Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

Ю. П. Петрова

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ ДУРБИНА

§1. Введение

Пусть $X(t)$, $t \in (0,1)$, – гауссовский процесс с нулевым средним и функцией ковариации $G_X(s,t) = \mathbf{E}\,X(s)\,X(t)$. Задача малых уклонений для процесса $X(t)$ в L_2-норме заключается в поиске асимптотики:

$$\mathbf{P}\big(\|X\|_{L_2[0,1]} < \varepsilon\big) = \mathbf{P}\Big(\int\limits_0^1 (X(t))^2\,dt < \varepsilon^2\Big)$$
$$= \mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big) \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (1)$$

Здесь ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, – независимые нормальные стандартные случайные величины (с.в.), μ_k – собственные числа (с.ч.) интегрального оператора с ядром $G_X(s,t)$ (ковариационный оператор). Последнее равенство в (1) верно в силу разложения Кархунена–Лоэва (см., например, [1, §12]).

Неявное решение задачи было получено Г. Сытой в [2]. Затем многие авторы, начиная с [3–5], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях. При некоторых условиях на поведение с.ч. μ_k ковариационного оператора она была посчитана явно (см., например, [6], [7]). Если же известна достаточно точная асимптотика μ_k, то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью принципа сравнения Венбо Ли:

Предложение 1. ([8, 9]) *Пусть ξ_k – последовательность независимых стандартных гауссовских с.в., а μ_k и $\widetilde{\mu}_k$ – две положительные невозрастающие суммируемые последовательности такие, что*

Ключевые слова: спектральные асимптотики, гауссовские процессы, малые уклонения.

Основные результаты о спектральных асимптотиках (§2,3) получены при поддержке гранта РНФ 17-11-01003. Приложения к асимптотикам малых уклонений (§4) получены при поддержке гранта РФФИ 16-01-00258.

$\prod \widetilde{\mu}_k/\mu_k < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\, \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big) \sim \mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mu}_k\, \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big) \cdot \Big(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\mu}_k}{\mu_k}\Big)^{1/2}, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (2)$$

Таким образом, для нахождения точной асимптотики малых уклонений для процесса $X(t)$ достаточно построить процесс $\widetilde{X}(t)$ с известной точной асимптотикой малых уклонений, такой что с.ч. μ_n и $\widetilde{\mu}_k$ их ковариационных операторов "асимптотически близки" (так что $\prod \widetilde{\mu}_k/\mu_k < \infty$). В случае, когда ковариационный оператор является обратным к дифференциальному, асимптотика собственных чисел считается методами спектральной теории (такие процессы называют *гриновскими*; задача малых уклонений для них впервые была рассмотрена в работах [7, 10]).

Целью статьи является посчитать точную асимптотику малых уклонений для некоторых гауссовских процессов, рассмотренных Дж. Дурбиным в [11] (см. также [12, 13]). Опишем эти процессы.

Пусть $F(x, \boldsymbol{\theta}) = t$ – функция распределения, а $f(x, \boldsymbol{\theta})$ – плотность распределения, где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ – вектор параметров. В случае, когда все параметры известны, в качестве предельного процесса возникает броуновский мост $B(t)$. Согласно [11], в случае, когда m параметров оцениваются по выборке (не умаляя общности, можно считать, что это первые m параметров вектора $\boldsymbol{\theta}$), в качестве предельного процесса возникает гауссовский процесс с нулевым средним и функцией ковариации, равной

$$\widetilde{G}(s,t) = G_0(s,t) - \mathbf{q}(s)\; S^{-1}\; \mathbf{q}^T(t), \qquad (3)$$

где $G_0(s,t) = \min(s,t) - s\,t$ – функция ковариации броуновского моста $B(t)$; $S = (S_{ij})$ – матрица $m \times m$ – информация Фишера:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= -\mathbf{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln(f(x,\boldsymbol{\theta}))\right)\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln(f(x,\boldsymbol{\theta})) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln(f(x,\boldsymbol{\theta}))\right)\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{\theta}_0$ – некоторый фиксированный вектор параметров.

Вектор функций $\mathbf{q}(t) = \big(q_1(t) \quad \ldots \quad q_m(t)\big)$ задается соотношениями:

$$q_i(t) = \frac{\partial F(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0,\; x=F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0)}. \tag{5}$$

Формула (3) задает конечномерное возмущение ковариационного оператора. В работе [14] рассматривалась задача о поведении спектра общего ковариационного оператора при одномерном возмущении (см. также [15]).

Замечание 1. Матрица S положительно определена, поэтому квадратичная форма оператора (3) не превосходит квадратичной формы исходного оператора. Поэтому для собственных чисел μ_k возмущенного и $\widehat{\mu}_k$ исходного операторов в силу минимаксимального принципа [16, §9.2] имеем $\widehat{\mu}_k \geq \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$. При одномерном возмущении оператора собственные числа μ_k и $\widehat{\mu}_k$ перемежаются.

Замечание 2. Матрица S положительно определена, поэтому имеет место равенство $S^{-1} = BB^T$, где B – верхнетреугольная матрица. Отсюда функцию ковариации (3) можно записать следующим образом:

$$\widetilde{G}(s,t) = G_0(s,t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, p_i(t),\ \mathbf{p}(t) = p_1(t)\ \ldots\ p_m(t) := \mathbf{q}(t)\cdot B. \tag{6}$$

Замечание 3. Заметим, что все рассматриваемые процессы являются критическими в смысле статьи [14]. Для таких процессов при условии $q''(t) \in L_2(0,1)$ задача была решена в [14, теорема 2]. Однако, все рассматриваемые процессы (кроме $X^{(1)}$ для логистического распределения) этому условию не удовлетворяют.

В работе [17] была рассмотрена задача малых уклонений для процессов Каца–Кифера–Вольфовица (KKW, см. [18]), которые возникают как предельные при проверке выборки на нормальность (в случае, когда среднее и/или дисперсия оцениваются по выборке). В этой же работе была разработана техника вычисления асимптотики осцилляционных интегралов с медленно меняющейся амплитудой, т.е. интегралов вида $\int\limits_0^1 F(t)\sin(\omega t)\,dt$ при $\omega \to \infty$; $F(t)$ – медленно меняющаяся функция в нуле.

