Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2015 г.

Л. В. Розовский

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В "ИНТЕРВАЛЬНОЙ" ЦПТ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Введение и результаты. В дальнейшем $\{X_j,\, j \geqslant 1\}$ является последовательностью независимых случайных вектор-столбцов в R_k с нулевыми средними и конечными вторыми моментами. Будем предполагать, что матрица ковариаций суммы $S = \sum\limits_{j\geqslant 1} X_j$

$$V = \mathbf{E}\, S\, S' = \sum_{j\geqslant 1} \mathbf{E}\, X_j\, X_j' \tag{1.1}$$

невырождена (знак $'$ означает транспонирование).

Пусть W обозначает распределение суммы S, $f(t) = \mathbf{E}\, e^{i\,(t,\,S)}$ – ее характеристическую функцию, а Φ_V – гауссовское распределение в R_k с нулевым средним и ковариационной матрицей V (здесь и далее, $(t,x) = t'x$ - скалярное произведение k-мерных векторов $t = (t_1,\ldots,,t_k)'$ и $x = (x_1,\ldots,x_k)'$, а $|x|$ – евклидова норма вектора x).

Нас интересует точность нормальной аппроксимации вероятности $W(\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ – борелевское множество в R_k) в предположении конечности старших моментов у векторов X_j. Заметка является естественным продолжением работы [6]. Полученные в ней результаты являются уточнением (прежде всего за счет ослабления моментных предположений и более аккуратного учета зависимости от ковариационной матрицы V) и дополнением некоторых утверждений из [1–3]. Они являются новыми, в том числе – при $k = 1$.

Используем обозначения $\alpha_{lj}(t)$ и $\kappa_{lj}(t)$, $l = 1, 2, \ldots,$ для момента и кумулянта l-го порядка случайной величины $(t,\, X_j)$ и $\alpha_l(t)$, $\kappa_l(t)$ для их сумм:

$$\alpha_l(t) = \sum_{j\geqslant 1} \alpha_{lj}(t), \quad \kappa_l(t) = \sum_{j\geqslant 1} \kappa_{lj}(t). \tag{1.2}$$

Ключевые слова: центральная предельная теорема, независимые случайные векторы, объем борелевского множества, асимптотические разложения.

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ 16-01-00367.

Также положим $V_t = \sqrt{\alpha_2(t)}$,

$$\beta_l(t) = \int\limits_{R_k} |(t,\, x)|^l \,\Theta(dx), \quad \beta_l = \int\limits_{R_k} |x|^l \,\Theta(dx),$$

$$\bar\alpha_l(t) = \int\limits_{|(t,x)\leqslant 1} (t,x)^l \,\Theta(V_t\, dx)$$

где $\Theta(dx) = \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbf{P}(X_j \in dx)$ (таким образом, $\alpha_l(t) = \int\limits_{R_k} (t,\, x)^l \,\Theta(dx)$).

Как известно, при любом t из R_k

$$V_t = \sqrt{t'\,V\,t} \geqslant \gamma\,|t|. \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем, положительное γ обозначает квадратный корень из минимального собственного числа матрицы V.

Далее кратко опишем схему построения асимптотических разложений для распределения W (подробнее см. [3]–[5]). С этой целью определим многочлен $P_\nu(t)$, $\nu \geqslant 1$, как коэффициент при z^ν в формальном равенстве

$$\exp\Big(\sum_{l\geqslant 1} \frac{\kappa_{l+2}(t)}{(l+2)!}\, z^l\Big) = 1 + \sum_{\nu\geqslant 1} P_\nu(t)\, z^\nu \tag{1.4}$$

и положим

$$q_\nu(x) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^k \int\limits_{R_k} P_\nu(i\,t)\, e^{-V_t^2/2 - i\,(t,x)}\, dt. \tag{1.5}$$

Таким образом, $q_\nu(x) = P_\nu(-D)\,\phi_V(x)$, где ϕ_V – плотность распределения Φ_V, а $P_\nu(-D)$ является дифференциальным оператором, полученным из $P_\nu(i\,t)$ заменой $i\,t_j$ на $-\partial/\partial x_j$ (подробное описание функции $q_1(x)$ приведено в [3, (7.19)–(7.21)], случай $k=1$ рассмотрен в [5, гл. VI, (1.8)–(1.10)]).

Тогда $W(\mathcal{B}) = \Phi_V(\mathcal{B}) + Q_1(\mathcal{B}) + Q_2(\mathcal{B}) + \cdots$, где $Q_\nu(\mathcal{B}) = \int\limits_{\mathcal{B}} q_\nu(x)\, dx$, $\mathcal{B}$ – борелевское множество в R_k. При этом, если $\beta_{s+2} < \infty$, то функции $Q_\nu(\,\cdot\,)$, $\nu \leqslant s$, существуют.

Перейдем к точным формулировкам. Введем обозначения.

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\mathcal{B}^\varepsilon = \{x : |x-y| < \varepsilon,\ y \in \mathcal{B}\}$ и $\mathcal{B}^{-\varepsilon} = R_k \setminus (R_k \setminus \mathcal{B})^\varepsilon$. Объем борелевского множества $\mathcal{B}$ в R_k, площадь его поверхности и границу обозначим через $\nu(\mathcal{B})$, $s(\mathcal{B})$ и $\partial\mathcal{B}$, соответственно.

