Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

Г. Кристоф, М. М. Монахов, В. В. Ульянов

РАЗЛОЖЕНИЯ ЧЕБЫШЕВА–ЭДЖВОРТА И КОРНИША–ФИШЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК, ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫБОРКАМ СЛУЧАЙНОГО РАЗМЕРА

§1. Введение

В классических задачах математической статистики размер выборки традиционно считается детерминированным и играет роль известного параметра, который, как правило, бесконечно возрастает. Однако на практике практически всегда возникают ситуации, при которых размер выборки не определен заранее и может считаться случайным. Обычно это возникает ввиду того, что данные накапливаются в течении определенного времени, который по разным причинам нельзя считать фиксированным. В этом случае возникает задача оценки различных характеристик данной статистики, например, функции распределения или квантилей. В работе Гнеденко [1] показано, что асимптотические характеристики статистики могут радикально измениться, когда неслучайный объем выборки заменяется случайной величиной. Предельные распределения для последовательностей случайных индексов и их применение рассматриваются, например, в монографии Гнеденко и Королева [2]. В работах Бенинга, Галиевой и Королева [3, 4] доказана общая теорема переноса, позволяющая получить скорость сходимости и первый порядок разложения типа Чебышева–Эджворта для асимптотически нормальных статистик, построенных по выборкам случайного объема. Их утверждения опираются на результаты для соответствующего распределения неслучайной нормированной статистики и для случайного размера выборки, лежащей в основе статистики.

Данная работа развивает и уточняет результаты работ [3, 4]: для распределений статистик, построенных по выборкам случайного размера специального вида, получены разложения Чебышева–Эджворта

Ключевые слова: разложения Корниша–Фишера; разложения Чебышева–Эджворта; выборка случайного объема; распределение Лапласа; распределение Стьюдента.

и Корниша–Фишера второго порядка на базе t-распределения Стьюдента и распредедения Лапласа и их квантилей. Роль и различные практические применения этих предельных распределений описаны, например, в работах Бенинга и Королева [5, 6] и в работе Шультера и Треда [7]. Классические разложения КорнишаФишера на базе квантилей нормального распределения были введены Корнишем и Фишером [8], их обобщения были предложены Хиллом и Дэвисом [9], см.также работу Ульянова [10]. В последние годы интерес к разложениям Корниша–Фишера значительно вырос в связи с исследованиями по управлению рисками. Широко распространенная мера риска VaR является, по существу, квантилью функции потерь, связанной с описанием инвестиционного портфеля из финансовых инструментов (см., например, Яшке [11]).

Используем следующие обозначения: $\mathbf{R}$ – множетсво вещественных чисел, $\mathbf{N} := \{1, 2, \ldots\}$ – положительные целые числа и $\mathbf{I}_A(x)$ – индикаторная функция.

Рассмотрим случайные величины (с.в.) $X, X_1, X_2, \ldots \in \mathbf{R}$ и $N_1, N_2, \ldots \in \mathbf{N}$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$. В статистике с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ имеют смысл наблюдений с неслучайным размером выборки $m \in \mathbf{N}$, а с.в. N_n – случайного объема выборки, зависящего от натурального параметра $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что при каждом $n \in \mathbf{N}$ с.в. $N_n \in \mathbf{N}$ независима от последовательности с.в. $X_1, X_2, \ldots$.

Обозначим через $T_m := T_m(X_1, \ldots, X_m)$ некоторую статистику с неслучайным размером выборки $m \in \mathbf{N}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ определим случайную величину T_{N_n}, полагая

$$T_{N_n}(\omega) := T_{N_n(\omega)}\left(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}\right), \quad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

т.е. T_{N_n} – это статистика, построенная на основе статистики T_m по выборке случайного объема N_n.

