Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

В. Н. Солев

ЛОКАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ УСЛОВИЯ МАККЕНХАУПТА И ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ПСЕВДО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ НА ФОНЕ СТАЦИОНАРНОГО ШУМА

§1. Введение

Пусть на растущем отрезке $[-T,T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T,T]. \tag{1}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемых функций s, таких что

$$\|s\|_{\mathscr{L}}^2 = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2\; dt < \infty; \tag{2}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями (см. подробнее в [1,2]) с нулевым средним и спектральной плотностью f,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u))}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{3}$$

Обозначим $\mathscr{L}(\Lambda)$ введенный Степановым (см. [4]) класс псевдопериодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00828 и программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики" (грант PRAS-18-01).

предполагая, что Λ – счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u-v| > 0. \tag{5}$$

В [4] установлено, что при условии (5) ряд в (4) сходится в $\mathscr{L}$.

Выделим центрально-симметричное подмножество $\mathscr{L}_* \subset \mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(1+|u|)^{2\beta} < L, \quad \beta > 1, \tag{6}$$

и примем обозначение $\mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)$ для определенного таким образом подмножества $\mathscr{L}_*$.

В работе [9] была рассмотрена задача оценивания неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$ по наблюдениям (1) при некоторых дополнительных условиях на спектральное множество Λ и класс $\mathscr{K}$ спектральных плотностей f, рассматриваемых как мешающий параметр. Одно из существенных ограничений на класс $\mathscr{K}$ в [9] является равномерное по классу $\mathscr{K}$ условие Маккенхаупта (см. [6]), которое мы запишем в следующем виде

$$\lambda(f) := \sup_{\varepsilon>0,\, u\in R} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-x)\,dx\, \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{f(u-x)}\,dx \leqslant \lambda(\mathscr{K}) < \infty.$$

Здесь и далее, чтобы избежать неопределенности, мы предполагаем, что средние значения $[f]_\varepsilon(u)$ функций $f\in\mathscr{K}$ на любых отрезках $[u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ отличны от нуля,

$$[f]_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-x)\,dx. \tag{7}$$

Переписывая равномерное условие Маккенхаупта в виде

$$\lambda(f) := \sup_{\varepsilon>0,\, u\in R} [f]_\varepsilon(u)\,[1/f]_\varepsilon(u) \leqslant \lambda(\mathscr{K}) < \infty, \tag{8}$$

мы выскажем интуитивное предположение о том, что, возможно, ограничение поведения произведения средних значений $[f]_\varepsilon(u)\,[1/f]_\varepsilon(u)$ должно касаться только точек u из спектрального множества Λ. К сожалению, это не так. Однако, если перейти к другому усреднению, отличному от (7), высказанное предположение оказывается верным.

В настоящей работе мы будем использовать для неотрицательных функций g при $\varepsilon > 0$ усредненные значения $\lceil g \rceil_\varepsilon (u)$ в точке u, вычисленные по ядру Пуассона (см. [8]),

$$\lceil g \rceil_\varepsilon (u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi\,((u-x)^2+\varepsilon^2)}\, g(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\,(y^2+1)}\, g(u+\varepsilon y)\, dy.$$

Это позволит нам без существенных потерь заменить равномерное условие Маккенхаупта (8) некоторым его локальным аналогом, локальным в том смысле, что мы ограничиваем поведение средних значений $\lceil f \rceil_\varepsilon (u)$ и $\lceil 1/f \rceil_\varepsilon (u)$ только на спектральном множестве Λ. Именно, мы будем предполагать, что

$$\widetilde{\lambda}(f) := \sup_{\varepsilon_0 > \varepsilon > 0,\, u \in \Lambda} \lceil f \rceil_\varepsilon \, (u)\, \lceil 1/f \rceil_\varepsilon \, (u) \leqslant \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\mathscr{K}) < \infty. \qquad (9)$$

Мы будем предполагать также, что точки спектрального множества Λ в следующем смысле достаточно плотно заполняют симметричные отрезки $[-m, m]$ большой длины: при некотором положительных a для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u \in \Lambda,\, |u| \leqslant m} (1+|u|)^{2\beta}. \qquad (10)$$

Заметим, что, если выполнено условие отделимости (5), то при условии (10) при подходящем A, зависящем от τ,

$$a\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u \in \Lambda,\, |u| \leqslant m} (1+|u|)^{2\beta} \leqslant A\, m^{2\beta+1}. \qquad (11)$$

Для неотрицательной функции g обозначим L^2_g пространство L^2, построенное по мере с плотностью g. Так что скалярное произведение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ в пространстве L^2_g определено соотношением

$$(\varphi_1, \varphi_2)_g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, \overline{\varphi_2(x)}\, g(x)\, dx.$$