Начнем с результата, справедливого при условии (см. (1.2) и ниже)

$$\beta_s < \infty \quad \text{при некотором целом} \quad s \geqslant 2. \tag{1.6}$$

Положим

$$G_{s-2}(\mathcal{B}) = \Phi_V(\mathcal{B}) + \sum_{\nu=1}^{s-2} Q_\nu(\mathcal{B}), \quad \Delta_s(\mathcal{B}) = |W(\mathcal{B}) - G_{s-2}(\mathcal{B})|, \tag{1.7}$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{|t|=1} V_t^{-2} \int\limits_{|(t,\,x)|>\varepsilon} (t,\,x)^2\, \Theta(dx) \tag{1.8}$$

и

$$\omega_s = \sup_{|t|=1} \int\limits_{R_k} \left(|(t,x)|^s \wedge |(t,x)|^{s+1}\right)\, \Theta(V_t\, dx). \tag{1.9}$$

Заметим, что если функции $g(x)$ и $x/g(x)$ не убывают при $x > 0$, то $(1 \wedge x) \leqslant g(A\,x)/g(A)$ при любом $A > 0$, откуда $(A = 1)$

$$\omega_s \leqslant \sup_{|t|=1} \int\limits_{R_k} \frac{g(|(t,x)|)}{g(1)}\, |(t,x)|^s\, \Theta(V_t\, dx) \leqslant \frac{1}{g(1)} \int\limits_{R_k} g(|x|)\, |x|^s\, \Theta(\gamma\, dx), \tag{1.10}$$

и, в частности, $\omega_s \leqslant \gamma^{-s-r}\beta_{s+r}$, $0 < r \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.6) *и пусть* δ *удовлетворяет условию*

$$\Lambda(\delta) \leqslant 1/4. \tag{1.11}$$

Тогда найдутся постоянные A и a, зависящие лишь от k и s, такие что для любого борелевского множества $\mathcal{B}$ в R_k и любого положительного $\varepsilon \leqslant a\,\delta$

$$\Delta_s(\mathcal{B}) \leqslant A\left(\nu(\mathcal{B}^{a\,\varepsilon})\left((\det V)^{-1/2}\,\omega_s + I(\varepsilon)\right) + \mu_s(\mathcal{B},\varepsilon)\right), \tag{1.12}$$

где $I(\varepsilon) = \int\limits_{\delta^{-1}<|t|\leqslant\varepsilon^{-1}} |f(t)|\, dt, \quad \mu_s(\mathcal{B},\varepsilon) = \sup\limits_{z\in R_k} \int\limits_{(\partial\mathcal{B})^\varepsilon} |G_{s-2}(z+dy)|.$

Кроме того,

$$W(\mathcal{B}) \leqslant c\,\nu(\mathcal{B}^\varepsilon)\left((\det V)^{-1/2} + I(\varepsilon)\right), \tag{1.13}$$

где c зависит лишь от k.

В теореме 1 можно положить a равным решению уравнения

$$k \int_0^{a/2} J^2_{k/2}(r)/r\, dr = 2/3 \tag{1.14}$$

($J_\nu(\,\cdot\,)$ обозначает функцию Бесселя 1-го рода).

Отметим, что утверждение (1.13) практически совпадает с оценкой (1.7) из [6] и доказывается аналогично.

Замечание 1. Оценка (1.12) представляет интерес лишь тогда, когда ω_s мало (например, не превосходит единицу), и в противоположном случае вытекает из (1.13).

Условие (1.11) было подробно рассмотрено в [6, замечание 3]. В частности, при $s \geqslant 3$ в (1.11) можно выбрать $\delta = 4 \sup\limits_{|t|=1} V_t^{-2}\, \beta_3(t)$.

По поводу слагаемого $I(\varepsilon)$ заметим, что его поведение следует анализировать отдельно в каждом конкретном случае, используя, в том числе, оценки для характеристических функций из [7] (см. также [5, гл. I, §5,22]).

Замечание 2. Положим $\widetilde{\beta}_l = \sup\limits_{|t|=1} \beta_l(t/V_t)$ (очевидно, $\widetilde{\beta}_2 = 1$). Можно показать (см. [6, замечание 4]), что

$$\mu_s(\mathcal{B}, \varepsilon) \leqslant A_1\, (1 + \widetilde{\beta}_s)\, (\det V)^{-1/2}\, \nu((\partial\mathcal{B})^\varepsilon) \tag{1.15}$$

и, если борелевское множество $\mathcal{B}$ является выпуклым, то (см. (1.3))

$$\mu_s(\mathcal{B}, \varepsilon) \leqslant A_2\, (1 + \widetilde{\beta}_s)\, \varepsilon/\gamma \tag{1.16}$$

и, как показано в [1, леммы 8 и 9], $\nu((\partial\mathcal{B})^\varepsilon) \leqslant 2\,\varepsilon\, s(\mathcal{B}^\varepsilon)$ (при $k = 1$ полагаем $s(\mathcal{B}^\varepsilon) = 1$), где постоянные A_i зависят лишь от k и s.

Надо сказать, что (1.15) в ряде типичных ситуаций предпочтительнее “равномерного” условия (1.16) (например, при $k \geqslant 2$, когда множество $\mathcal{B}$ является шаром или кубом с малым диаметром).

Вернемся к теореме 1. Оценку (1.12) можно уточнить, заменив в ней ω_s при четных s на оптимальную, правда более сложно устроенную характеристику, и ослабив предположение (1.6) при нечетных s.

