этого уравнения. Значения функций на концах интервала понимаются как пределы соответствующих значений на последовательностях внутренних точек интервала.

Наша задача – получить в терминах коэффициентов дифференциального уравнения необходимые и достаточные условия для недостижимости границ. В качестве первого шага установим следующее свойство фундаментальных решений уравнения (7), которое фактически не связано с вероятностной интерпретацией этих решений.

**Лемма 1.** *Пусть уравнение*

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(x)f = 0, \tag{8}$$

*имеет коэффициенты, непрерывные и ограниченные на интервале* $\Delta_2$, *коэффициент* $A(x)$ *имеет непрерывную и ограниченную производную и* $B(x) \geqslant 0$. *Пусть* $\{g_{\Delta_i}, h_{\Delta_i}\}$ *– семейство фундаментальных решений на интервале* $\Delta_i$ $(i = 1, 2)$, *у которых*

$$g_{\Delta_i}(\alpha_i) = h_{\Delta_i}(\beta_i) = 1,$$

$$g_{\Delta_i}(\beta_i) = h_{\Delta_i}(\alpha_i) = 0,$$

*где* $\Delta_i \equiv (\alpha_i, \beta_i) \subset (a, b)$ $(i = 1, 2)$, *и* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда*

1) *для любого* $x \in \Delta_i$ *справедливо* $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant h_i(x) \leqslant 1$,

2) *для любого* $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ *выполняются представления*

$$g_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)g_{\Delta_2}(\alpha_1) + h_{\Delta_1}(x)g_{\Delta_2}(\beta_1), \tag{9}$$

$$h_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)h_{\Delta_2}(\alpha_1) + h_{\Delta_1}(x)h_{\Delta_2}(\beta_1), \tag{10}$$

**Доказательство.** Условия леммы обеспечивают единственное решение задачи Дирихле на интервале $\Delta_i$ $(i = 1, 2)$.

Первое свойство следует из принципа максимума (минимума) для уравнения (8).

Для доказательства второго свойства заметим, что правая часть уравнения (9) является решением уравнения (8) на интервале $(\alpha_1, \beta_1)$

как линейная комбинация таких решений. С другой стороны, правая часть уравнения (9) при $x = \alpha_1$ равна $g_{\Delta_2}(\alpha_1)$, как и левая часть (9). Правая часть уравнения (9) при $x = \beta_1$ равна $g_{\Delta_2}(\beta_1)$, как и левая часть (9). Отсюда по теореме единственности решения задачи Дирихле следует утверждение о равенство правой и левой частей уравнения (9). То же для уравнения (10). □

Из леммы 1 следует, что $g'_{\Delta_2}(x) \leqslant 0$, $h'_{\Delta_2}(x) \geqslant 0$ (производные по $x$). Действительно. имеем

$$\begin{aligned} g_{(\alpha,\beta)}(x) &= g_{(x-\epsilon,\beta)}(x) g_{(\alpha,\beta)}(x-\epsilon) + h_{(x-\epsilon,\beta)}(x) g_{(\alpha,\beta)}(\beta) \\ &= g_{(x-\epsilon,\beta)}(x) g_{(\alpha,\beta)}(x-\epsilon) \leqslant g_{(\alpha,\beta)}(x-\epsilon), \\ h_{(\alpha,\beta)}(x) &= g_{(\alpha,x+\epsilon)}(x) h_{(\alpha,\beta)}(\alpha) + h_{(\alpha,x+\epsilon)}(x) h_{(\alpha,\beta)}(x+\epsilon) \\ &= h_{(\alpha,x+\epsilon)}(x) h_{(\alpha,\beta)}(x+\epsilon) \leqslant h_{(\alpha,\beta)}(x+\epsilon). \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки производных.

**Недостижимые границы интервала. Недостижимая левая граница.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f'' + A(x) f' = 0. \tag{11}$$

Для нахождения решения $g$ на интервале $(a, b)$ удобно использовать общее решение этого уравнения в виде

$$f(x) = C_2 + C_1 \int\limits_a^x \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right) dy.$$

Произвольные постоянные находим из условия $f(a) \equiv g(a) = 1$, $f(b) \equiv g(b) = 0$. Отсюда $C_2 = 1$ и

$$C_1 = \frac{-1}{\int\limits_a^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right) dy}.$$

Рассмотрим решение задачи Дирихле для этого уравнения

$$g_{(a,b)}(0\,|\,x) \equiv g(x) = 1 - \frac{\int\limits_a^x \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right) dy}{\int\limits_a^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right) dy}.$$

**Определение 1.** *Левая граница интервала* $(a_0, b)$ *называется недостижимой, если* $g_{(a,b)}(0\,|\,x) \to 0$ $(a \downarrow a_0)$ *для любого* $x \in (a, b)$ *и* $a > a_0$.