Условия на функцию f, определяющие класс спектральных плотностей $\mathscr{K}$, будут состоять в следующем. Прежде всего мы будем предполагать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx < \infty, \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)\,(1+x^2)}\,dx < \infty. \tag{12}$$

При фиксированном $\varepsilon_0 > 0$ мы потребуем, чтобы

$$\widetilde{\lambda}(f) := \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\, u\in\Lambda} \lceil f \rceil_\varepsilon (u) \ \lceil 1/f \rceil_\varepsilon (u) < \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\mathscr{K}) < \infty. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение класс $A(\alpha, \beta; b, B; m_0)$ неотрицательных функций g, определив его для $\alpha > -1$, $\beta > 1$, неотрицательных $b \leqslant B$ условиями: при достаточно больших m, $m > m_0$, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$b\,\varepsilon^\alpha \leqslant \frac{\sum\limits_{u\in\Lambda,\,|u|\leqslant m} [f]_\varepsilon (u)\,(1+|u|)^{2\beta}}{\sum\limits_{u\in\Lambda,\,|u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\beta}}\ , \ \frac{1}{N(m)} \sum_{u\in\Lambda,\,|u|\leqslant m} [f]_\varepsilon (u) \leqslant B\,\varepsilon^\alpha. \tag{14}$$

Здесь $N(m)$ – число точек из Λ, содержащихся в отрезке $[-m, m]$. Несколько иной класс был предложен в [7]. Последнее наше условие на класс $\mathscr{K}$ состоит в следующем: $\mathscr{K} \subset A(\alpha, ; \beta; b, B; m_0)$ при некоторых α, β, b, B, m_0.

Пусть $\widehat{s}_T$ – оценка неизвестной функции s, построенная по наблюдениям (1), $\widehat{s}_T \in \mathscr{L}_*$. Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*\right) = \sup_{s\in\mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f}\ \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}} \tag{15}$$

Обозначим $\mathscr{R}_T$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T\right). \tag{16}$$

Основной результат настоящей работы состоит в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть спектральное множества Λ удовлетворяет условию отделимости $\tau(\Lambda) > 0$ и условию* (10), *множество $\mathscr{L}_*$ выделено из класса Степанова $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием* (6). *Тогда, если спектральная плотность $f \in \mathscr{K}$, то найдутся такая положительная константа $T_0 = T_0(r, \tau, \mathscr{K})$ и такие положительные $\kappa_1 = \kappa_1(r, \tau, a, \mathscr{K}, \Lambda) \leqslant \kappa_2 = \kappa_2(r, \tau, a, \mathscr{K}, \Lambda) < \infty$, что при $T > T_0$*

$$\kappa_1\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}} \leqslant \ \mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*) \leqslant \kappa_2\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}}. \tag{17}$$

§2. Пространство L^2_T

Вместе с банаховой нормой, определенной в (2), будем также рассматривать гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \Big\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \Big\}^{1/2} < \infty, \quad \text{и } \|s\|_T := \Big\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 \, dt \Big\}^{1/2},$$

и использовать обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением и соответствующей нормой

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)} \, dt, \quad \|s\|^2_T = (s, s)_T.$$

Н. Винер и Р. Пэли установили в [5], что при условии отделимости (5) на спектральное множество Λ найдутся такие положительные константы $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что

$$c_1 \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1 \|s\|_{\mathscr{L}}, \quad s \in \mathscr{L}(), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \tag{18}$$

и при $T \geqslant T_0 = T_0(\tau)$

$$c_2 \|s\|_T \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2 \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}. \tag{19}$$

В частности, найдутся такие положительные константы $c = c(\tau), C = C(\tau)$, зависящие только от τ, что при $T \geqslant T_0$,

$$c \|s\|_T \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda). \tag{20}$$

Пусть $\varphi_u(t) = e^{iut}$. При условии отделимости система $\{\varphi_u(t),\ u\in\Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}(\Lambda)$ (точнее в сужении $\mathscr{L}(\Lambda)$ на L^2_T) в метрике пространства L^2_T. В дальнейшем нам удобно будет считать, что функции из L^2_T равны нулю вне отрезка $[-T, T]$.