Начнем с ответа на первую задачу. Пусть *четное* $s \geqslant 2$. Обозначим

$$\widetilde{\omega}_s = \sup_{|t|=1} \int\limits_{R_k} \left((t,x)^s \wedge (t,x)^{s+2} \right) \Theta(V_t\, dx). \tag{1.17}$$

При $s \geqslant 4$ зададим функции $\tau_l(t)$, $2 \leqslant l \leqslant s-1$, равенством

$$\tau_l(t) = V_t^{-(s-1+2l)} \sum \prod_{m=1}^{s-2} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\kappa_{m+2}(t)}{(m+2)!} \right)^{k_m}, \tag{1.18}$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \ldots, k_{s-2})$ системы уравнений $k_1 + 2k_2 + \ldots + (s-2)k_{s-2} = s-1$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_{s-2} = l$. Например,

$$\tau_{s-1}(t) = \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\kappa_3(t)}{6\, V_t^3} \right)^{s-1}.$$

Положим

$$\bar{\kappa}_{s+1}(t) = -s!\, V_t^{-(s+1)} \sum_{l=2}^{s-1} \frac{\alpha_l(t)}{l!}\, \frac{\kappa_{s+1-l}(t)}{(s-l)!}$$

(формально $\bar{\kappa}_{s+1}(t) = \kappa_{s+1}(t/V_t) - \alpha_{s+1}(t/V_t)$) и (см. (1.17), (1.18), (1.2))

$$\psi_s = \widetilde{\omega}_s + \max_{2 \leqslant l \leqslant s-1} \sup_{|t|=1} |\tau_l(t)| + \sup_{|t|=1} |\bar{\kappa}_{s+1}(t) + \bar{\alpha}_{s+1}(t)|. \tag{1.19}$$

В частности, $\psi_2 = \widetilde{\omega}_2 + \sup\limits_{|t|=1} |\bar{\alpha}_3(t)|$.

Теорема 2. *Пусть $\beta_s < \infty$ при некотором четном $s \geqslant 2$ и выполнено условие* (1.11). *Тогда имеет место оценка* (1.12) *с заменой в ее правой части ω_s на ψ_s.*

То, что использованная нами характеристика ψ_s является оптимальной в некотором смысле, следует из [8, теоремы 3 и 4].

Отметим, что при $s = 2$ из теоремы 4 вытекает [6, теорема 1].

Теперь ослабим условие (1.6) при нечетном s. Дальнейшие наши рассуждения проводятся в соответствии с логикой работы [8].

Определим многочлен $\bar{P}_{s-1}(t)$, который при $l \leqslant s$ зависит лишь от “моментов” $\alpha_l(t)$, формальным равенством

$$\bar{P}_{s-1}(t) = P_{s-1}(t) - \frac{1}{(s+1)!}\, \alpha_{s+1}(t). \tag{1.20}$$

Запишем еще одно формальное равенство

$$\alpha_{s+1}(t) = \sum_{m_l\geqslant 0,\, m_1+\dots+m_k=s+1} \frac{(s+1)!}{m_1!\cdots m_k!} \prod_{l=1}^{k} t_l^{m_l}\, \alpha(m_1,\dots,m_k), \quad (1.21)$$

в котором

$$\alpha(m_1,\dots,m_k) = \int\limits_{R_k} \prod_{l=1}^{k} x_l^{m_l}\, \Theta(dx) \quad (1.22)$$

($t_l,\ x_l$ обозначают l-е координаты векторов t и x).

Заметим, что даже при условии $\beta_{s+1}=\infty$ некоторые интегралы в (1.22) могут существовать.

Пусть многочлен $\widetilde{\alpha}_{s+1}(t)$ образован путем замены в (1.21) коэффициентов $\alpha(m_1,\dots,m_k)$ некоторыми числами $\widetilde{a}(m_1,\dots,m_k)$, а многочлен $P_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(t)$ получен подстановкой в $P_{s-1}(t)$ вместо, вообще говоря, не существующего обобщенного момента $\alpha_{s+1}(t)$ его аналога $\widetilde{\alpha}_{s+1}(t)$, т.е.

$$P_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(t) = \bar{P}_{s-1}(t) + \frac{1}{(s+1)!}\,\widetilde{\alpha}_{s+1}(t). \qquad \text{В частности, } P_1^{(\widetilde{\alpha})}(t) = \widetilde{\alpha}_3(t)/6.$$

Например, можно положить $\widetilde{\alpha}_{s+1}(t)=0$ или (см. (1.3))

$$\widetilde{\alpha}_{s+1}(t) = \int\limits_{|x|\leqslant\gamma} (t,x)^{s+1}\,\Theta(dx). \quad (1.23)$$

В случае $\beta_{s+1}<\infty$, наиболее естественным представляется выбор $\widetilde{\alpha}_{s+1}(t)=\alpha_{s+1}(t)$.

Обозначим

$$q_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(x) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^k \int\limits_{R_k} P_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(i\,t)\, e^{-V_t^2/2 - i\,(t,x)}\, dt,$$

$$Q_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B}) = \int\limits_{\mathcal{B}} q_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(x)\, dx,$$

$$G_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B}) = G_{s-2}(\mathcal{B}) + Q_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B}),$$

$$\Delta_{s+1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B}) = |W(\mathcal{B}) - G_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B})|.$$

и пусть (см. (1.2) и (1.17))

$$\psi_{s+1}^{(\widetilde{\alpha})} = \widetilde{\omega}_s + \sup_{|t|=1} |\widetilde{\alpha}_{s+1}(t/V_t) - \bar{\alpha}_{s+1}(t)|. \quad (1.24)$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha}_{s+1}(t)$ определено формулой (1.23), то

$$\psi_{s+1}^{(\widetilde{\alpha})} \leqslant 2 \sup_{|t|=1} V_t^{-s} \int\limits_{R_k} \Big(1 \wedge (|x|/\gamma)^2\Big)\,(t,x)^s\,\Theta(dx)$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{R_k} (|x|^s \wedge |x|^{s+2})\,\Theta(\gamma\,dx). \tag{1.25}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\beta_s < \infty$ *при некотором четном* $s \geqslant 2$. *Если выполнено условие* (1.11), *то для любого борелевского множества* $\mathcal{B}$ *в* R_k *и любого положительного* $\varepsilon \leqslant a\,\delta$

$$\Delta_{s+1}^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B}) \leqslant A\Big(\nu(\mathcal{B}^\varepsilon)\Big((\det V)^{-1/2}\,(1+\widetilde{\beta}_s)\,\psi_{s+1}^{(\widetilde{\alpha})} + I(\varepsilon)\Big) + \mu_s^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B},\varepsilon)\Big), \tag{1.26}$$