В данной работе мы рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) с.в. $X, X_1, X_2, \ldots$, таких что

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{E}\,|X|^5 < \infty, \ \ \mathbf{E}(X) = \mu, \ \ 0 < \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \\ \lambda_3 = \sigma^{-3}\,\mathbf{E}\,(X-\mu)^3\,, \ \ \lambda_4 = \sigma^{-4}\,\mathbf{E}\,(X-\mu)^4 - 3 \end{array}\right\} \tag{2}$$

(где λ_3 – коэффициент асимметрии, λ_4 – коэффициент эксцесса) и предположим, что распределение с.в. X удовлетворяет условию Крамера:

$$\limsup_{|t|\to\infty} \left|\mathbf{E}\, e^{itX}\right| < 1. \tag{3}$$

В качестве статистики T_m возьмем выборочное среднее, которое является асимптотически нормальным,

$$T_m = (X_1 + \cdots + X_m)/m\,, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

Тогда получаем, см., например, Петров [22, теорема 5.17, $k = 5$],

$$\sup_x \left|\mathbf{P}(\sigma^{-1}\sqrt{m}(T_m - \mu) \leqslant x) - \Phi_{2;m}(x)\right| \leqslant C m^{-3/2}, \tag{5}$$

где C не зависит от m и

$$\Phi_{2;m}(x) = \Phi(x) - \left(\frac{\lambda_3}{6\sqrt{m}} H_2(x) + \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_4}{24} H_3(x) + \frac{\lambda_3^2}{72} H_5(x)\right)\right)\varphi(x)$$

есть асимптотическое разложение второго порядка где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального распределения соответственно, и

$$H_2(x) = x^2 - 1\,, \quad H_3(x) = x^3 - 3x \quad \text{и} \quad H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x \tag{6}$$

суть полиномы Чебышева–Эрмита.

Рассмотрим теперь случайное выборочное среднее T_{N_n}, построенное на основе статистики (4), со случайным числом N_n слагаемых $X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}$:

$$T_{N_n} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_n})/N_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Пусть g_n – последовательность положительных вещественных чисел: $0 < g_n \uparrow \infty$. Предположим, что $N_n \to \infty$ по вероятности, при $n \to \infty$. Предельное распределение $\mathbf{P}\big(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\big)$ представляет собой масштабную смесь нормального распределения с нулевым средним, зависящую от случайного размера выборки N_n. В разделе 2 приведены вспомогательные утверждения для нахождения разложений Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера для нормированного случайного среднего T_{N_n}. В разделе 3 в качестве случайного размера выборки N_n рассматривается отрицательное биномиальное распределение, смещенное на 1, с вероятностью успеха $p = 1/n$, как одно из ведущих распределений для счетных моделей. В этом случае N_n/g_n с $g_n = \mathbf{E}\,N_n$ сходится к гамма-распределению, а нормированное случайное среднее

T_{N_n} – к t-распределению Стьюдента. В разделе 4 случайный размер N_n является максимумом из n н.о.р. дискретных с.в. с распределением Парето с параметром 1, при этом N_n/g_n с $g_n = n$ сходится к обратному экспоненциальному распределению. Предельное распределение нормированного случайного среднего T_{N_n} в этом случае – распределение Лапласа. В обоих случаях сначала находится явно разложение Чебышева–Эджворта второго порядка для N_n/g_n, а затем разложения Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера второго порядка для T_{N_n}. Все доказательства собраны в разделе 5.

§2. Вспомогательные утверждения

Предположим, что статистика $T_m = T_m\left(X_1, \dots, X_m\right)$ удовлетворяет следующему условию для неслучайного размера выборки $m \in \mathbf{N}$:

Условие 1: *Существуют дифференцируемые ограниченные функции $f_1(x), f_2(x)$ и вещественные числа $a > 1$, $C_1 > 0$, такие что для всех целых $m \geqslant 1$*

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{m}(T_m - \mu) \leqslant x\right) - \Phi(x) - m^{-1/2} f_1(x) - m^{-1} f_2(x)\right| \leqslant C_1 m^{-a}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь статистику $T_{N_n} = T_{N_n}\left(X_1, \dots, X_{N_n}\right)$ со случайным числом $N_n \in \mathbf{N}$ наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_{N_n}$.