Наша задача состоит в том, чтобы выразить это условие в терминах коэффициента $A(x)$.

Имеем

$$g_{(a,b)}(0,x) = \frac{\int\limits_x^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\int\limits_a^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}$$

$$= \frac{\exp\left(\int\limits_a^b 2A(s)\,ds\right)\int\limits_x^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\exp\left(\int\limits_a^b 2A(s)\,ds\right)\int\limits_a^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}$$

$$= \frac{\int\limits_x^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\int\limits_a^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}.$$

Для сходимости этой дроби к нулю необходимо и достаточно, чтобы знаменатель стремился к бесконечности при $a \downarrow a_0$. Другими словами

$$\int\limits_{a_0}^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy = \infty, \tag{12}$$

а это возможно только тогда, когда при $t \downarrow a_0$

$$\int\limits_y^b 2A(s)\,ds \to \infty. \tag{13}$$

**Недостижимая правая граница.** Рассмотрим дифференциальное уравнение (11). Для нахождения решения $h$ на интервале $(a, b)$ удобно использовать общее решение этого уравнения в другом виде

$$f(x) = C_2 - C_1 \int\limits_x^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy.$$

Произвольные постоянные находим из условия $f(a) \equiv h(a) = 0$, $f(b) \equiv h(b) = 1$. Отсюда $C_2 = 1$ и

$$C_1 = \frac{1}{\int\limits_a^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}.$$

Рассмотрим решение задачи Дирихле для этого уравнения

$$h_{(a,b)}(0\,|\,x) \equiv h(x) = 1 - \frac{\int\limits_x^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\int\limits_a^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}.$$

**Определение 2.** *Правая граница интервала $(a, b_0)$ называется недостижимой, если $h_{(a,b)}(0\,|\,x) \to 0$ $(b \uparrow b_0)$ для любого $x \in (a, b)$ и $b < b_0$.*

Имеем

$$\begin{aligned} h_{(a,b)}(0\,|\,x) &= \frac{\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\int\limits_a^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy} \\ &= \frac{\exp\left(-\int\limits_a^b 2A(s)\,ds\right)\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\exp\left(-\int\limits_a^b 2A(s)\,ds\right)\int\limits_a^b \exp\left(\int\limits_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy} \\ &= \frac{\int\limits_a^x \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}{\int\limits_a^b \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy}. \end{aligned}$$

Для сходимости этой дроби к нулю необходимо и достаточно, чтобы знаменатель стремился к бесконечности при $b \uparrow b_0$. Другими словами

$$\int\limits_a^{b_0} \exp\left(-\int\limits_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy = \infty, \tag{14}$$

а это возможно только тогда, когда при $y \uparrow b_0$

$$\int_a^y 2A(s)\,ds \to -\infty. \tag{15}$$

В результате мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть* $a_0 < a < b < b_0$.

1) *Левая граница интервала* $(a_0, b_0)$ *является недостижимой тогда и только тогда, когда при любом* $b$

$$\int_{a_0}^b \exp\left(\int_y^b 2A(s)\,ds\right)\,dy = \infty,$$

2) *Правая граница интервала* $(a_0, b_0)$ *является недостижимой тогда и только тогда, когда при любом* $a$

$$\int_a^{b_0} \exp\left(-\int_a^y 2A(s)\,ds\right)\,dy = \infty.$$

**Диффузионный марковский процесс.** Диффузионный процесс является частным случаем полумарковского процесса диффузионного типа. Поэтому предыдущие результаты справедливы для него при некоторых $A(x)$, $B(\lambda\,|\,x)$. Очередная наша задача – найти эти коэффициенты.

Согласно Колмогорову, однородный диффузионный марковский процесс $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ определяется в терминах переходных вероятностей. Это определение хорошо известно, но мы приведём его, чтобы обратить внимание на одно обстоятельство.