где $\widetilde{\beta}_s$ *такое, как в замечании* 2,

$$\mu_s^{(\widetilde{\alpha})}(\mathcal{B},\varepsilon) = \sup_{z\in R_k} \int\limits_{\mathcal{B}^\varepsilon\setminus\mathcal{B}^{-\varepsilon}} |G_{s-1}^{(\widetilde{\alpha})}(z+dy)|,$$

а постоянные A *и* a, *зависят лишь от* k *и* s.

Заметим (см. замечание 1), что оценка (1.26) представляет интерес лишь тогда, когда $\widetilde{\beta}_s$ достаточно мало. Утверждение, аналогичное замечанию 2, также остается справедливым.

Отметим еще, что если $s = 2$, то теорема 2 совпадает с теоремой 3 при $\widetilde{\alpha}_3(t)$ тождественно равном нулю.

2. Доказательства. Нам понадобится несколько вспомогательных результатов.

Пусть $Y_j,\ j = 1, 2, \ldots,$ – независимые (одномерные) случайные величины с нулевыми средними, конечными дисперсиями σ_j^2, функциями распределения $F_j(\,\cdot\,)$ и характеристическими функциями $f_j(\,\cdot\,)$. Будем предполагать, что

$$\sum_{j\geqslant 1} \sigma_j^2 = 1 \tag{2.1}$$

и что $\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbf{E}\,Y_j^s < \infty$ при некотором четном $s \geqslant 2$.

Введем ряд промежуточных обозначений, аналогичных (1.2).

Пусть α_{lj}, β_{lj} и γ_{lj} являются, соответственно, моментом, абсолютным моментом и кумулянтом l-го порядка ($l \geqslant 1$) случайной величины Y_j (при $l > s$ вводятся формально).

Используя для удобства обозначение $F(dx) = \sum\limits_{j\geqslant 1} F_j(dx)$, положим

$$\gamma_l = \sum_{j\geqslant 1} \gamma_{lj}, \quad \alpha_l = \sum_{j\geqslant 1} \alpha_{lj} = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \, F(dx), \quad \beta_l = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l \, F(dx),$$
$$\bar{\alpha}_l = \int_{|x|\leqslant 1} x^{\,l} \, F(dx), \quad \bar{\beta}_l = \int_{|x|\leqslant 1} |x|^{\,l} \, F(dx),$$
$$\omega_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x^s \wedge x^{s+2}) \, F(dx). \tag{2.2}$$

Стандартным образом (см. [5, гл. VI, (1.2)]) определим функцию $R_\nu(u)$, $\nu \geqslant 1$, как коэффициент при z^ν в формальном равенстве

$$\exp\left(\sum_{l\geqslant 1} \frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)!} \, u^{l+2} \, z^l\right) = 1 + \sum_{\nu\geqslant 1} R_\nu(u) \, z^\nu. \tag{2.3}$$

Пусть функция $\bar{R}_{s-1}(u)$ удовлетворяет формальному равенству

$$\bar{R}_{s-1}(u) = R_{s-1}(u) - \frac{u^{s+1}}{(s+1)!} \, (\alpha_{s+1} - \bar{\alpha}_{s+1}),$$

т.е. получена подстановкой в функцию $R_{s-1}(u)$ вместо, вообще говоря, не существующего обобщенного момента α_{s+1} его усеченного аналога $\bar{\alpha}_{s+1}$.

Справедливо утверждение.

Лемма 1. *Пусть четное* $s \geqslant 2$. *В интервале* $|u| \leqslant \frac{1}{4} \, \omega_2^{-1/4}$, *если* $s = 2$, *или* $|u| \leqslant a \, (\alpha_s^{-1/s} \wedge \alpha_s^{-1/(s-2)})$, *если* $s \geqslant 4$, *имеет место равенство*

$$v(u) = \prod_{j\geqslant 1} f_j(u) = e^{-u^2/2} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} R_\nu(i\,u) + \bar{R}_{s-1}(i\,u)\right) + \theta u^s \, e^{-u^2/4} \, \omega_s.$$

Кроме того, при любом u

$$|v(u)| \leqslant \exp\big\{ - d\,u^2 \, (1 - 3\,\lambda(2/|u|))\big\}, \tag{2.4}$$

где $\lambda(\varepsilon) = \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\,F(dx), \quad d = (1-\cos 2)/4$. *Здесь* a *и* A – *некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от* s, $|\theta| \leqslant A$.

Доказательство леммы 1. В дальнейшем параметры $c_i,\ i = 1,\ldots,$ являются некоторыми положительными постоянными, возможно, зависящими от s, а функции θ_i таковы, что $|\theta_i| < c_i$.

Введем вспомогательную случайную величину Z с нулевым средним и конечным s-м моментом при некотором четном $s \geqslant 4$.