В данной работе мы расширим круг примеров, а именно, будем рассматривать процессы Дурбина, возникающие при проверке выборки на следующие распределения с параметрами $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$:

- распределение Лапласа, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$:

$$F^{LAP}(x, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\alpha}{\beta}), & x \leqslant \alpha; \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta}), & x > \alpha. \end{cases}$$

- логистическое распределение, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$:

$$F^{LOG}(x, \boldsymbol{\theta}) = \Big(1 + \exp\Big(-\frac{x-\alpha}{\beta}\Big)\Big)^{-1}.$$

- распределение Гумбеля, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$:

$$F^{GUM}(x, \boldsymbol{\theta}) = \exp\bigl(-\exp\bigl(-\frac{x-\alpha}{\beta}\bigr)\bigr).$$

- гамма-распределение, $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \varkappa)$:

$$F^{GAM}(x, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \dfrac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)}dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь α – параметр сдвига, $\beta > 0$ – параметр масштаба, $\varkappa > 0$ – параметр формы. Каждому распределению соответствует три предельных случайных процесса:

1) Параметр θ_1 известен, а θ_2 оценивается по выборке.

2) Параметр θ_2 известен, а θ_1 оценивается по выборке.

3) Оба параметра θ_1 и θ_2 оцениваются по выборке.

По формуле (3) в качестве предельных процессов возникают гауссовские процессы $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, с нулевыми средними и функциями ковариации $G_i(s,t)$:

$$\textbf{1)}\ G_1(s,t) = G_0(s,t) - p_1(s)\,p_1(t), \tag{7}$$

$$\textbf{2)}\ G_2(s,t) = G_0(s,t) - p_2(s)\,p_2(t), \tag{8}$$

$$\textbf{3)}\ G_3(s,t) = G_0(s,t) - \widetilde{p}_1(s)\,\widetilde{p}_1(t) - \widetilde{p}_2(s)\,\widetilde{p}_2(t), \tag{9}$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\widetilde{p}_1(t)$, $\widetilde{p}_2(t)$ выписываются явно из формул (4), (5), (6):

- для распределения Лапласа, $\boldsymbol{\theta}_0 = (0, 1)$:

$$p_1(t) = \widetilde{p}_1(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, 1/2] \\ 1-t, & t \in (1/2, 1) \end{cases},$$

$$p_2(t) = \widetilde{p}_2(t) = \begin{cases} t\,\ln(2\,t), & t \in (0, 1/2] \\ -(1-t)\,\ln(2\,(1-t)), & t \in (1/2, 1) \end{cases}.$$

- для логистического распределения, $\boldsymbol{\theta}_0 = (0, 1)$:

$$p_1(t) = \widetilde{p}_1(t) = \sqrt{3}\, t\,(1-t),$$
$$p_2(t) = \widetilde{p}_2(t) = \frac{3}{\sqrt{3+\pi^2}}\, t\,(t-1)\ln\Big(\frac{1-t}{t}\Big).$$

- для распределения Гумбеля, $\boldsymbol{\theta}_0 = (0, 1)$:

$$p_1(t) = t\,\ln(t), \qquad p_2(t) = -c^{-1}\, t\,\ln(t)\cdot\ln(-\ln(t)),$$
$$\big(\widetilde{p}_1(t) \quad \widetilde{p}_2(t)\big) = \big(p_1(t) \quad p_2(t)\big)\begin{pmatrix} 1 & (1-\gamma)\frac{\sqrt{6}}{\pi} \\ 0 & \frac{c\sqrt{6}}{\pi} \end{pmatrix},$$

где $c = (\pi^2/6 + (\gamma-1)^2)^{1/2}$, γ – константа Эйлера.

- для гамма-распределения, $\boldsymbol{\theta}_0 = (1, \varkappa_0)$:

$$p_1(t) = \varkappa_0^{-1/2}\cdot(F^{GAM}(t,\boldsymbol{\theta}_0))^{-1}\cdot f^{GAM}((F^{GAM}(t,\boldsymbol{\theta}_0))^{-1},\boldsymbol{\theta}_0),$$
$$p_2(t) = d^{-1}\cdot\int\limits_0^{(F^{GAM}(t,\boldsymbol{\theta}_0))^{-1}}\Big(\ln(y) - \frac{\Gamma'(\varkappa_0)}{\Gamma(\varkappa_0)}\Big) f(y,\boldsymbol{\theta}_0)\,dy,$$
$$\big(\widetilde{p}_1(t) \quad \widetilde{p}_2(t)\big) = \big(p_1(t) \quad p_2(t)\big)\begin{pmatrix} 1 & -(\varkappa_0 d^2-1)^{-1/2} \\ 0 & \varkappa_0^{1/2} d\,(\varkappa_0 d^2-1)^{-1/2} \end{pmatrix},$$
$$d = \frac{\big[\Gamma''(\varkappa_0)\Gamma(\varkappa_0) - (\Gamma'(\varkappa_0))^2\big]^{1/2}}{\Gamma(\varkappa_0)}. \tag{10}$$

Собственные числа ковариационных операторов с ядрами $G_i(s,t)$ обозначим $\mu_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание 4. Заметим, что для логистического распределения и распределения Лапласа функция $p_1(t)$ четная относительно точки $t = 1/2$. Поэтому при возмущении (7) нечетные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Для простоты мы будем обозначать их $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, несмотря на то, что при этом нумерация в порядке убывания может быть нарушена. Аналогично в силу нечетности функции $p_2(t)$ относительно точки $t = 1/2$ при возмущении (8) четные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются, будем обозначать их $\mu_{2k-1}^{(2)} = \mu_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко видеть, что $\mu_{2k}^{(3)} = \mu_{2k}^{(1)}$ и $\mu_{2k-1}^{(3)} = \mu_{2k-1}^{(2)}$.

Статья организована следующим образом. Основные результаты содержатся в §§2 и 3, в которых проводится спектральный анализ для интегральных операторов, порожденных рассматриваемыми процессами Дурбина. В §2 выписываются уравнения на собственные числа в терминах осциллирующих интегралов. В §3 находится асимптотика собственных чисел ковариационных операторов. В §4 полученные результаты применяются к нахождению точной асимптотики малых уклонений для этих процессов. В §5 вынесены вспомогательные утверждения.

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C.