Предположим, что функция распределения (ф.р.) нормированного случайного размера выборки N_n удовлетворяют следующему условию:

Условие 2: *Существуют ф.р. $H(y)$ с $H(0+) = 0$, функция ограниченной вариации $h_2(y)$, последовательность $0 < g_n \uparrow \infty$ и вещественные числа $b > 1$ и $C_2 > 0$, такие что для всех целых $n \geqslant 1$*

$$\sup_{y \geqslant 0} \left|\mathbf{P}\left(g_n^{-1} N_n \leqslant y\right) - H(y) - n^{-1} h_2(y)\right| \leqslant C_2 n^{-b}. \tag{9}$$

Утверждение 1. *Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. с.в., удовлетворяющие* (2) *и условию Крамера* (3), *т.е. согласно* (5) *условие* 1 *выполнено, и* (8) *удовлетворяется с*

$$f_1(x) = -\frac{\lambda_3}{6} H_2(x)\,\varphi(x),$$
$$f_2(x) = -\left(\frac{\lambda_4}{24} H_3(x) + \frac{\lambda_3^2}{72} H_5(x)\right)\varphi(x) \quad \text{и} \quad a = 3/2.$$

Предположим, что для случайного размера выборки N_n *выполнено условие* 2 (9) *с дополнительными предположениями*

$$h_2(0) = 0, \quad H(g_n^{-1}) \leqslant c_0\, n^{-\gamma} \quad \text{и} \quad h_2(g_n^{-1}) \leqslant c_1\, n^{1-\gamma} \tag{10}$$

для некоторого $\gamma > 1$. *Тогда существует константа*

$$C_3 = C_3(\lambda_3, \lambda_4, C_2) > 0,$$

такая что при всех $n \in \mathbf{N}$

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\right) - G_{2,n}(x)\right| \leqslant C_1\, \mathbf{E}(N_n^{-a}) + C_3\, n^{-\min\{b,\gamma\}},$$

где

$$\begin{aligned} G_{2;n}(x) = \int\limits_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, dH(y) + \frac{1}{\sqrt{g_n}} \int\limits_0^\infty \frac{f_1(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\, dH(y) \\ + \frac{1}{g_n} \int\limits_0^\infty \frac{f_2(x\sqrt{y})}{y}\, dH(y) + \frac{1}{n} \int\limits_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, dh_2(y). \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогичная теорема, однако с другим выражением для $G_{2;n}(x)$, доказана в работе [3, теорема 3.1] для статистики T_{N_n} с асимптотически нормальной статистикой $T_m(X_1, \ldots, X_m)$ и случайным размером выборки N_n.

Пусть $F_n(x)$ – последовательность ф.р., такая что для каждой из них справедливо разложение Чебышева–Эрмита по степеням $g_n^{-1/2}$ с $0 < g_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} &F_n(x) = G(x) + g(x)\Big(a_1(x)g_n^{-1/2} + a_2(x)g_n^{-1}\Big) + R(g_n), \\ &R(g_n) = \mathcal{O}(g_n^{-1}), \end{aligned} \tag{12}$$

где $g(x)$ – плотность непрерывного предельного распределения $G(x)$.

Утверждение 2. *Пусть* $F_n(x)$ *определена в* (12) *и пусть* $x(u)$ *и* u *– квантили одного порядка для распределений* F_n *и* G *соответственно, т.е.* $F_n(x(u)) = G(u)$. *Тогда справедливо следующее разложение:*

$$x(u) = u + b_1(u)g_n^{-1/2} + b_2(u)g_n^{-1} + R^*(g_n), \;\; R^*(g_n) = \mathcal{O}(g_n^{-1}), \quad n \to \infty,$$

где

$$b_1(u) = -a_1(u) \quad \text{и} \quad b_2(u) = \frac{g'(u)}{2\, g(u)} a_1^2(u) + a_1'(u)a_1(u) - a_2(u)\,.$$

Утверждение 2 является следствием более общих утверждений, см. например, Фуджикоши, Ульянов и Шимису [12, гл. 5.6.1] или Ульянов, Аошима и Фуджикоши [13].