Обозначим через μ_l, $\bar\mu_l$ и τ_l момент, абсолютный момент и кумулянт порядка $l \geqslant 2$ случайной величины Z (при $l > s$ они вводятся формально), и пусть $f_Z(\,\cdot\,)$ является характеристической функцией Z,

$$B_s(u) = \sum_{l=2}^{s} \frac{\mu_l}{l!}\,(i\,u)^l, \quad \widetilde{\delta}_s(u) = f_Z(u) - 1 - B_s(u).$$

Очевидно, $|\widetilde{\delta}_s(u)| \leqslant 2\,\mu_s\,u^s/s!$. Имеем при $\widetilde{u} = |u|\,(\mu_s/\mu_2)^{\frac{1}{s-2}}$

$$|B_s(u)| \leqslant \frac{u^2\,\mu_2}{\widetilde{u}^2}\,\sum_{l=2}^{s} \frac{1}{l!}\,\widetilde{u}^l \leqslant (e-2)\,\max\big(u^2\,\mu_2,\,u^s\,\mu_s\big). \tag{2.5}$$

Если предположить, что $|u| \leqslant \mu_s^{-1/s}$, то

$$|B_s(u)| + |\widetilde{\delta}_s(u)| \leqslant e - 2 + 2/s! < 1$$

и, следовательно,

$$\ln f_Z(u) = \ln\,(1 + B_s(u)) + \ln\,(1 + \frac{\widetilde{\delta}_s(u)}{1 + B_s(u)}) = I_1 + I_2, \tag{2.6}$$

причем (см. (2.5))

$$I_2 = \widetilde{\delta}_s(u) + \theta_1\,(u^{s+2}\,\mu_2\,\mu_s\, + u^{2\,s}\,\mu_s^2). \tag{2.7}$$

Далее запишем, вообще говоря, формальное равенство

$$I_1 = \ln\,(1 + B_s(u)) = \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{\tau_{\nu\,s}}{\nu!}\,(i\,u)^\nu, \tag{2.8}$$

из которого, в частности, следует, что коэффициенты $\tau_{\nu\,s}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\tau_{\nu\,s} = \mu_{\nu\,s} - (\nu-1)!\,\sum_{l=2}^{\nu-1\wedge s} \frac{\mu_l}{l!}\,\frac{\tau_{\nu-l,\,s}}{(\nu-1-l)!},$$

где $\mu_{\nu\,s} = \mu_\nu$, если $\nu \leqslant s$, и 0 в противном случае.

Имеем

$$\tau_{\nu\,s} = \tau_\nu,\ \nu \leqslant s,\ \tau_{\nu\,s} = -(\nu-1)!\sum_{l=2}^{s}\frac{\mu_l}{l!}\,\frac{\tau_{\nu-l,\,s}}{(\nu-1-l)!},\ \ \nu \geqslant s+1, \quad (2.9)$$

вследствие чего (напоминаем, что $\tau_{1,\,1} = \tau_1 = \mu_1 = 0$)

$$\bar{\tau}_{s+1} = \tau_{s+1,\,s} = -s!\sum_{l=2}^{s-1}\frac{\mu_l}{l!}\,\frac{\tau_{s+1-l}}{(s-l)!} = \tau_{s+1} - \mu_{s+1}, \quad (2.10)$$

где последнее равенство является формальным.

Нам потребуются некоторые оценки коэффициентов $\tau_{\nu\,s}$. Для начала напомним, что из [9, следствие 1] следует

$$|\tau_\nu| \leqslant \lambda^\nu\,(\nu-1)!\,\bar{\mu}_\nu, \quad \nu \geqslant 3, \quad (2.11)$$

где $\lambda = 0.87245\ldots$ является решением уравнения $e^{1/\lambda} - 1/\lambda = 2$.

Справедливы утверждения ($s \geqslant 2$, $\nu \geqslant 3$)

$$|\tau_{\nu\,s}| \leqslant \lambda^\nu\,(\nu-1)!\,\bar{\mu}_s^{\nu/s}, \quad (2.12)$$

$$|\tau_{s+1,\,s}| \leqslant \lambda^{s+1}\,s!\,\mu_2\,\bar{\mu}_{s-1}, \quad |\tau_{s+2,\,s}| \leqslant \lambda^{s+2}\,(s+1)!\,\mu_2\,\mu_s. \quad (2.13)$$

Оценку (2.12) с помощью соотношений (2.9), (2.11) и неравенства $\bar{\mu}_\nu \leqslant (\bar{\mu}_s)^{\nu/s}$, $2 \leqslant \nu \leqslant s$, несложно проверить методом математической индукции.

Оценки (2.13) вытекают из (2.10), (2.11) и известного моментного неравенства

$$(\bar{\mu}_m/\mu_2)^{1/(m-2)} \leqslant (\mu_s/\mu_2)^{1/(s-2)} \quad (2 < m \leqslant s). \quad (2.14)$$

Если при $a \in (0,1]$

$$|u| \leqslant a\,\mu_s^{-1/s}, \quad (2.15)$$

то по (2.12)

$$\sum_{\nu \geqslant m}\frac{|\tau_{\nu\,s}|}{\nu!}\,|u|^\nu \leqslant \frac{(a\,\lambda)^m}{m\,(1-a\,\lambda)}\,(u^s\,\mu_s)^{m/s}, \quad m \geqslant 3. \quad (2.16)$$

Кроме того, $\tau_{7,\,4} = 210\,\mu_2^2\,\mu_3 - 35\,\mu_3\,\mu_4$ и, следовательно (см. (2.14)),

$$|\tau_{7,\,4}| \leqslant 175\,|\mu_3|\,\mu_4 \leqslant 175\,(\mu_2\,\mu_4 + \mu_4^2)/2. \quad (2.17)$$