§2. Уравнение на собственные числа

В общем случае одномерного возмущения алгоритм получения уравнения выписан в статье [14]. В случае, когда исходный процесс – это броуновский мост $B(t)$, а возмущение задается функцией $p(t)$, получаем уравнение на $\omega = \mu^{-1/2}$

$$\det\nolimits_1(\omega) := \det \begin{bmatrix} \eta(1) & \eta(0) & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \int\limits_{1/2}^s p(s)\, p''(\tau) \frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega}\, d\tau\, ds \\ \cos(\omega) & 1 & \int\limits_0^1 p(\tau)\cos(\omega\tau)\, d\tau \\ \sin(\omega) & 0 & \int\limits_0^1 p(\tau)\sin(\omega\tau)\, d\tau \end{bmatrix} = 0, \tag{11}$$

где $\eta(s) = \int\limits_{1/2}^s \frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega} p''(\tau)\, d\tau$. Определитель (11) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \det\nolimits_1(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{\omega}\Big[\big(C_0^P(\omega)\big)^2 + \big(C_1^P(\omega)\big)^2\Big] + \frac{2}{\omega}\, C_0^P(\omega)\, C_1^P(\omega) \\ + \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\big[I_0^P(\omega) + I_1^P(\omega)\big] - \frac{\sin(\omega)}{\omega^2} - \frac{\sin(\omega)(p'(1/2))^2}{\omega^2} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $P = P(t) = p'(t) - p'(1/2)$, $t \in [0,1]$, и

$$C_0^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2} P(t)\, \cos(\omega t)\, dt; \qquad C_1^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2} P(1-t)\, \cos(\omega t)\, dt,$$

$$S_0^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2} P(t)\,\sin(\omega t)\,dt; \qquad S_1^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2} P(1-t)\,\sin(\omega t)\,dt,$$

$$I_0^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{t} P(t)\,P(s)\,\sin(\omega t)\,\cos(\omega s)\,ds\,dt,$$

$$I_1^P(\omega) := \int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{t} P(1-t)\,P(1-s)\,\sin(\omega t)\,\cos(\omega s)\,ds\,dt.$$

При $P(t) \in C^\infty[0,1]$ асимптотика этих интегралов хорошо известна (метод стационарной фазы, см. [19]). В наших примерах в качестве $P(t)$ возникают медленно меняющиеся функции в точке $t = 0$ и/или $t = 1$, имеющие особенности в этих точках. Асимптотика интегралов в этом случае была посчитана в работе [17], для удобства читателя результаты сформулированы в предложениях 2–4 в приложении.

В случае двумерного возмущения (9) аналогично статье [14] получим уравнение на $\omega = \mu^{-1/2}$:

$$\det{}_2(\omega) := \det\begin{bmatrix} \eta_1(1) & \eta_1(0) & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(s)\,\eta_1(s)\,ds & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_2(s)\,\eta_1(s)\,ds \\ \eta_2(1) & \eta_2(0) & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(s)\,\eta_2(s)\,ds & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \widetilde{p}_2(s)\,\eta_2(s)\,ds \\ \cos(\omega) & 1 & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(\tau)\,\cos(\omega\tau)\,d\tau & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_2(\tau)\,\cos(\omega\tau)\,d\tau \\ \sin(\omega) & 0 & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(\tau)\,\sin(\omega\tau)\,d\tau & \int\limits_0^1 \widetilde{p}_2(\tau)\,\sin(\omega\tau)\,d\tau \end{bmatrix} = 0, \tag{13}$$

где $\eta_i(s) = \int\limits_{1/2}^{s} \frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega}\widetilde{p}_i''(\tau)\,d\tau$, $i = 1, 2$. Определитель $\det_2(\omega)$ можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \det{}_2(\omega) &= \frac{1}{\omega^2} \\ &\times \Big[\cos(\omega)\Big(-2\,(C_0^Q)^2\cdot I^P + 2\,C_0^Q\cdot C_0^P\cdot I^{PQ} \\ &- 2\,(C_1^Q)^2\cdot I^P + 2\,C_1^Q\cdot C_1^P\cdot I^{PQ} - 2\,I^Q((C_0^P)^2 + (C_1^P)^2)\Big) \\ &+ \sin(\omega)\Big((C_0^Q)^2\cdot(C_1^P)^2 - 2\,C_0^Q\cdot C_1^Q\cdot C_0^P\cdot C_1^P + (C_1^Q)^2(C_0^P)^2 \end{aligned}$$

$$
-4\, I^Q \cdot I^P + (I^{PQ})^2\Big) + (-4\, C_1^Q \cdot I^P + 2\, C_1^P \cdot I^{PQ}) \cdot C_0^Q
$$

$$
-4\, C_0^P \cdot C_1^P \cdot I^Q + 2\, C_1^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ}\Big] = 0, \tag{14}
$$

где $P = P(t) = \widetilde{p}_1'(t) - \widetilde{p}_1'(1/2)$, $Q = Q(t) = \widetilde{p}_2'(t) - \widetilde{p}_2'(1/2)$, $t \in [0,1]$, и

$$
I^P(\omega) := I_0^P(\omega) + I_1^P(\omega) - \frac{(\widetilde{p}_1'(1/2))^2 + 1}{2\,\omega};
$$

$$
I^Q := I_0^Q(\omega) + I_1^Q(\omega) - \frac{(\widetilde{p}_2'(1/2))^2 + 1}{2\,\omega};
$$

$$
I_0^{QP}(\omega) := \int\limits_0^{1/2} \int\limits_0^t Q(t)\, P(s)\, \cos(\omega s)\, \sin(\omega t)\, ds\, dt;
$$

$$
I_1^{QP}(\omega) := \int\limits_0^{1/2} \int\limits_0^t Q(1-t)\, P(1-s)\, \cos(\omega s)\, \sin(\omega t)\, ds\, dt;
$$

$$
I^{PQ}(\omega) := I_0^{QP}(\omega) + I_0^{PQ}(\omega) + I_1^{QP}(\omega) + I_1^{PQ}(\omega) - \frac{\widetilde{p}_1'(1/2)\, \widetilde{p}_2'(1/2)}{\omega}.
$$

§3. Асимптотика собственных чисел

Все утверждения про асимптотику собственных чисел ковариационных операторов, введенных в (7), (8), (9), будут доказаны в виде четырех теорем.