Согласованное семейство мер $(P_x)$ процесса $X(t)$ существует и является марковским, если это семейство мер построено по согласованному семейству так называемых марковских переходных плотностей $p(x,t,y)$ (для любого $t > 0$ – это измеримая функция относительно аргумента $x$ и – вероятностная плотность относительно аргумента $y$). Условием согласования является уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$p(x, t+s, y) = \int p(x,t,z)p(z,s,y)\,dz.$$

Марковское семейство мер $(P_x)$ называется однородным диффузионным, если

(a) для любого $r > 0$

$$P_x(X(t) \notin (x-r,\, x+r)) = o(t) \quad (t \to 0),$$

(b) существует такая функция $a(x)$, $x \in R$, что для некоторого $r > 0$

$$\int\limits_{x-r}^{x+r} (y-x)\, p(x,t,y)\, dy = a(x)t + o(t) \quad (t \to 0),$$

(c) существует такая функция $b(x)$, $x \in R$, что для некоторого $r > 0$

$$\int\limits_{x-r}^{x+r} (y-x)^2\, p(x,t,y)\, dy = b(x)t + o(t) \quad (t \to 0),$$

где $a(x)$ (коэффициент сноса) и $b(x) > 0$ (коэффициент диффузии).

Если существуют частные производные $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}p(x,t,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $p(x,t,y)$, то переходная плотность процесса удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (см., например, [3])

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\, b(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{16}$$

Это – так называемое обратное уравнение Колмогорова для однородного марковского диффузионного процесса.

Обстоятельство, о котором шла речь выше, касается условия (a). В дальнейшем нам удобнее иметь дело с условием

(a1) для любого достаточно малого $r > 0$ $P_x(\sigma_{(x-r,x+r)} \leqslant t) = o(t)$.

Событие $\{\sigma_{(x-r,x+r)} \leqslant t\}$, означает

$$\{\inf\{s : X(s) \notin (x-r, x+r)\} \leqslant t\} = \{(\exists s \leqslant t)\, X(s) \notin (x-r, x+r)\}.$$

Отсюда

$$\{X(t) \notin (x-r, x+r)\} \subset \{\sigma_{(x-r,x+r)} \leqslant t\},$$
$$P_x(X(t) \notin (x-r, x+r)) \leqslant P_x(\sigma_{(x-r,x+r)} \leqslant t).$$

Следовательно, если правая часть этого неравенства есть $o(t)$, то такова же будет и левая часть этого неравенства. Это кажущееся усиление предположения о семействе мер процесса не приводит к ослаблению результата, состоящего в выводе обратного уравнения Колмогорова, так как в результате построения семейства мер процесса по исходному условию (a) мы приходим к условию (a1), которое выполняется для построенного диффузионного марковского процесса (см. Приложение). В этом смысле условия a) и a1) эквивалентны по крайней мере

при ограничении на коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, о котором будет сказано ниже.

Рассмотрим функцию $g(x) \equiv g_\Delta(\lambda \,|\, x)$, где $\Delta = (a, b)$ и $a < x < b$. Для любого $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty) \\ &= E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty,\ t < \sigma_\Delta) \\ &+ E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty,\ t \geqslant \sigma_\Delta). \end{aligned}$$

Очевидно, что окрестность $(x-r, x+r)$ начальной точки является подмножеством интервала $\Delta$ для всех достаточно малых $r > 0$. Следовательно, благодаря условию a1) второе слагаемое предыдущей суммы есть $o(t)$.

Очевидно, что на множестве $\{t < \sigma_\Delta\}$ справедливы представления

$$\sigma_\Delta = t + \sigma_\Delta \circ \theta_t,$$

$$X(\sigma_\Delta) = X(t + \sigma_\Delta \circ \theta_t) = X(\sigma_\Delta) \circ \theta_t.$$

Отсюда, используя марковское свойство процесса, получаем

$$\begin{aligned} g(x) &= E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty,\ t < \sigma_\Delta) + o(t) \\ &= e^{-\lambda t} E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) \circ \theta_t = a,\ \sigma_\Delta \circ \theta_t < \infty, t < \sigma_\Delta) + o(t) \\ &= e^{-\lambda t} E_x(E_{X(t)}(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty);\ t < \sigma_\Delta) + o(t) \\ &= e^{-\lambda t} E_x(E_{X(t)}(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = a,\ \sigma_\Delta < \infty)) + o(t) \\ &= e^{-\lambda t} E_x(g(X(t))) + o(t) = e^{-\lambda t} \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)\, p(x,\, t,\, y)\, dy + o(t) \\ &= e^{-\lambda t} g(x) + e^{-\lambda t} \int\limits_{\mathbb{R}} (g(y) - g(x))\, p(x,\, t,\, y)\, dy + o(t). \end{aligned}$$