Из (2.6)–(2.8), (2.13), (2.15) и (2.16) ($m = s+3$, если $s \geqslant 6$, и $m = 8$, если $s = 4$), с учетом (2.17) при $s = 4$, следует

$$\ln f_Z(u) = \sum_{\nu=2}^{s} \frac{\tau_\nu}{\nu!}\,(i\,u)^\nu + \frac{\tau_{s+1,\,s}}{(s+1)!}\,(i\,u)^{s+1} + \widetilde{\delta}_s(u)$$
$$+\, \theta_2\,(u^{s+2}\,\mu_2\,\mu_s + (u^s\,\mu_s)^{s/(s-2)}), \quad |u| \leqslant \mu_s^{-1/s}.$$

Применяя это равенство при $Z = Y_j$, $j \geqslant 1$, получим (см. (2.1))

$$\ln v(u) = -\frac{u^2}{2} + Q_s(u) + \delta_s(u) + \frac{\bar{\gamma}_{s+1}}{(s+1)!}\,(i\,u)^{s+1}$$
$$+\, \theta_3\,(u^{s+2}\,\nu_s + (u^s\,\alpha_s)^{s/(s-2)}), \quad |u| \leqslant a\,\alpha_s^{-1/s}, \tag{2.18}$$

где наряду с (2.2) использованы обозначения

$$Q_s(u) = \sum_{l=3}^{s} \frac{\gamma_l}{l!}\,(i\,u)^l, \quad \nu_s = \sum_{j\geqslant 1} \alpha_{2j}\,\alpha_{sj},$$
$$\delta_s(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{i\,u\,x} - \sum_{l=0}^{s} \frac{(i\,u\,x)^l}{l!}\Big)\,F(dx) \tag{2.19}$$

и формальное равенство $\bar{\gamma}_{s+1} = \gamma_{s+1} - \alpha_{s+1}$.

Из (2.18) следует

$$e^{u^2/2}\,v(u) = e^{Q_s(u)}\,I_1(u)\,I_2(u), \quad |u| \leqslant a\,\alpha_s^{-1/s}, \tag{2.20}$$

где

$$I_1(u) = \exp\Big(\delta_s(u) + \frac{\bar{\gamma}_{s+1}}{(s+1)!}\,(i\,u)^{s+1}\Big),$$
$$I_2(u) = \exp\big(\theta_3\,(u^{s+2}\,\nu_s + (u^s\,\alpha_s)^{s/(s-2)})\big).$$

При этом, если a в (2.15) достаточно мало, то при $|u| \leqslant a\,\alpha_s^{-1/s}$

$$I_2(u) = 1 + \theta_4\,u^{s+2}\,e^{u^2/16}\,(\nu_s + \alpha_s^{s/(s-2)}),$$
$$I_1(u) = 1 + \delta_s(u) + \frac{\bar{\gamma}_{s+1}}{(s+1)!}\,(i\,u)^{s+1}$$
$$+\, \theta_5\,u^{s+2}\,e^{u^2/16}\,(\nu_s + \alpha_s^{s/(s-2)}). \tag{2.21}$$

Здесь нами применяется оценка $|\delta_s(u)| \leqslant 2\,u^s\,\bar{\beta}_s/s!$, а также вытекающее из (2.13) неравенство

$$|\bar{\gamma}_{s+1}| \leqslant \lambda^{s+1}\,s!\,\sqrt{\nu_s\,\alpha_s}. \tag{2.22}$$

Далее, аналогичная (2.14) оценка позволяет показать

$$|Q_s(u)| \leqslant (\lambda\, u)^2\, \frac{\lambda\,|u|\,\alpha_s^{1/(s-2)}}{3\,(1-a)}, \quad \lambda\,|u|\,\alpha_s^{1/(s-2)} \leqslant a < 1. \tag{2.23}$$

Кроме того, найдем

$$|\delta_s(u) - \frac{(i\,u)^{s+1}}{(s+1)!}\,\bar\alpha_{s+1}| \leqslant \Big(\frac{2\,u^s}{s!} \vee \frac{u^{s+2}}{(s+2)!}\Big)\,\omega_s, \tag{2.24}$$

причем (см. (2.14), (2.1) и (2.2)) $|\bar\alpha_{s+1}| \leqslant \bar\beta_{s+1} \leqslant (\bar\alpha_{s+2})^{\frac{s-1}{s}}$.

Имеем

$$\alpha_s^{1/(s-2)}\,\sqrt{\nu_s\,\alpha_s} \leqslant (\nu_s + \alpha_s^{s/(s-2)})/2,$$
$$\alpha_s^{1/(s-2)}\,(\bar\alpha_{s+2})^{\frac{s-1}{s}} \leqslant \frac{1}{s}\,\alpha_s^{s/(s-2)} + \frac{s-1}{s}\,\bar\alpha_{s+2}.$$

Отсюда и из (2.20)–(2.24) получим

$$\begin{aligned} e^{u^2/2}\,v(u) &= e^{Q_s(u)} + \delta_s(u) + \frac{\bar\gamma_{s+1}}{(s+1)!}\,(i\,u)^{s+1} \\ &\quad + \theta_5\,u^{s+2}\,e^{u^2/4}\,(\nu_s + \alpha_s^{s/(s-2)} + \alpha_s^{1/(s-2)}\,\omega_s), \\ &\quad |u| \leqslant a\,(\alpha_s^{-1/s} \wedge \alpha_s^{-1/(s-2)}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Теперь оценим $e^{Q_s(u)}$. С этой целью определим функцию $R_{\nu,s}(u)$, $s \geqslant 3$, как коэффициент при z^ν в формальном равенстве

$$\exp\Big(\sum_{l=1}^{s-2} \frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)!}\,u^{l+2}\,z^l\Big) = 1 + \sum_{\nu\geqslant 1} R_{\nu,s}(u)\,z^\nu. \tag{2.26}$$