Теорема 1. (*распределение Лапласа*)
Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, возникающим при проверке на распределение Лапласа, "асимптотически близки" к числам $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ (в смысле $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)}/\widetilde{\mu}_k^{(i)} < \infty$), где

1) $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = \widetilde{\mu}_{2k}^{(1)} = \widetilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$;

2) $\widetilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \widetilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$; **3**) $\widetilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$.

Доказательство. 1) Для ковариационного оператора с ядром $G_1(s,t)$ задачу на собственные числа μ можно записать следующим образом (здесь $\mu = 1/\omega^2$, $u(t)$ – собственная функция):

$$\begin{gathered} t \in (0, 1/2): \quad -u''(t) = \omega^2 u(t), \quad u(0) = 0, \\ t \in (1/2, 1): \quad -u''(t) = \omega^2 u(t), \quad u(1) = 0, \\ u(1/2-) = u(1/2+), \end{gathered}$$

$$\frac{1}{\omega^2}\,[u'(1/2+) - u'(1/2-)] = 2\int\limits_0^{1/2} s\,u(s)\,ds + 2\int\limits_{1/2}^{1} (1-s)\,u(s)\,ds.$$

Решая задачу явным образом, получаем, что $\omega_{2k}^{(1)} = \omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Замечание 5. В данном случае получается точное равенство $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$, а не асимптотическое. Таким образом, все собственные числа имеют кратность 2. Этот факт можно объяснить так: этому случаю соответствует броуновский мост $B(t)$, "зажатый" в точке $t = 1/2$, т.е. $B(1/2) = 0$, что эквивалентно двум независимым броуновским мостам, определенным при $t \in [0, 1/2]$ и $t \in [1/2, 1]$ соответственно.

2) По замечанию 4 возмущение $p_2(t)$ является нечетной функцией (относительно точки $t = 1/2$), поэтому четные собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Будем рассматривать задачу на собственные значения только для нечетных собственных функций $u(t)$, поэтому при $t \in (0, 1/2)$ имеем:

$$-\mu\, u''(t) = u(t) + 2\,p_2''(t)\int\limits_0^{1/2} p_2(s)\,u(s)\,ds, \;\; u(0) = 0, \;\; u(1/2) = 0, \tag{15}$$

Рассмотрим функции $\check{u}(s) = u(s/2)$, $\check{q}_2(s) = s\ln(s) = 2\,p_2(s/2)$, заданные при $s \in [0, 1]$. Перепишем уравнение (15) через функции $\check{u}(s)$, $\check{p}_2(s)$:

$$-\check{\mu}\,\check{u}''(t) = \check{u}(t) + \check{p}_2''(t)\int\limits_0^{1} \check{p}_2(s)\,\check{u}(s)\,ds, \quad \check{u}(0) = 0, \;\; \check{u}(1) = 0, \tag{16}$$

где $t \in [0, 1]$, $\check{\mu} = 4\,\mu$. Пусть $1/\check{\mu} = \check{\omega}^2$, $1/\mu = \omega^2$, тогда $\omega = 2\,\check{\omega}$. Уравнение (16) сводится к (12) при $P(t) = \check{p}_2'(t) - \check{p}_2'(1/2)$. Асимптотики интегралов $C_j^P(\breve\omega)$, $I_j^P(\breve\omega)$, $j=0,1$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (12) примет вид:

$$0=\det\nolimits_1=\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos(\breve\omega)}{\breve\omega^3}+O\Big(\frac{1}{\breve\omega^4}\Big). \tag{17}$$

Отсюда для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\breve\omega_{2k+k_0}=\pi k+\frac{\pi}{2}+O\Big(\frac{1}{k}\Big),\ \text{поэтому}\ \ \omega_{2k+k_0}=2\pi k+\pi+O\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

По замечанию 1 собственные числа возмущенного оператора $\mu_k^{(2)}$ и собственные числа исходного оператора $\widehat{\mu}_k$ перемежаются, поэтому $k_0=0$ и утверждение теоремы в этом случае доказано.

3) Утверждение теоремы в этом случае следует из замечания 4.

Теорема 2. (*логистическое распределение*)
Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, возникающим при проверке на логистическое распределение, “асимптотически близки” к числам $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ (в смысле $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{(i)}/\widetilde{\mu}_k^{(i)}<\infty$), где

1) $\widetilde{\mu}_k^{(1)}=((k+1)\,\pi)^{-2}$;
2) $\widetilde{\mu}_{2k}^{(2)}=\widetilde{\mu}_{2k+1}^{(2)}=((2k+1)\,\pi)^{-2}$;
3) $\widetilde{\mu}_{2k-1}^{(3)}=\widetilde{\mu}_{2k}^{(3)}=((2k+1)\,\pi)^{-2}$.

Доказательство. 1) В этом случае $p_1''(t)\in L_2(0,1)$, поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 2 статьи [14].

2) В этом случае получаем уравнение (12) при $P(t)=p_2'(t)-p_2'(1/2)$. Асимптотики интегралов $C_j^P(\omega)$, $I_j^P(\omega)$, $j=0,1$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (12) примет вид:

$$\begin{aligned}0=\det\nolimits_1(\omega)=\frac{2\,(\cos(\omega)+1)}{\omega}\Big[\frac{9\,\pi^2}{4\,(3+\pi^2)}\,\frac{1}{\omega^2}+O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\Big)\Big]\\ +\frac{2\,\sin(\omega)}{\omega}\cdot O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\Big).\end{aligned} \tag{18}$$

Поэтому

$$\cos(\omega/2)=0\quad\text{или}\quad\cos(\omega/2)=O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega}\Big).$$

Корни уравнения $\cos(\omega/2) = 0$ соответствуют $\omega^{(2)}_{2k-1} = (2k-1)\,\pi$, а корни второго уравнения $\cos(\omega/2) = O\bigl(\frac{\ln(\omega)}{\omega}\bigr)$ соответствуют $\omega^{(2)}_{2k} = (2k+1)\pi + O\bigl(\frac{1}{k}\bigr)$ (такая нумерация следует из замечания 1).

3) Утверждение теоремы в этом случае следует из замечания 4.