§3. Разложения Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера для случая распределения Стьюдента как предельного

Ф.р. t-распределения Стьюдента $S_\nu(x)$ – это абсолютно непрерывная ф.р. вероятности, заданная плотностью

$$s_\nu(x) = \frac{\Gamma\big((\nu+1)/2\big)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\Big(1+\frac{x^2}{\nu}\Big)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

где $\nu > 0$ – вещественный параметр. Если параметр ν – положительное целое, то он называется числом степеней свободы. t-распределение Стьюдента является предельным распределением для статистики T_{N_n} определенной в (1), если статистика $T_m := T_m\,(X_1,\dots,X_m)$ асимптотически нормальна, с.в. $X_1, X_2, \dots$ имеют конечные дисперсии, размер выборки N_n имеет отрицательное биномиальное распределение и независим от $X_1, X_2, \dots$, и $N_n \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$.

Предположим, что размер выборки $N_n(r)$ имеет отрицательное биномиальное распределение (смещен на 1) с вероятностью успеха $1/n$ и вероятностями

$$\mathbf{P}(N_n(r)=j) = \frac{\Gamma(j+r-1)}{(j-1)!\,\Gamma(r)}\left(\frac{1}{n}\right)^r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1},\ j=1,2,\dots,\ r>0. \tag{14}$$

Поскольку $N_n(r) \in \{1,2,\dots\}$, случайное среднее $T_{N_n(r)}$ однозначно определено. Если параметр r – положительное целое, тогда $r \geqslant 1$ – предопределенное количество успехов, и $N_n(r)-1$ представляет собой случайное число неудач до прекращения эксперимента. Более того, для фиксированного $k \in \mathbf{N}$, см. формулу (5.31) в книге Джонсона, Кемпа и Котца [14, с. 218], ф.р. для $N_n(r)$ определяется следующим образом

$$\mathbf{P}(N_n(r) \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\Gamma(j+r-1)}{(j-1)!\,\Gamma(r)}\Big(\frac{1}{n}\Big)^r\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{j-1} = \frac{B_{1/n}(r,k)}{B(r,k)} \tag{15}$$

с бета-функцией $B(r,k) = \Gamma(k)\,\Gamma(r)/\Gamma(k+r)$ и неполной бета-функцией

$$B_{1/n}(r,k) = \int\limits_0^{1/n} u^{r-1}\,(1-u)^{k-1}du \overset{u=t/(1+t)}{=} \int\limits_0^{1/(n-1)} \frac{t^{r-1}}{(1+t)^{k+r}}dt. \qquad (16)$$

Положим $g_n := \mathbf{E}(N_n(r)) = r\,(n-1)+1$. Тогда

$$\sup_{x>0} |\mathbf{P}(N_n(r)/\mathbf{E}(N_n(r)) \leqslant x) - G_{r,r}(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $G_{\alpha,\beta}(x)$ – ф.р. гамма-распределения с параметрами $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и плотностью

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, \mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x), \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (17)$$

Для асимптотически нормальной с.в. T_m пределом для

$$\mathbf{P}\big(\sigma^{-1}\sqrt{r(n-1)+1}\,(T_{N_n(r)} - \mu) \leqslant x\big)$$

является ф.р. t-распределения Стьюдента $S_{2r}(x)$ с функцией плотности (13) и параметром $\nu = 2r$, см. работу Бенинга и Королева [6, следствие 2.1], или работу Шультера и Треда [7, теорема 1]. В работах Бенинга, Галиевой и Королева [3], [4] найдены общие условия скорости сходимости, а также построены разложения типа Чебышева–Эджворта первого порядка для распределения статистики T_{N_n}, построенной по выборке случайного размера $N_n(r)$. Чтобы получить разложение типа Чебышева–Эджворта второго порядка для нормированной статистики $T_{N_n(r)}$, необходимо построить разложение типа Чебышева–Эджворта второго порядка для $N_n(r)/\mathbf{E}(N_n(r))$, см. (9) в условии 2 выше. Поскольку предельное гамма-распределение $G_{r,r}(x)$ – непрерывная функция, а $\mathbf{P}(N_n(r)/\mathbf{E}(N_n(r)) \leqslant x)$ – ступенчатая функция, необходимо добавить разрывную функцию для того, чтобы убрать скачки.