Предположим, существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $x$ как сама функция $g$, так и её производные $g'$, $g''$. Тогда, как известно (см., например, [3], с. 172), интеграл в этом выражении, делённый на $t$, при $t \to 0$ стремится к пределу

$$\frac{1}{2} b(x) g''(x) + a(x) g'(x).$$

Отсюда в окрестности точки $x$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}b(y)g'' + a(y)g' - \lambda g = 0. \tag{17}$$

Этим же путём получаем дифференциальное уравнение для функции

$$h(x) \equiv h_\Delta(\lambda \,|\, x) \equiv E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ X(\sigma_\Delta) = b,\ \sigma_\Delta < \infty).$$

Если существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $x$ как сама функция $h$, так и её производные $h'$, $h''$, то в этой окрестности справедливо уравнение

$$\frac{1}{2}b(y)h'' + a(y)h' - \lambda h = 0, \tag{18}$$

Итак мы видим, что для диффузионного марковского процесса функции $g$ и $h$ составляют систему фундаментальных решений дифференциального уравнения (7), у которого

$$A(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad B(\lambda \,|\, x) = \frac{\lambda}{b(x)}.$$

В частности, при $\lambda = 0$ мы получаем уравнение (11) и все следствия из этого уравнения, касающиеся недостижимых границ интервала.

Заметим, что с точки зрения вероятностной интерпретации уравнения (7) условие $B(0 \,|\, x) = 0$ означает отсутствие обрыва у построенного марковского процесса [1] и отсутствие бесконечного интервала постоянства у построенного полумарковского процесса. При отсутствии этого условия недостижимость некоторой границы могла бы произойти в результате обрыва (остановки) процесса до достижения границы. Вместе с тем положительность коэффициента $B(0 \,|\, x)$ сильно усложняет задачу и составляет для нас предмет будущих исследований.

**Приложение.** Очередная наша задача – установить эквивалентность условий “a” и “a1” при определении диффузионного марковского процесса.

**Однородный в пространстве процесс.** Для начала мы рассмотрим однородный диффузионный марковский процесс $X(t)$ с постоянными коэффициентами сноса $a_0$ и диффузии $b_0 > 0$. Пусть $X(0) = 0$

и $b_0 = 1$. Известно, что плотность распределения момента первого достижения процессом $X(t)$ точки $r > 0$ равна

$$q_b(t) = \frac{r}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(r-at)^2}{2t}\right).$$

Функцию распределения, соответствующую этой плотности, можно записать в терминах обратного гауссовского распределения в виде

$$P_0(\sigma_{(-\infty,r)} < t) = \mathrm{IG}\ (t\,|a_0, r) \equiv \Phi\left(\frac{-r+a_0 t}{\sqrt{t}}\right) + e^{a_0}\,\Phi\left(\frac{-r-a_0 t}{\sqrt{t}}\right),$$

где $\Phi$ – функция распределения стандартного нормального распределения. В этом легко убедиться, дифференцируя это выражение по $t$. Применяя асимптотику Милля (см., например, [11], стр.93)

$$\Phi(-y) \sim \frac{\phi(y)}{y} \quad (y \to \infty)$$

(где $\phi$ – плотность стандартного нормального распределения), которую легко проверить, применяя правило Лопиталя к отношению правой части этой эквивалентности к левой, мы получаем

$$\frac{1}{t} P_0(\sigma_{(-\infty,r)} < t) \sim y^2\,\Phi(-ry)(1+e^{a_0}) \quad (y \to \infty),$$

где $\frac{1}{\sqrt{t}} \equiv y$, и предел (при любом $r > 0$)

$$y^2 \frac{\phi(ry)}{ry}(1+e^{a_0}) = \frac{y}{r\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2 r^2}{2}}(1+e^{a_0}) \to 0 \quad (y \to \infty).$$

Это означает, что $P_0(\sigma_{(-\infty,r)} < t) = o(t) \quad (t \to 0)$. Аналогично доказывается, что $P_0(\sigma_{(-r,\infty)} < t) = o(t) \quad (t \to 0)$.