Теорема 3. (*распределение Гумбеля*)
Собственные числа $\mu^{(i)}_k$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, возникающим при проверке на распределение Гумбеля, "асимптотически близки" к числам $\widetilde{\mu}^{(i)}_k$ (в смысле $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mu^{(i)}_k / \widetilde{\mu}^{(i)}_k < \infty$), где

1) $\widetilde{\mu}^{(1)}_k = ((k+1/2)\,\pi)^{-2}$;

2) $\widetilde{\mu}^{(2)}_k = \bigl((k+1/2)\,\pi + r_k\bigr)^{-2}$,

$$r_k = (-1)^k \cdot 2\,\mathrm{arctg}\Bigl(\frac{1}{\ln(\ln(k)) + 1}\Bigr) - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))};$$

3) $\widetilde{\mu}^{(3)}_k = \bigl((k+1)\,\pi + r_k\bigr)^{-2}, \quad r_k = 2\pi\,\dfrac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)} + \pi\,\dfrac{(-1)^k}{\ln(k)}.$

Доказательство. 1) Уравнение на собственные числа $\mu^{(1)}_k$ совпадает с уравнением (16), откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

2) В этом случае получаем уравнение (12) при $P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2)$. Асимптотики интегралов $C^P_j(\omega)$, $I^P_j(\omega)$, $j = 0, 1$, могут быть найдены из предл. 2–4 из приложения; уравнение (12) примет вид (напомним, что γ – константа Эйлера, $c = (\pi^2/6 + (\gamma-1)^2)^{1/2}$):

$$\begin{aligned}0 = \det\nolimits_1(\omega) = \frac{\pi^2}{4c^2\omega^3}\Bigl(&\cos(\omega)\Bigl[(\ln(\ln(\omega)))^2 + 2\,\ln(\ln(\omega)) + 2\\ &+ 2\,(\gamma-1)\,\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}\Bigr] - \sin(\omega)\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}\\ &+ 2\,\ln(\ln(\omega)) + 2 + O\Bigl(\frac{1}{\ln(\omega)}\Bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

Или

$$\cos(\omega)=\frac{\sin(\omega)\cdot\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}-2\ln(\ln(\omega))-2}{(\ln(\ln(\omega)))^2+2\ln(\ln(\omega))+2+2(\gamma-1)\cdot\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}}+O\Big(\frac{1}{\ln(\omega)\,(\ln(\ln(\omega)))^2}\Big).$$

Так как правая часть стремится к 0 при $\omega\to\infty$, то для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$ имеем $\omega_{k+k_0}=\pi k+\frac{\pi}{2}+r_k$, $r_k\to 0$. Стандартными приемами асимптотического метода решения уравнений получаем:

$$\omega_{k+k_0}=\pi k+\frac{\pi}{2}+(-1)^k\cdot 2\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{\ln(\ln(k))+1}\Big)-\frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))}+O\Big(\frac{1}{\ln(k)(\ln(\ln(k)))^2}\Big).$$

По замечанию 1 имеем $k_0=0$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) Заметим, что $\widetilde{p}_j''(t)\notin L_2(0,1)$, а значит общие теоремы из [14] тут не работают (см. замечание 3). Асимптотики интегралов $C_j^w(\omega)$, $I_j^w(\omega)$, $I_j^{vw}(\omega)$, $j=0,1$; $v,w=P,Q$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (14) примет вид:

$$0=\det\nolimits_2(\omega)=\frac{3\pi^3}{4}\frac{\cos(\omega)}{\omega^4}\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}+\frac{3\pi^2}{8}\frac{\sin(\omega)}{\omega^4}-\frac{3\pi^3}{8}\frac{1}{\omega^4\ln(\omega)}+O\Big(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\Big).$$

Отсюда, после преобразований, получаем для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$:

$$\omega_{k+k_0}=\pi k+2\pi\frac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)}+\pi\frac{(-1)^k}{\ln(k)}+O\Big(\frac{\ln(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big).$$

Поскольку процесс $X^{(3)}$ является одномерным возмущением процесса $X^{(1)}$, то по замечанию 1 имеем $k_0=1$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

Теорема 4. (*гамма-распределение*)
Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, возникающим при проверке на гамма-распределение, "асимптотически близки" к числам $\widetilde{\mu}_k^{(i)}$ (в смысле

$\prod_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)}/\widetilde{\mu}_k^{(i)} < \infty$), *где*

1) $\widetilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2}$; **2**) $\widetilde{\mu}_k^{(2)} = \Big((k+1/2)\,\pi + \dfrac{(-1)^k \cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)}\Big)^{-2}$;

3) $\widetilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$.

Доказательство. Стандартными методами анализа получаются следующие асимптотические формулы для $(F^{GAM})^{-1}$ (для простоты будем обозначать ее F^{-1}):

$$\begin{aligned} F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}) = &-\beta\,\ln(1-t) + \beta(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \beta\,\ln(\Gamma(\varkappa)) \qquad (19)\\ &-\beta\,(\varkappa-1)\frac{(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \ln(\Gamma(\varkappa)) + 1/\beta}{\ln(1-t)}\\ &+O\Big(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big) \quad \text{при } t\to 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}) = &\; t^{1/\varkappa}\cdot\beta\,(\Gamma(\varkappa+1))^{1/\varkappa}\\ &\times\Big(1 + t^{1/\varkappa}\frac{(\Gamma(\varkappa+1))^{1/\varkappa}}{(\varkappa+1)} + O(t^{2/\varkappa})\Big) \quad \text{при } t\to 0. \qquad (20)\end{aligned}$$

1) Поскольку при $t\to 1$ имеем

$$p_1''(t) = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa_0}}\,\frac{1}{f(F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0),\boldsymbol{\theta}_0)} = \frac{Ce^{F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0)}}{(F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0))^{\varkappa_0-1}} \sim \frac{C}{1-t},$$

получаем, что $p_1''(t) \notin L_2(0,1)$. Заметим также, что $P(t) = p_1'(t) - p_1'(1/2)$, а также построенные по ней $P_1(t) = t\,P'(t)$, $P_2(t) = t\,P_1'(t)$ – медленно меняющиеся при $t\to 1$. Поэтому асимптотики интегралов $C_j^P(\omega)$, $I_j^P(\omega)$, $j=1,2$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (12) примет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\nolimits_1(\omega)\\ &= \frac{1}{\omega^3}\cdot\frac{\cos(\omega)\pi^2}{4\varkappa_0} - \cos(\omega)\frac{\pi^2(\varkappa_0-1)}{2\varkappa_0}\frac{(\varkappa_0-1)\ln(\ln(\omega)) + 1 - \ln(\Gamma(\varkappa_0))}{\omega^3\ln(\omega)}\\ &\qquad + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\ln^2(\omega)}\frac{1}{\omega^3}\Big).\end{aligned}$$

Откуда для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$ имеем $\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big)$. Из замечания 1 следует, что $k_0 = 0$.