Теорема 1. *Пусть $r > 1$, дискретная с.в. $N_n(r)$ имеет распределение, задаваемое формулой* (14), *и* $\mathbf{E}\,N_n(r) = r(n-1)+1$. *Для $x > 0$ и всех $n \in \mathbf{N}$ существует вещественное число $C_2(r) > 0$, такое что*

$$\sup_{x\geqslant 0} \left|\mathbf{P}\Big(\frac{N_n(r)}{r(n-1)+1} \leqslant x\Big) - G_{2;n}(x)\right| \leqslant C_2(r)\, n^{-\min\{r,2\}}, \qquad (18)$$

где

$$G_{2;n}(x) = G_{r,r}(x) + \frac{a_0 G_{r,r}(x) + a_1 G_{r+1,r}(x) + a_2 G_{r+2,r}(x)}{2xn} \mathbf{I}_{[2,\infty)}(n) \quad (19)$$

$$= G_{r,r}(x) + \frac{g_{r,r}(x)\big((x-1)(2-r) + 2Q_1\big((r(n-1)+1)x\big)\big)}{2\,r\,n} \mathbf{I}_{[2,\infty)}(n), \quad (20)$$

$$a_1 = -2(x+r) + 1 - 2Q_1\big((r(n-1)+1)x\big), \; a_2 = r+1, \; a_0 = -(a_1 + a_2),$$

$$Q_1(y) = 1/2 - (y - [y]) \text{ и } [y] \text{ – целая часть } y \text{ и } y - 1 < [y] \leqslant y. \quad (21)$$

Замечание 1. Формула (20) показывает, что (9) выполняется с $H(x) = G_{r,r}(x)$,

$$h_2(x) = \big((x-1)(2-r) + 2Q_1\big(r(n-1)+1)x\big)\big) g_{r,r}(x) \mathbf{I}_{[2,\infty)}(n)/(2r)$$

для $x > 0$, $b = \min\{r, 2\}$ и $g_n = r(n-1)+1$.

На рис. 1 приведено приближение $\mathbf{P}\left(N_n(r) \leqslant (r(n-1)+1)x\right)$ к $G_{2,2}(x)$ и $G_{2,2}(x) + h_2(x)/n$.

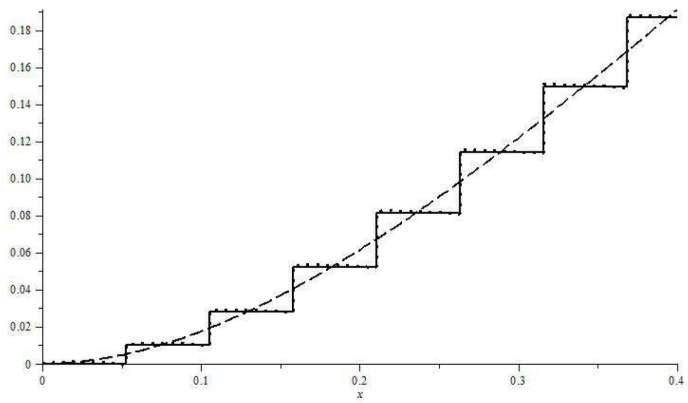

Рис. 1. Ф.р. $\mathbf{P}\left(N_n(r) \leqslant (r(n-1)+1)x\right)$ (непрерывная линия), предельное распределение $G_{2,2}(x)$ (штриховая линия) и второе приближение $G_{2,2}(x) + h_2(x)/n$ (пунктирная линия) с $n = 10$ и $r = 2$.

Замечание 2. Коэффициенты a_0, a_1, a_2 в (19) соответствуют условию $a_0 + a_1 + a_2 = 0$. В работе Ульянова, Аошимы и Фуджикоши [13] указан широкий класс статистик, имеющих представление аналогичное (19).

Замечание 3. Интегрирование по частям позволяет перейти от (19) к (20), так как

$$G_{r+1,r}(x) = -(x/r)g_{r,r}(x) + G_{r,r}(x) \tag{22}$$

и
$$G_{r+2,r}(x) = -\big(x^2/(r+1) + x/r\big)g_{r,r}(x) + G_{r,r}(x).$$

В случае $n = 1$ оценка (18) строится очень просто:

Замечание 4. Если $n = 1$, то $\mathbf{P}\big(N_1(r) = 1\big) = 1$, и левая часть формулы (18) достигает максимума в точке $x = 1$, что приводит к $C_2(r) = \min\{G_{r,r}(1), 1 - G_{r,r}(1)\} < 1$.