Таким образом, $R_{\nu,s}(u) = R_\nu(u)$ при $\nu \leqslant s-2$ (см. (2.3)) и

$$\widetilde R_{s-1}(u) = R_{s-1,s}(u) = R_{s-1}(u) - \frac{u^{s+1}}{(s+1)!}\,\gamma_{s+1}. \tag{2.27}$$

Имеет место оценка

$$|R_{\nu,s}(u)| \leqslant (\lambda\,|u|)^{\nu+2}\,(1 + (\lambda\,|u|)^2)^{\nu-1}\,\alpha_s^{\nu/(s-2)}, \quad u \in C \tag{2.28}$$

(λ определено в (2.11)), которую можно проверить методом математической индукции, используя вытекающее из (2.26) рекуррентное соотношение

$$R_{\nu,s}(u) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=3}^{\nu+2\wedge s} \frac{\gamma_l}{l!}\,u^l\,(l-2)\,R_{\nu+2-l,s}(u),\ \nu \geqslant 1; \quad R_{0,s}(u) = 1,$$

неравенство $|\gamma_\nu| \leqslant \lambda^\nu\,(\nu-1)!\,\bar\alpha_\nu$, $\nu \geqslant 3$, а также то (см. (2.14)), что $(\bar\alpha_l/\alpha_2)^{1/(l-2)} \leqslant (\bar\alpha_s/\alpha_2)^{1/(s-2)}$ $(2 < l \leqslant s)$.

Из (2.26)–(2.28) следует при $|u|\,\alpha_s^{1/(s-2)} \leqslant a$

$$e^{Q_s(u)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} R_\nu(i\,u) + \widetilde R_{s-1}(i\,u) + \theta_5\,(u^{s+2}+u^{3\,s})\,\alpha_s^{s/(s-2)}. \quad (2.29)$$

Комбинируя (2.25) и (2.29) (случаи $\alpha_s \leqslant 1$ и $\alpha_s > 1$ следует рассматривать по отдельности) и имея в виду (2.24) и то, что при $s \geqslant 4$

$$\nu_s \leqslant 2\,\omega_s, \quad \omega_s \leqslant \alpha_s \leqslant \omega_s + \omega_s^{(s-2)/s}, \quad |u|\,\alpha_s^{1/s} \leqslant a, \qquad (2.30)$$

придем к первому утверждению леммы 1 $(s \geqslant 4)$.

Случай $s=2$ может быть исследован аналогично (с существенными упрощениями) или получен как следствие леммы 2 из [10].

Оценка (2.4) вытекает из [11, лемма] (см. также [6, лемма 3]).

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть $G(\,\cdot\,)$ является конечной обобщенной мерой в R_k,*

$$\hat\Delta(t) = \int\limits_{R_k} e^{i(t,x)}(W-G)(dx).$$

Тогда при любом борелевском множестве $\mathcal B$ в R_k и любом $T>0$

$$|(W-G)(\mathcal B)|$$
$$\leqslant (1-2\,q)^{-1}\Big((2\pi)^{-k}\,\nu(\mathcal B^{c/T}) \int\limits_{|t|\leqslant T} |\hat\Delta(t)|\,dt + (2-q)\,\mu(\mathcal B, c/T)\Big),$$

где $0<q<1/2$ и $c>0$ удовлетворяют условию (см. (1.14))

$$k\int\limits_0^{c/2} J_{k/2}^2(r)/r\,dr \geqslant 1-q, \quad \mu(\mathcal B,\varepsilon) = \sup_{z\in R_k} \int\limits_{\mathcal B^\varepsilon\setminus\mathcal B^{-\varepsilon}} |G(z+dy)|.$$

Лемма 2 вытекает из [6, лемма 1, замечание 6 и (2.12)].

Доказательства теорем 1–3 проводятся однотипно. Ограничимся доказательством теоремы 2 при $s \geqslant 4$.

Итак, пусть выполняются условия теоремы 2. Воспользуемся леммой 2 при $q=1/3$, $T=1/\varepsilon$, $c=a$ и $G(\,\cdot\,)=G_{s-2}(\,\cdot\,)$ (см. (1.14) и (1.7)).

Чтобы получить нужный результат, нам следует подходяще оценить $\int\limits_{|t|\leqslant T} |\hat\Delta(t)|\,dt$.

Введем случайные величины $Y_j = (t, X_j)/V_t,\ t \in R_k,\ j = 1, 2, \ldots$ ($V_t = \sqrt{t'\,V\,t}$), условие (2.1) для которых, очевидно, выполняется. Имеем (см. лемму 1), $f(t) = \mathbf{E}\, e^{i\,(t,S)} = v(V_t)$ и

$$\hat\Delta(t) = \int\limits_{R_k} e^{i(t,x)}(W - G_{s-2})(dx) = v(V_t) - e^{-V_t^2/2}\Big(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} R_\nu(i\,V_t)\Big). \tag{2.31}$$

Пусть $\widetilde\beta_s = \sup\limits_{|t|=1} \beta_l(t/V_t) \leqslant 1$ и $T_1 = a/\widetilde\beta_s^{1/s}$ (см. замечание 2 и лемму 1). Согласно (2.31)