2) Поскольку при $t \to 1$ имеем

$$p_2''(t) = \frac{d}{F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0)\, f(F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0),\boldsymbol{\theta}_0)} \sim \frac{C\, e^{F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0)}}{(F^{-1}(t,\boldsymbol{\theta}_0))^{\varkappa_0}} \sim \frac{C}{(1-t)\ln(1-t)},$$

получаем, что $p_2''(t) \notin L_2(0,1)$. Заметим также, что $P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2)$, а также построенные по ней $P_1(t) = t\,P'(t)$, $P_2(t) = t\,P_1'(t)$ – медленно меняющаяся при $t \to 1$. Поэтому асимптотики интегралов $C_j^P(\omega)$, $I_j^P(\omega)$, $j = 1,2$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (12) примет вид:

$$0 = \det{}_1(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{\omega^3}\frac{\pi^2 d^2}{4\,\varkappa_0^2} - \frac{\pi^2 d^2}{2\,\varkappa_0}\frac{1}{\omega^3\ln(\omega)} + O\Big(\frac{1}{\omega^3\ln^2(\omega)}\Big),$$

где константа d определена в формуле (10). Откуда для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}$ получаем $\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^k\cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)} + O\big(\frac{1}{\ln^2(k)}\big)$. Из замечания 1 следует, что $k_0 = 0$.

3) Заметим, что $\widetilde{p}_j''(t) \notin L_2(0,1)$, $j = 0,1$. Асимптотики интегралов $C_j^w(\omega)$, $I_j^w(\omega)$, $I_j^{vw}(\omega)$, $j = 0,1$, $v,w = P,Q$, могут быть найдены из предложений 2–4 из приложения; уравнение (14) примет вид:

$$0 = \det{}_2(\omega) = \frac{\pi^4}{16\,(\varkappa_0 d^2 - 1)\,\varkappa_0^2\, d^2}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega^4} + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\Big). \qquad (21)$$

Отсюда получаем для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}$:

$$\omega_{k+k_0} = \pi k + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big).$$

Поскольку процесс $X^{(3)}$ является одномерным возмущением процесса $X^{(1)}$, то по замечанию 1 имеем $k_0 = 1$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

§4. Асимптотика вероятности малых уклонений в L_2

Во всех случаях (кроме случаев **2)** и **3)** для распределения Гумбеля) аппроксимирующие последовательности $\widetilde{\mu}_k$ имеют степенное поведение при $k \to \infty$, т.е. $\big[a(k+b)\big]^{-d}$. Поэтому в этих случаях удается найти точную асимптотику малых уклонений. В случаях **2)** и **3)** для распределения Гумбеля аппроксимирующие последовательности $\widetilde{\mu}_k$ имеют более сложное поведение при $k \to \infty$, поэтому асимптотику малых уклонений удается найти с точностью до мультипликативной константы.

Теорема 5. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, в случае проверки на распределение Лапласа* ($\varepsilon \to 0$)*:*

$$\mathbf{1)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(1)}\| < \varepsilon\bigr) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr); \tag{22}$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(2)}\| < \varepsilon\bigr) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr); \tag{23}$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(3)}\| < \varepsilon\bigr) \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr). \tag{24}$$

Доказательство. Применим принцип сравнения Ли (предложение 1). В случаях **1)** и **2)** в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\gamma_k := \bigl[(k + 1/2)\,\pi\bigr]^{-2}. \tag{25}$$

Известно, что [7, теорема 6.2])

$$\mathbf{P}\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,\xi_k^2 < \varepsilon^2\Bigr) \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr).$$

Найдем константу “расхождения” из (2). Для этого рассмотрим:

$$\mathbf{1)}\ \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}}\Bigr)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2\pi)^2\cdot(4\pi)^2\cdot\ldots\cdot(2k\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k-1)\pi}{2}\cdot\frac{(4k+1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{2)}\ \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(2)}}\Bigr)^{1/2} = \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\widetilde{\mu}_k^{(2)}}\Bigr)^{1/2}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}}\Bigr)^{1/2}; \tag{26}$$

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\widetilde{\mu}_k^{(2)}}\Bigr)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\pi\cdot(3\pi)^2\cdot(5\pi)^2\cdot\ldots\cdot((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k+3)\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Заметим, что последовательности $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ и $\widetilde{\omega}_k^{(2)} = (\widetilde{\mu}_k^{(2)})^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_1(\omega)$ определен в формуле (17)):

$$H_1(\omega) = -\frac{\omega}{2}\cdot\det\nolimits_1(\omega)\cdot\cos(\omega/2);\ H_2(\omega) = \frac{\cos^2(\omega/2)}{1-\frac{\omega^2}{\pi^2}};\ H_1(0) = H_2(0) = 1.$$

Воспользуемся леммой 1 из [17], получаем:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}} &= \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}\\ &= \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos^2(\omega/2)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{\pi^2}{4}\,\frac{\omega}{2}\,\frac{\cos^2(\omega/2)}{(\omega/2)^3}\right]\right)=\frac{1}{4}, \qquad (28)\end{aligned}$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ρ_k ковариационного оператора ($k\in\mathbb{N}$):

$$\rho_k := \big[(k+1)\,\pi\big]^{-2}. \qquad (29)$$

Известно, что [7, теорема 6.2])

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\,\xi_k^2<\varepsilon^2\Big)\sim\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big). \qquad (30)$$

Найдем константу “расхождения”. Комбинируя результаты случаев **1**) и **2**), получаем:

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k}{\mu_k^{(3)}}\Big)^{1/2} &= \Big(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Big)^{1/2}\cdot\Big(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\Big)^{1/2}\\ &= \Big(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Big)^{1/2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

откуда, используя формулу (30), получаем утверждение теоремы в этом случае.