В дополнение к разложению $N_n(r)$ требуется оценка $\mathbf{E}(N_n(r))^{-a}$, где m^{-a} – это скорость сходимости разложения Чебышева–Эджворта для T_m, см. (8).

Лемма 1. *Пусть $r > 1$ и с.в. $N_n(r)$ определена в формуле* (14). *Тогда*

$$\mathbf{E}\big(N_n(r)\big)^{-3/2} \leqslant C(r) \begin{cases} n^{-r}, & 1 < r < 3/2, \\ \ln(n)\, n^{-3/2}, & r = 3/2, \\ n^{-3/2}, & r > 3/2. \end{cases} \tag{23}$$

В случае, когда $r = 3/2$, скорость сходимости в (23) *не может быть улучшена.*

Теперь получим разложение Чебышева–Эджворта для нормированного случайного среднего $T_{N_n(r)}$.

Теорема 2. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. с.в., и X удовлетворяет* (2) *и условию Крамера* (3). *Пусть также дискретная с.в. $N_n = N_n(r)$ с параметром $r > 1$ имеет распределение, задаваемое* (14), *и не зависит от $X_1, X_2, \ldots$. Рассмотрим статистику $T_{N_n} = N_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_{N_n})$. Предположим, что асимптотическое разложение* (5) *для статистики T_m и асимптотическое разложение* (18) *для случайного объема $N_n(r)$ с $r > 1$ справедливы с $g_n = \mathbf{E}\big(N_n(r)\big) = r(n-1)+1$. Тогда существует константа $C = C(r) > 0$, такая что для всех $n \in \mathbf{N}$*

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\right) - S_{2r;n}(x)\right|$$
$$\leqslant C \begin{cases} n^{-r}, & 1 < r < 3/2, \\ \ln(n)\, n^{-3/2}, & r = 3/2, \\ n^{-3/2}, & r > 3/2, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$S_{2r;n}(x) = S_{2r}(x) - \frac{\lambda_3\ \big((r-1)x^2 - r\big)\ s_{2r}(x)}{3\,(2\,r-1)\sqrt{g_n}}$$
$$- \frac{x\,s_{2r}(x)}{36\,(2r-1)\,g_n}\Big\{\frac{2\,\lambda_3^2\,\big((r-2)(r-3)x^4 + 10\,r\,(2-r)x^2 + 15r^2\big)}{2r+x^2}$$
$$+ 3\lambda_4\,\big((r-2)x^2 - 3r\big) + 9(r-2)(x^2+1)\Big\}.$$

В случае, когда $r = 3/2$, скорость сходимости в (24) не может быть улучшена.

На рис. 2 проиллюстрировано преимущество разложения Чебышева–Эджворта над предельным распределением в приближении эмпирической функции распределения.

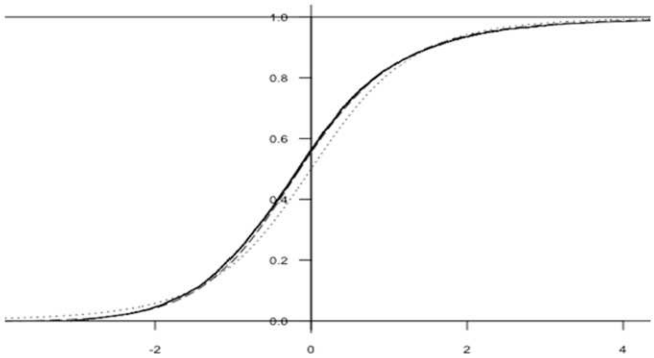

Рис. 2. Эмпирическая ф.р. $\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\right)$ (непрерывная линия), предельное распределение Стьюдента $S_{2r}(x)$ (пунктирная линия) и аппроксимация второго порядка $S_{2r;n}(x)$ (штриховая линия) для случайного среднего $N_{10}(2)$ независимых с.в. с χ_1^2–распределением с параметрами $\lambda_3 = \sqrt{8}$ и $\lambda_4 = 12$.