Пусть $\Delta = (c, d)$ и $x \in \Delta$. Имеем $\Delta = (-\infty, d) \cap (c, \infty)$. Отсюда

$$\sigma_\Delta = \min(\sigma_{(-\infty,d)}, \sigma_{(c,\infty)}),$$

и следовательно,

$$\{\sigma_\Delta < t\} = \{\sigma_{(-\infty,d)} < t\} \cup \{\sigma_{(c,\infty)} < t\}.$$

Отсюда

$$P_x(\sigma_\Delta < t) \leqslant P_x(\sigma_{(-\infty,d)} < t) + P_x(\sigma_{(c,\infty)} < t).$$

Используя однородность процесса в пространстве и доказанные выше асимптотики, получаем

$$P_x(\sigma_\Delta < t) = o(t) \quad (t \to 0).$$

**Теорема сравнения.** Далее мы будем рассматривать однородный во времени диффузионный марковский процесс с непрерывным параметром сноса $a(x)$ и непрерывно дифференцируемым параметром диффузии $b(x)$ Наша задача состоит в том, чтобы сравнить вероятности первого выхода из интервала для такого процесса с таковыми же для некоторого процесса с постоянными коэффициентами сноса и диффузии.

Метод доказательства следующей леммы заимствован из книги [2], стр. 120.

**Лемма 2.** *Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ – решения стохастических дифференциальных уравнений*

$$d\xi_i(t) = a_i(\xi_i(t))\,dt + dw(t) \quad (i = 1,\, 2),$$

*где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, и $\xi_i(0) = x$. Пусть $\Delta$ – ограниченный интервал, $a_2(x)$, $a_1(x)$ – непрерывные функции на замыкании $\Delta$ и $a_2(x) > a_1(x)$ для любого $x \in \Delta$. Тогда с вероятностью равной единице справедливо:*

1) *величина $T \equiv \inf\{t > 0 : \xi_2(t) = \xi_1(t)\}$ подчиняется условию $T \geqslant \min\{\sigma_\Delta(\xi_1),\, \sigma_\Delta(\xi_2)\}$; в частности, возможна ситуация, когда $T = \infty$, что соответствует случаю, когда множество $\{t > 0 : \xi_2(t) - \xi_1(t) = 0\}$ пусто;*

2) *$\sigma_\Delta(\xi_1) < \sigma_\Delta(\xi_2)$ тогда и только тогда, когда $X(\sigma_\Delta(\xi_1)) = c$, и $\sigma_\Delta(\xi_1) > \sigma_\Delta(\xi_2)$ тогда и только тогда, когда $X(\sigma_\Delta(\xi_2)) = d$.*

**Доказательство.** 1) Рассмотрим разность

$$\rho(t) \equiv \xi_2(t) - \xi_1(t) = \int\limits_0^t (a_2(\xi_2(s)) - a_1(\xi_1(s)))\,ds.$$

Функция $\rho(t)$ дифференцируема при любом $t \geqslant 0$, $\rho(0) = 0$ и при $t = 0$ её производная справа положительна. Если $T < \min\{\sigma_\Delta(\xi_1),\, \sigma_\Delta(\xi_2)\}$, то, во-первых, $\rho(T) = 0$ и, следовательно, $\rho'(T) \leqslant 0$. Во-вторых, $\rho'(T) = a_2(\xi_2(T)) - a_1(\xi_1(T)) > 0$, так как $\xi_2(T) = \xi_1(T) \in \Delta$. Получаем противоречие. Следовательно, $T \geqslant \min\{\sigma_\Delta(\xi_1),\, \sigma_\Delta(\xi_2)\}$.

2) Вторая часть утверждения леммы вытекает из того, что до момента $T$ выполняется условие $\xi_2(t) > \xi_1(t)$. □

Чтобы воспользоваться этой леммой для однородного диффузионного марковского процесса $\xi(t)$ с непостоянными коэффициентами

сноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$, можно преобразовать фазовое пространство на интервале $\Delta$ с помощью некоторого возрастающего непрерывного отображения $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$, для которого существуют и непрерывны первая и вторая производные, и рассмотреть случайный процесс $\zeta(t) = f(\xi(t))$ $(t \geqslant 0)$ до момента первого выхода из интервала $f(\Delta)$ (см. [2], стр. 34).