Примем обозначение $\varphi_u(T; t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, e^{iut}$. Пусть $r > T_0$ и $\{\psi^r_u,\ u \in \Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L^2_r) к системе $\{\varphi_u(r; \cdot),\ u \in \Lambda\}$:

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \varphi_u(r; t)\, \overline{\psi^r_v(t)} \, dt = \delta_{u,v}.$$

При фиксированном $r > T_0(\tau)$ определим новую систему $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2r\,(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u(T-r;s)\,ds, \quad T > r, \tag{21}$$

напомнив, что по принятому ранее соглашению функции из L_r^2 равны нулю вне отрезка $[-r, r]$. В [9] было установлено, что

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\, e^{ivt}\, dt = \delta_{u,v}, \quad \text{если } v \in \Lambda. \tag{22}$$

§3. Аналог локального условия Маккенхаупта

В этом пункте мы будем предполагать, что неотрицательная функция f удовлетворяет условию

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\, u\in\Lambda} \lceil f \rceil_\varepsilon(u)\ \lceil 1/f \rceil_\varepsilon(u) \leqslant \widetilde{\lambda} < \infty, \tag{23}$$

напомнив, что усредненное значение $\lceil f \rceil_\varepsilon(u)$ функции f в точке u определено при $\varepsilon > 0$ следующим образом

$$\lceil f \rceil_\varepsilon(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi\,((u-x)^2 + \varepsilon^2)}\, f(x)\, dx. \tag{24}$$

Мы будем использовать при $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ неравенство

$$\lceil f \rceil_\varepsilon(u) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\, \lceil f \rceil_{\varepsilon'}(u). \tag{25}$$

Мы будем также рассматривать при $T > 0$ усредненные значения $\lfloor f \rfloor_T(u)$ вида

$$\lfloor f \rfloor_T(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(u-x)}{T\pi\,(u-x)^2}\, f(x)\, dx. \tag{26}$$

Из неравенств

$$\frac{T}{\pi^2}\, \mathbf{1}_{|u-x|\leqslant 1/T} \leqslant \frac{\sin^2 T(u-x)}{T\pi\,(u-x)^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{1/T}{(u-x)^2 + (1/T)^2}$$

следует, что при положительных $\varepsilon = 1/T$

$$\frac{2}{\pi^2}\,[f]_\varepsilon(u) \leqslant \lfloor f \rfloor_T(u) \leqslant 2\,\lceil f \rceil_\varepsilon(u). \tag{27}$$

Для простоты всюду далее мы будем предполагать, что $\varepsilon_0 < 1$. В сущности это предполагает, что мы будем выбирать величину $T > T_0 > 1$. Очевидно, при $0 < \varepsilon < 1$

$$\lceil f \rceil_\varepsilon(u) \geqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,[f]_\varepsilon(u). \tag{28}$$

Из (23) и неравенства (28), примененного к функции $1/f$, получаем следующую цепочку неравенств

$$[f]_\varepsilon(u) \geqslant \frac{1}{[1/f]_\varepsilon(u)} \geqslant \frac{1}{\pi\,\lceil 1/f \rceil_\varepsilon(u)} \geqslant \frac{1}{\widetilde{\lambda}\pi}\,\lceil f \rceil_\varepsilon(u).$$

Таким образом, при условии (23)

$$\frac{1}{\pi}\,[f]_\varepsilon(u) \leqslant \lceil f \rceil_\varepsilon(u) \leqslant \widetilde{\lambda}\pi\,[f]_\varepsilon(u). \tag{29}$$

Так что вместе с (23) при некотором λ, зависящем только от $\widetilde{\lambda}$, выполнено также и неравенство

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\,u\in\Lambda} [f]_\varepsilon(u)\,[1/f]_\varepsilon(u) \leqslant \lambda < \infty. \tag{30}$$

Отметим также, что при условии (23) (как это следует из (27) и (29)) при положительных $\varepsilon = 1/T$

$$\frac{2}{\pi^2}\,[f]_\varepsilon(u) \leqslant \lfloor f \rfloor_T(u) \leqslant 2\,\widetilde{\lambda}\pi\,[f]_\varepsilon(u). \tag{31}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать аналог леммы 4.2 из [9], в котором вместо равномерного (по $f \in \mathscr{K}$) условия Маккенхаупта будет использовано условие

$$\widetilde{\lambda}(f) := \sup_{\varepsilon_0>\varepsilon>0,\,u\in\Lambda} \lceil f \rceil_\varepsilon(u)\,\lceil 1/f \rceil_\varepsilon(u) \leqslant \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\mathscr{K}) < \infty.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\widetilde{\lambda}(f) \leqslant \widetilde{\lambda} < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < c(\tau, r, \widetilde{\lambda}) \leqslant C(\tau, r, \widetilde{\lambda}) < \infty$, зависящие только от*

$\widetilde{\lambda}, r$ и τ, что при $T > T_0(r,\tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g}_u^T$ функции g_u^T при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки

$$c(\tau,r,\widetilde{\lambda})\,T\ [f]_\varepsilon\,(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\,dx \leqslant C(\tau,r,\widetilde{\lambda})\,T\ [f]_\varepsilon\,(u). \qquad (32)$$

Доказательство леммы 3.1 по существу повторяет доказательство леммы 4.2 из [9], однако использует оценки (29), (30), (31), справедливые при условии (23), соотношение (25) и предположение о том, что $T > 2r > 2T_0$.

