Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

В. В. Петров

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ О СУЩЕСТВОВАНИИ МОМЕНТОВ

Пусть $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве, $\{a_n; n = 1, 2, \dots\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \overline{S_n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k. \tag{1}$$

Введём следующее условие (условие D): для любых положительных ε и $\varepsilon_0 < \varepsilon$ существует число $\gamma > 0$, такое что

$$\mathbf{P}(\overline{S_n} > (1+\varepsilon)a_n) \leqslant \gamma \mathbf{P}(S_n > (1+\varepsilon_0)a_n) \tag{2}$$

для всех достаточно больших n.

Пусть число c удовлетворяет условию $c > 1$. Тогда существует последовательность целых положительных чисел $\{n_k; k = 1, 2 \dots\}$, такая что

$$a_{n_k - 1} \leqslant c^k < a_{n_k} \tag{3}$$

для всех достаточно больших k. Очевидно, эта последовательность неограниченно возрастает.

Теорема. *Пусть выполнено условие D, и пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{n_k} > (1+\varepsilon)a_{n_k}) < \infty \tag{4}$$

для введенной последовательности $\{n_k\}$ и любых $\varepsilon > 0$, $c > 1$. Тогда

$$\limsup S_n / a_n \leqslant 1 \quad \textit{п.н.} \tag{5}$$

Ключевые слова: закон повторного логарифма, суммы случайных величин.

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число. Ввиду неубывания числовой последовательности $\{a_n\}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n > (1+\varepsilon)a_n\, i.o.) &\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k} S_n > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}}\text{ б.ч.}\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}(\overline{S_{n_k}} > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}}\text{ б.ч.}).\end{aligned} \tag{6}$$

Из (3) следует, что $c^{k-1} < a_{n_{k-1}} \leqslant c^k$, $a_{n_k} < c^2 a_{n_{k-1}}$, для всех достаточно больших k. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\overline{S_{n_k}} > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}}\ \textit{б.ч.}) &\leqslant \mathbf{P}(\overline{S_{n_k}} > (1+\varepsilon)a_{n_k}/c^2\ \textit{б.ч.})\\ &\leqslant \mathbf{P}(\overline{S_{n_k}} > (1+\varepsilon/2)a_{n_k}\ \textit{б.ч.})\end{aligned} \tag{7}$$

при выборе числа c достаточно близким к 1.

В силу (6), (7) и леммы Бореля–Кантелли для доказательства (5) достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\overline{S_{n_k}} > (1+\varepsilon)a_{n_k}) < \infty \tag{8}$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $c > 1$. Последнее утверждение следует из (4) и условия (D). Теорема доказана. □

Более широкий круг применений по сравнению с условием D может иметь следующее условие: для любого $\delta > 0$ существует число $\gamma > 0$, такое что

$$\mathbf{P}(\overline{S_n} \geqslant x) \leqslant \gamma\mathbf{P}(S_n \geqslant x - \delta a_n) \tag{9}$$

для любого x и всех достаточно больших n.

Оба неравенства (2) и (9) имеют своим отправным пунктом неравенство Колмогорова $\mathbf{P}(\overline{S_n} \geqslant x) \leqslant 2\mathbf{P}(S_n \geqslant x - \sqrt{2B_n})$ для любого x и суммы независимых случайных величин X_n с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, где $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k^2$. Именно это неравенство является ключевым в данном Колмогоровым доказательстве исторически первой общей формы закона повторного логарифма для последовательностей независимых случайных величин [1] (см. также [2], теорема 7.1).

Литература

1. A. Kolmogoroff, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus.* — Math. Annalen **101** (1929), 126–135.
2. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory. Oxford University Press.* New York, 1995.

Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm without assumptions about the existence of moments.

Sufficient conditions are found for the applicability of the generalized law of the iterated logarithm for sums of random variables without conditions of independence and the existence of moments.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `petrov2v@mail.ru`

Поступило 5 октября 2017 г.