**Теорема 2.** *Для любых интервалов $\Delta \equiv (c, d)$ и точек $x_0$, где $-\infty < c < x_0 < d < \infty$ справедливо*

$$P_{x_0}(\sigma_\Delta < t) = o(t) \quad (t \to 0),$$

*где $(P_x)$ согласованное семейство мер однородного во времени марковского диффузионного процесса с траекториями $(\xi(t))$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению*

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\, dt + b(\xi(t))\, dw(t), \tag{19}$$

*где $a(x)$ – непрерывная функция и $b(x)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция, такая что для некоторого $\epsilon > 0$ при всех $x \in \Delta$ $b(x) \geqslant \epsilon$.*

**Доказательство.** Пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$. Согласно формуле Ито, $\zeta(t) \equiv f(\xi(t))$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\zeta(t) = \overline{a}(\zeta(t))\, dt + \overline{b}(\zeta(t))\, dw(t),$$

где

$$\overline{a}(x) = f'(f^{-1}(x))\, a(f^{-1}(x)) + \frac{1}{2} f''(f^{-1}(x))\, b^2(f^{-1}(x)),$$

$$\overline{b}(x) = f'(f^{-1}(x))\, b(f^{-1}(x))$$

и $f^{-1}$ – обратная функция к функции $f$ (т.е. $(\forall x)\, f^{-1}(f(x)) = x$). Для того, чтобы получить тождество $\overline{b}(x) \equiv 1$, достаточно определить при $x \in \Delta$

$$f(x) = C + \int_c^x \frac{dy}{b(y)},$$

где $\Delta = (c, d)$, $C$ – произвольная постоянная. Продолжение этой функции на всю числовую прямую с сохранением условий возрастания и дважды непрерывной дифференцируемости в любой точке прямой может быть сделано многими способами, но значения продолженной $f$

на множестве $\mathbb{R}\setminus\Delta$ в дальнейшем не используются. При этом при всех $y \in (f(c), f(d))$

$$\overline{a}(y) = \frac{a(f^{-1}(y))}{b(f^{-1}(y))} - \frac{1}{2}b'(f^{-1}(y)).$$

В частности, при постоянных коэффициентах сноса $a_0$ и диффузии $b_0 > 0$ справедливо

$$\overline{a}_0(y) = \frac{a_0}{b_0}.$$

Для двух однородных во времени марковских диффузионных процессов $\xi_i(t) \quad (i = 1, 2)$ с с общей начальной точкой $x_0 \in \Delta$ и с коэффициентами $a_i(x)$, $b_i(x)$, преобразованных с помощью функций $f_i$ предыдущего вида, справедлива разность

$$\rho(t) \equiv \zeta_2(t) - \zeta_1(t) = \zeta_2(0) - \zeta_1(0) + \int\limits_0^t (\overline{a}_2(\zeta_2(s)) - \overline{a}_1(\zeta_1(s)))\, ds.$$

Имеем $\xi_i(0) = x_0$ п. н. относительно меры $P_{x_0}$, откуда $\zeta_i(0) = f_i(x_0)$. За счёт выбора произвольных постоянных можно добиться равенства $\zeta_2(0) = \zeta_1(0)$. Чтобы применить лемму, предположим, что $\zeta_2$ – выборочная траектория однородного во времени и пространстве марковского диффузионного процесса с коэффициентом сдвига $a_0/b_0$ и с коэффициентом диффузии равном единице; $\zeta$ – выборочная траектория однородного во времени марковского диффузионного процесса с коэффициентом сдвига на интервале $(f(c), f(d))$

$$\overline{a}_1(y) = \frac{a(f^{-1}(y))}{b(f^{-1}(y))} - \frac{1}{2}b'(f^{-1}(y))$$

и с коэффициентом диффузии равном единице, где $a(x)$, $b(x)$ – соответствующие коэффициенты исходного процесса $\xi(t)$.