Далее нас будут интересовать случайные величины вида

$$x\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dx(t), \qquad (33)$$

определенные, например, для линейного множества S функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2, \quad |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \quad \text{где } \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \qquad (34)$$

При этом

$$\mathbf{E}\,x[\varphi] = 0,\ \mathbf{E}\left|x\,[\psi]\right|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\varphi}(u)\right|^2 f(u)\,du. \qquad (35)$$

Теперь перейдем к аналогу леммы 4.3 из [9]. Обозначим

$$X_u = \frac{1}{2\,T}\,x\,[g_u^T]\,.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнено условие* (23) *и величина* $\tau = \tau(\Lambda) > 0$. *Тогда найдется такая константа* $c(\tau,r,\widetilde{\lambda}) > 0$, *зависящая только от* $\widetilde{\lambda}, r$ *и* τ, *что для любого конечного набора* $\{a(v),\, v \in \Lambda\}$

$$\mathbf{E}\,|X_u - \sum_{v \neq u} a(v) X_v|^2 \geqslant c(\tau,r,\widetilde{\lambda})\,\mathbf{E}\,|X_u|^2. \qquad (36)$$

Доказательство леммы 3.2 во всех существенных деталях повторяет доказательство леммы 4.3 из [9]. Единственное отличие состоит в том, что величина

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(z-u)}{\pi T\,(z-u)^2}\,\frac{1}{f(z)}\,dz$$

оценивается сверху величиной $2\widetilde{\lambda}\,\pi\,\left[f\right]_{\varepsilon}(u)$ по неравенству (31), вместо леммы 4.2 из [9] используется леммы 3.1 настоящей работы и неравенство (25).

§4. Оценка величины риска

В этом пункте мы перейдем к задаче оценивания неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2\,(1+|u|)^{2\beta} < L, \quad \beta > 1,$$

по наблюдениям на отрезке $[-T, T]$ над процессом $y(t)$, определенным в (1). С аналитической точки зрения удобно считать, что наблюдению доступны случайные величины

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in \mathscr{D}(T) = \{\varphi:\ \varphi \in S, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]\}, \tag{37}$$

где линейное множество S определено в (34). Здесь

$$y[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dy(t), \quad s[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt, \quad x[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dx(t).$$

Повторяя рассуждения, использованные в [9], мы перейдем к дискретной схеме, когда наблюдаются случайные величины

$$Y_u = \frac{1}{2\,T}\,y\,[g_u^T] = a(u) + X_u.$$

Здесь мы использовали соотношение (22). Обозначим

$$\sigma_f^2(u) = \mathbf{D}\,X_u = \frac{1}{4T^2}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^{\,T}(t)|^2\,f(t)\,dt.$$

Из леммы 3.1 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть* $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\widetilde{\lambda}(f) \leqslant \widetilde{\lambda} < \infty$. *Тогда найдутся такие константы* $0 < d(\tau, r, \widetilde{\lambda}) \leqslant D(\tau, r, \widetilde{\lambda}) < \infty$, *зависящие только от* $\widetilde{\lambda}, r$ *и* τ, *что при* $r, T > T_0(\tau)$ *и при* $\varepsilon = 1/T$ *справедливы оценки*

$$d(\tau, r, \widetilde{\lambda})\, \varepsilon\, [f]_\varepsilon\, (u) \leqslant \sigma_f^2(u) \leqslant D(\tau, r, \widetilde{\lambda})\, \varepsilon\, [f]_\varepsilon\, (u). \tag{38}$$

Аналитические средства, приготовленные нами для анализа задачи оценивания: лемма 3.2 и лемма 4.1, ничем не отличаются от аналитических средств, использованных в [9]. Поэтому для доказательства теоремы 1.1 достаточно просто повторить соответствующие выкладки работы [9].

Литература

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее примен. **29** (1984), 19–32.
4. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus, **181** (1925), 90–92.
5. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
6. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New York, 1981.
7. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, **2** (2010), 106–115.
8. В .Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **278** (2001), 225–247.
9. В. Н. Солев, *Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **454** (2016), 261–275.

Solev V. N. A local version of the Muckenhoupt condition and the accuracy of estimation of the unknown pseudo periodic function in stationary noise.

In the paper, we construct the lower and upper bounds of the minimax risk in the estimation problem, as we observe the unknoun pseudo periodic

function in stationary noise with a density satisfying the local version of the Muckenhoupt condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: solev@pdmi.ras.ru

Поступило 13 ноября 2017 г.

Санкт–Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9, 199034, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com