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1/\varepsilon} |\hat\Delta(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{V_t\leqslant T_1} |\hat\Delta(t)|\,dt + \int\limits_{V_t>T_1} e^{-V_t^2/2}\Big(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} |R_\nu(i\,V_t)|\Big)\,dt$$
$$+ \int\limits_{V_t>T_1,\ |t|\leqslant 1/\delta} |f(t)|\,dt + \int\limits_{1/\delta<|t|\leqslant 1/\varepsilon} |f(t)|\,dt = I_1 + I_2 + I_3 + I(\varepsilon). \tag{2.32}$$

С помощью леммы 1 получим

$$I_1 \leqslant A\,(\det V)^{-1/2}\,(\widetilde\omega_s + I_4),$$

где в дальнейшем A – некоторая постоянная, зависящая лишь от k и s, не всегда одна и та же,

$$I_4 = \int\limits_{R_k} e^{-|u|^2/2}\,|\bar R_{s-1}(i\,|u|)|\,du.$$

При этом (см. (2.4), (2.28), (2.10), (1.18) и ниже, а также [5, гл. VI, (1.7)])

$$|\bar R_{s-1}(i\,|u|)| \leqslant \sum_{l=2}^{s-1} |u|^{2l+s-1} \sup_{|t|=1} |\tau_l(t)| + \frac{|u|^{s+1}}{(s+1)!} \sup_{|t|=1} |\bar\kappa_{s+1}(t) + \bar\alpha_{s+1}(t)|,$$

и, следовательно (см. (1.19)),

$$I_1 \leqslant A\,(\det V)^{-1/2}\,\psi_s. \tag{2.33}$$

Оценивая I_2 с помощью соотношения (2.28), получим

$$I_2 \leqslant A\,(\det V)^{-1/2}\,(1+\widetilde{\beta}_s)\,\widetilde{\beta}_s^2. \tag{2.34}$$

Наконец, применяя вытекающее из (2.4) неравенство (3.5) работы [6], видим, что I_3 имеет оценку такую же, как I_2.

Учитывая, что $\widetilde{\beta}_s^2 \leqslant 2\,\widetilde{\omega}_s$ (см. (1.17)) (напоминаем о сделанном предположении $\widetilde{\beta}_s \leqslant 1$), отсюда и из (2.32)–(2.34) получим утверждение теоремы 2.

Пусть теперь $\widetilde{\beta}_s > 1$. Отсюда, в частности, по аналогии с (2.31) следует, что $\widetilde{\beta}_s \leqslant A\,\widetilde{\omega}_s$.

Очевидно (см. (1.7), (1.5)), что $\Delta_s(\mathcal{B}) \leqslant W(\mathcal{B}) + \sum\limits_{l=0}^{s-2} |Q_l(\mathcal{B})|$, где

$$Q_0(\mathcal{B}) = \Phi_V(\mathcal{B}), \quad |Q_l(\mathcal{B})| \leqslant \nu(\mathcal{B})\,(2\pi)^{-k} \int\limits_{R_k} |R_l(i\,V_t)|\,e^{-V_t^2/2}\,dt$$
$$\leqslant A\,\nu(\mathcal{B})\,(\det V)^{-1/2}\,(1+\widetilde{\beta}_{l+2}),$$

причем (см. (2.15)) $\widetilde{\beta}_{l+2} \leqslant \widetilde{\beta}_s^{l/(s-2)}$ (отметим, что оценку (1.15) можно проверить аналогично).

Используя оценку (1.13), отсюда получим

$$\Delta_s(\mathcal{B}) \leqslant A\,\nu(\mathcal{B})\,(\det V)^{-1/2}\,(1+\widetilde{\beta}_s) \leqslant A\,\nu(\mathcal{B})\,(\det V)^{-1/2}\,\widetilde{\omega}_s,$$

тем самым завершив доказательство теоремы 2. □

Литература

1. B. von Bahr, *Multidimensional integral limit theorem.* — Ark. Mat. **7**, No. 6 (1967), 71–88.
2. С. В. Фомин, *Асимптотические разложения в многомерной центральной предельной теореме.* — Вестн. ЛГУ, **1**, No. 7 (1982), 116–118.
3. Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао, *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.* Наука, М., (1982).
4. А. П. Бикялис, *О центральной предельной теореме в R^k.I.* — Литовский матем. сб., **XI**, **1** (1971), 27–58.
5. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
6. Л. В. Розовский, *Оценки скорости сходимости в "интервальной" ЦПТ для сумм независимых случайных векторов.* — Вестн. СпбГУ, **1**, No 4 (62), 3 (2017), 466–476.

7. Л. В. Розовский, *Одно экстремальное свойство равномерного распределения и некоторые его следствия.* — Теория вероятн. и ее примен. **44**, No 3 (1999), 646–650.
8. Л. В. Розовский, *О сходимости функций распределения последовательности сумм независимых случайных величин к нормальному закону в L_p.* — Литовский матем. сб. **XVI**, 1, (1976), 194–206.
9. Л. В. Розовский, *О коэффициентах ряда Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен. **43**, 1 (1998), 161–166.
10. Л. В. Розовский, *О скорости сходимости в теореме Линдеберга–Феллера.* — Вестник ЛГУ, Сер. 1, No 1 (1974), 70–75.
11. Л. В. Розовский, *О точности нормального приближения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 129–137.

Rozovsky L. V. On asymptotic expansions in the "interval" CLT for sums of independent random vectors.

We investigate the remainder term taking into account the asymptotic expansions in the multidimensional central limit theorem for sum of independent random vectors. The dependence of the remainder term on the measure of hitting set is investigated.

С.- Петербургская химико-фармацевтическая академия (СПХФА),
ул. проф. Попова 14,
197376 С.-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 15 августа 2017 г.