Теорема 6. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, в случае проверки на логистическое распределение* ($\varepsilon\to 0$)*:*

$$\textbf{1)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(1)}\|<\varepsilon\big)\sim\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big); \qquad (31)$$

$$\textbf{2)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(2)}\|<\varepsilon\big)\sim\frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big); \qquad (32)$$

$$\textbf{3)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(3)}\|<\varepsilon\big)\sim\frac{4\sqrt{15\,(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big). \qquad (33)$$

Доказательство. 1) В данном случае $p_1''(t) \in L_2(0,1)$, поэтому по теореме 3 из работы [14] вероятность малых уклонений можно найти по формуле:

$$\mathbf{P}\big(\|X^{(1)}\| < \varepsilon\big) \sim \frac{1}{\|p_1''\|_2}\,(2\,\varepsilon^2)^{-1}\,\mathbf{P}\big(\|B\| < \varepsilon\big)$$
$$= \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big), \quad \varepsilon \to 0.$$

В случаях **2**) и **3**) применим принцип сравнения Ли (предложение 1).
2) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора γ_k, определенными в (25). Найдем константу “расхождения”. Аналогично случаю **2)** теоремы 5 получаем формулы (26) и (27). Найдем $\prod \widetilde{\mu}_k^{(2)}/\mu_k^{(2)}$. Заметим, что последовательности $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ и $\widetilde{\omega}_k^{(2)} = (\widetilde{\mu}_k^{(2)})^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_1(\omega)$ определен в формуле (18)):

$$H_1(\omega) = -\omega\cdot\det{}_1(\omega); \qquad H_2(\omega) = \frac{\cos^2(\omega/2)}{1-\frac{\omega^2}{\pi^2}}; \qquad H_1(0) = H_2(0) = 1.$$

Воспользуемся леммой 1 из [17], получаем:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}$$
$$= \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos^2(\omega/2)}{1-(\frac{\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{9\pi^2}{(3+\pi^2)}\frac{\cos^2(\omega/2)}{\omega^2}\right]\right) = \frac{3+\pi^2}{9}, \tag{34}$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами β_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\beta_k := \big[(k+3/2)\,\pi\big]^{-2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Известно, что [7, теорема 6.2]

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big) \sim \frac{4}{3\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Найдем константу “расхождения”. Введем последовательность: $\alpha_{2k-1} = \alpha_{2k} = [(2k+1)\,\pi]^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\mu_k^{(3)}}\Bigr)^{1/2} = \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\mu_k^{(3)}}\Bigr)^{1/2}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigr)^{1/2}$$
$$= \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\Bigr)^{1/2}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Bigr)^{1/2}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigr)^{1/2}.$$

Из [14, формула (2.10)], (34) и (27) получаем

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\Bigr)^{1/2} = \sqrt{30}\,\pi; \qquad \Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Bigr)^{1/2} = \frac{\sqrt{3+\pi^2}}{3};$$
$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigr)^{1/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

Теорема 7. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, *в случае проверки на распределение Гумбеля* $(\varepsilon \to 0)$*:*

$$\mathbf{1)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(1)}\| < \varepsilon\bigr) \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr); \tag{35}$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(2)}\| < \varepsilon\bigr) \sim D\cdot\frac{1}{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr); \tag{36}$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbf{P}\bigl(\|X^{(3)}\| < \varepsilon\bigr) \sim D\cdot\exp\bigl(2\,\pi\ln^2(\ln(\varepsilon^{-1}))\bigr)\,\varepsilon^{-2}\exp\Bigl(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Bigr). \tag{37}$$

Замечание 6. В случаях **2)** и **3)** мультипликативную константу D найти не удается.

Доказательство. Применим принцип сравнения Ли (предложение 1).
1) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k ковариационного оператора, определенными в (25). Рассуждая аналогично случаю **2)** теоремы 5, имеем:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\biggl(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2} : \Bigl[-\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\Bigr]\biggr) = 1,$$

откуда следует утверждение теоремы в этом случае.
2) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами η_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\eta_k := \Big[(k+1/2)\,\pi - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))}\Big]^{-2}.$$

Принцип сравнения Ли применим, потому что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\mu_k^{(2)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{k\,\ln(k)\,(\ln(\ln(k)))^2}\Big)\Big) < \infty.$$

По теореме 4 из [17] имеем утверждение теоремы в этом случае.
3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ζ_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\zeta_k := \Big[(k+1)\,\pi + 2\pi\,\frac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)}\Big]^{-2}.$$

Принцип сравнения Ли применим, потому что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k}{\mu_k^{(3)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + O\Big(\frac{\ln(\ln(k))}{k\ln^2(k)}\Big)\Big) < \infty.$$

По теореме 4 из [17] имеем утверждение теоремы в этом случае.

Теорема 8. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, в случае проверки на гамма-распределение ($\varepsilon \to 0$):*

$$\textbf{1)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(1)}\| < \varepsilon\big) \sim \frac{4\,\varkappa_0^{1/2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big); \tag{38}$$

$$\textbf{2)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(2)}\| < \varepsilon\big) \sim \frac{4\,d\,\varkappa_0}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big); \tag{39}$$

$$\textbf{3)}\quad \mathbf{P}\big(\|X^{(3)}\| < \varepsilon\big) \sim \frac{\varkappa_0\,d\sqrt{2(\varkappa_0 d^2 - 1)}}{\pi^{7/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\Big), \tag{40}$$

где константа d определена в формуле (10) (*заметим, что* ($\varkappa_0\,d^2 - 1) = \det(S) > 0$).

Замечание 7. При $\varkappa_0 = 1$ гамма-распределение совпадает с экспоненциальным, поэтому формула (38) дает асимптотику вероятности малых уклонений для предельного процесса при проверке выборки на экспоненциальность в случае, когда среднеквадратическое отклонение оценивается по выборке.

Доказательство. Применим принцип сравнения Ли (предложение 1). В случаях **1)** и **2)** в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора γ_k, определенными в формуле (25). Рассуждая аналогично случаю **2)** теоремы 5, получаем:

$$\textbf{1)}\ \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}}=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2}:\left[-\frac{\pi^2}{4\,\varkappa_0}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right]\right)=\varkappa_0,$$

$$\textbf{2)}\ \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(2)}}=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2}:\left[-\frac{\pi^2}{4\,\varkappa_0^2\,d^2}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right]\right)=\varkappa_0^2d^2,$$

откуда следует утверждение теоремы в этих случаях.