При этом выборе из леммы 2 мы получаем относительно величины

$$T \equiv \inf\{t > 0 : \ \zeta_2(t) = \zeta(t)\},$$

соотношение

$$T \geqslant \min\{\sigma_{\Delta_0}(\zeta_2), \sigma_{\Delta_0}(\zeta)\},$$

где $\Delta_2 = f_2(\Delta)$ (образ интервала $\Delta$ при отображении $f_2$) и $\Delta_0 = f(\Delta)$ (образ интервала $\Delta$ при отображении $f$).

Далее мы использует принцип подобия, который следует из взаимно однозначного соответствия любого $f : \ \Delta \mapsto f(\Delta)$, а именно

$$\sigma_{f(\Delta)}(f(\xi)) = \sigma_\Delta(\xi). \tag{20}$$

Отсюда

$$T \geqslant \min\{\sigma_\Delta(\xi_2), \sigma_\Delta(\xi)\}.$$

Применяя второе утверждение леммы, мы получаем, что на множестве $\{X(\sigma_\Delta(\xi_2)) = d\}$ (где $\Delta \equiv (c, d)$) выполняется $\sigma_\Delta(\xi_2) \leqslant \sigma_\Delta(\xi)$. Отсюда из условия $\{\sigma_\Delta(\xi) < t\}$ следует $\{\sigma_\Delta(\xi_2) < t\}$. И относительно любой вероятностной меры $P_x$ справедливо

$$P_x(\sigma_\Delta(\xi) < t, X(\sigma_\Delta(\xi)) = d) \leqslant P_x(\sigma_\Delta(\xi_2) < t, X(\sigma_\Delta(\xi_2)) = d).$$

Но правая часть этого неравенства относится к однородному в пространстве диффузионному марковскому процессу, для которого доказано

$$P_x(\sigma_\Delta(\xi_2) < t, X(\sigma_\Delta(\xi_2)) = d) \leqslant P_x(\sigma_\Delta(\xi_2) < t) = o(t) \quad (t \to 0).$$

Следовательно, и для левой части неравенства справедливо

$$P_x(\sigma_\Delta(\xi) < t, X(\sigma_\Delta(\xi)) = d) = o(t) \quad (t \to 0).$$

Асимптотика

$$P_x(\sigma_\Delta(\xi) < t, X(\sigma_\Delta(\xi)) = c) = o(t) \quad (t \to 0)$$

доказывается аналогично с помощью другого однородного в пространстве и во времени диффузионного марковского процесса $\xi_1$, у которого коэффициенты сноса $a_1$ и диффузии $b_1$ на интервале $\Delta$ удовлетворяют условию

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a(f^{-1}(x))}{b(f^{-1}(x))} - \frac{1}{2}b'(f^{-1}(x)). \qquad \square$$

## Литература


1. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* М., ФМ 1963.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев, Наукова думка 1968.
3. Ю. А. Розанов, *Случайные процессы.* М., Наука 1979.
4. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* СПб, Наука 2001.
5. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **351** (2007), 284–297.
6. Б. П. Харламов, *О марковском диффузионном процессе с замедленным отражением на границе отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **368** (2009), 231–255.
7. Б. П. Харламов. *О точках задержки и асимметрии одномерного диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **384** (2010), 292–310.
8. Б. П. Харламов, С. С. Расова, *О движении броуновских частиц вдоль задерживающего экрана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **396** (2011), 175–194.

9. Б. П. Харламов, *Сохранение марковости при замедленном отражении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **420** (2013), 157–174.
10. A. S. Cherny, H.-J. Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations.* Shpringer, Berlin–Heidelberg–New York (2005).
11. Th. Mikosch, *Non-life insurance mathematics.* Springer-Verlag, Berlin (2004).

Harlamov B. P. On unattainable boundaries of a diffusion process range of values: semi-Markov approach.

One-dimensional homogeneous semi-Markov processes of diffusion type are considered. A transition function of such a process satisfy an ordinary second order differential equation. It is supposed that the process does not break and has no any interval of constancy. Under these conditions the Dirihlet problem has a solution on any finite interval. This solution is presented in explicit form in terms of solutions having values 1, and 0 on the boundaries of the interval. A criterion for the left boundary of the interval to be unattainable is derived, and for corresponding values 0, and 1 a criterion for the right boundary of the interval to be unattainable is derived. This criterion being applied to a diffusion process follows from known formulas which are derived by considerably complex methods of the stochastic differential equations theory.

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В.О. 61
199034 Санкт-Петербург
Россия
*E-mail*: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 31 августа 2017 г.