3) Аналогично случаю **3)** теоремы 5 в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора ρ_k, определенными в формуле (29). Найдем константу "расхождения". Последовательности $\omega_k^{(3)}=(\mu_k^{(3)})^{-1/2}$ и $\widetilde{\omega}_k^{(3)}=(\rho_k)^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_2(\omega)$ определен в формуле (21)):

$$H_1(\omega)=-\omega^3\cdot\det\nolimits_2(\omega);\ H_2(\omega)=\frac{\sin(\omega)}{\omega(1-\frac{4\omega^2}{\pi^2})},\ H_1(0)=H_2(0)=1.$$

Воспользуемся леммой 1 из [17]. Получаем

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k}{\mu_k^{(3)}}&=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}\\ &=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega(1-(\frac{2\omega}{\pi})^2)}:\left[-\frac{\pi^4}{16\varkappa_0^2d^2(\varkappa_0d^2-1)}\frac{\sin(\omega)}{\omega^3}\right]\right)\\ &=\frac{4\varkappa_0^2d^2(\varkappa_0d^2-1)}{\pi^2},\end{aligned}$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае.

§5. Приложение

Пусть функция $F(t)$ задана на полуинтервале $(0,1/2]$, $F(1/2)=0$, и функции $F_0(t)=F(t)$, $F_{n+1}(t)=t\,F_n'(t)$, $n\ge 0$, являются медленно меняющимися в нуле.

Предложение 2. (теорема 1, [17]) *При $\omega \to \infty$ имеет место формула:*

$$\int\limits_0^{1/2} F(t)\,\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{N} c_k^{\cos}\,F_k\Big(\frac{1}{\omega}\Big) + R_N^{\cos},$$

где

$$c_k^{\cos} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx, \quad k \ge 1, \quad |R_N^{\cos}| \le C(F,N)\cdot\frac{\big|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})\big|}{\omega}.$$

Предложение 3. (теорема 2, [17]) *При $\omega \to \infty$ имеет место формула:*

$$\int\limits_0^{1/2} F(t)\,\sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{N} c_k\,F_k\Big(\frac{1}{\omega}\Big) + R_N,$$

где $c_0 = 1$ и при $k \ge 1$

$$c_k = -\int\limits_0^{1} \frac{1-\cos(x)}{x}\,\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx,$$

$$|R_N| \le C(F,N)\cdot\frac{|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})|}{\omega}.$$

Предложение 4. *При $\omega \to \infty$ имеет место формула:*

$$\int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{\tau} F(t)\,G(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{1/2} F(t)\,G(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{\substack{k+m=n\\k,m\ge1}} a_{k,m}\,F_k\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\,G_m\Big(\frac{1}{\omega}\Big) + R_N,$$

где

$$a_{k,m} = -\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos(y)}{y}\,\frac{\ln^{m-1}(y)}{(m-1)!}\,dy\,dx,$$

$$|R_N| \le \frac{C(F,G,N)}{\omega^2}\sum_{\substack{i+j=N+1\\i,j\ge1}}\Big|F_i\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\,G_j\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\Big|.$$

Доказательство. При $G(t) = F(t)$ предложение доказано в [17, теорема 3]. Доказательство в общем случае проходит без изменений.

Я признательна А. И. Назарову за ценные советы и редакторские правки.

Литература

1. М. Лифшиц, *Лекции по гауссовским случайным процессам.* СПб, Лань, 2016.
2. Г. Сытая, *О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве.* — Теория случайных процессов, 1974.
3. V. M. Zolotarev, *Gaussian measure asymptotics in L_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero.* — In: 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna, **254**, 1979.
4. J. Hoffmann-Jorgensen, L. A. Shepp, R. M. Dudley, *On the lower tail of Gaussian seminorms.* — Ann. Probab. **7** (1979), 319–342.
5. И. Ибрагимов, *О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **85** (1979), 75–93.
6. T. Dunker, M. A. Lifshits, W. Linde, *Small deviation probabilities of sums of independent random variables.* — In: High Dimension. Probab. **43** (1998), 59–74.
7. A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems.* — Probab. Theory Relat. Fields **129**, No. 4 (2004), 469–494.
8. W. V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — J. Theoret. Probab. **5**, No. 1 (1992), 1–31.
9. F. Gao, J. Hannig, F. Torcaso, *Comparison theorems for small deviations of random series.* — Electron. J. Probab. **8**, No. 21 (2003), 1–17.
10. A. I. Nazarov, *Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems.* — J. Theoret. Probab. **22**, No. 3 (2009), 640–665.
11. J. Durbin, *Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated.* — Ann. Statist. **1**, No. 2 (1973), 279–290.
12. И. Гихман, *О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики.* — Укр. матем. журн. **5**, No. 4 (1953).
13. И. Гихман, *Процессы Маркова в задачах математической статистики.* — Укр. матем. журн. **6** (1954), 28–36.
14. А. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций.* — Теория вероятн. и ее примен. **54**, No. 2 (2009), 209–225.
15. А. Владимиров, И. Шейпак, *О задаче Неймана для уравнения Штурма-Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа.* — Функцион. анализ и его приложен. **47**, No. 4 (2013), 18–29.
16. М. Бирман, М. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Учебное пособие.* Издательство Ленинградского университета, 1980.

17. А. Назаров, Ю. П. Петрова, *Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца-Кифера-Вольфовица.* — Теория вероятн. и ее примен. **60**, No. 3 (2015), 482–505.
18. M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, *On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods.* — Ann. Math. Statist. **26**, No. 2 (1955), 189–211.
19. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.

Petrova Yu. P. Exact L_2-small ball asymptotics for some Durbin processes.

We find the exact L_2-small ball asymptotics for some Durbin processes. These processes are finite dimentional perturbations of the Brownian bridge $B(t)$ and naturally appear in statistics as limit ones when building goodness-of-fit tests of ω^2-type for testing a sample for some distribution with estimated parameters. Earlier, in the work of Nazarov and Petrova, Kac–Kiefer–Wolfowitz processes (which correspond for testing normality) were considered, where a technique for obtaining asymptotics of oscillating integrals with a slowly varying amplitude was developed. Due to this, it is possible to calculate the asymptotics of small deviations for Durbin processes for certain distributions (Laplace, logistic, Gumbel, gamma).

198504, Россия, Санкт-Петербург,
Старый Петергоф,
Университетский проспект, дом 28,
СПбГУ, математико-механический факультет
E-mail: yu.pe.petrova@yandex.ru

Поступило 23 ноября 2017 г.