Замечание 5. В [3] доказано, что

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\right) - S_{2r}(x) + \frac{\lambda_3\ f_r(x)}{6\sqrt{g_n}}\right| \leqslant C(r)\,R(n)$$

где $R(n) = n^{-\min\{r,1\}}$ при $r > 1/2$, $r \neq 1$, и $R(n) = n^{-1}\ \ln(n)$ при $r = 1$, и

$$f_r(x) = \int\limits_0^\infty \frac{(1-x^2y)}{\sqrt{y}}\varphi(x\sqrt{y})\,dS_{2r}(y) = \frac{2\left((r-1)x^2 - r\right)\ s_{2r}(x)}{(2\,r-1)}.$$

Последний интеграл вычислен в работе Маркова, Монахова и Ульянова [15], где также построено разложение Корниша–Фишера первого порядка (с некоторыми вычислительными неточностями).

Используя разложение Чебышева–Эджворта второго порядка из теоремы 2 и переход из утверждения 2, получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть $x = x_\alpha$ и $u = u_\alpha$ – α-квантили нормированной статистики $\sigma^{-1}\sqrt{r(n-1)+1}\left(T_{N_n(r)} - \mu\right)$ и предельного t-распределения Стьюдента $S_{2r}(x)$, соответственно. Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение для $n \to \infty$*

$$\begin{aligned} x =& u + \frac{\lambda_3\ \left((r-1)u^2 - r\right)}{3\,(2\,r-1)\sqrt{g_n}} + \frac{1}{g_n}B_2(u) \\ &+ \begin{cases} \mathcal{O}(n^{-r}), & 1 < r < 3/2, \\ \mathcal{O}(\ln(n)\,n^{-3/2}), & r = 3/2, \\ \mathcal{O}(n^{-3/2}), & r > 3/2, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_2(u) = &- \frac{(2r+1)u}{2(2r+u^2)}\ \frac{\lambda_3^2\big((r-1)u^2 - r\big)^2}{9\,(2r-1)^2} + \frac{2\,\lambda_3^2(r-1)u\big((r-1)u^2 - r\big)}{9\,(2r-1)^2} \\ &+ \frac{u}{36\,(2r-1)}\bigg\{\frac{2\,\lambda_3^2\ \left((r-2)(r-3)u^4 + 10\,r\,(2-r)u^2 + 15r^2\right)}{2r+u^2} \\ &+ 3\lambda_4\ \left((r-2)u^2 - 3r\right) + 9(r-2)(u^2+1)\bigg\}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведен график квантиль-квантиль, сравнивающий эмпирические квантили сгенерированного нормированного случайного среднего по горизонтальной оси и квантили, основанные на разложении Корниша–Фишера, по вертикальной оси.

Замечание 6. Поскольку $g_n = r(n-1)+1$ и $|g_n^{-\gamma} - (rn)^{-\gamma}| \leqslant C(r)n^{-\gamma-1}$, множители $g_n^{-1/2}$ и g_n^{-1} в разложениях Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера можно заменить на $(rn)^{-1/2}$ и $(rn)^{-1}$ соответственно.

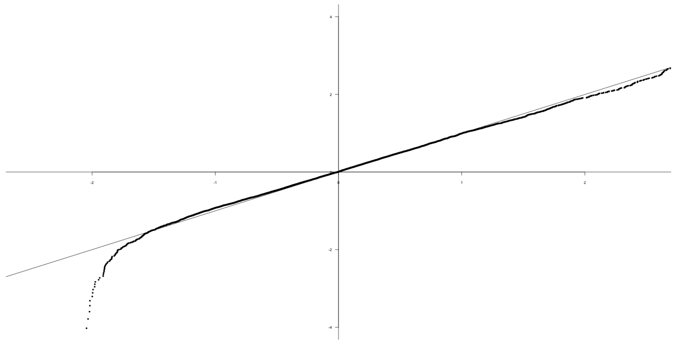

Рис. 3. График квантиль-квантиль для сравнения квантилей разложения Корниша–Фишера с эмпирическими квантилями нормированного случайного среднего $N_{10}(2)$ независимых с.в. с χ_1^2–распределением с параметрами $\lambda_3 = \sqrt{8}$ и $\lambda_4 = 12$.

§4. Разложения Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера для случая распределения Лапласа как предельного

Пусть $Y(s)$ – с.в. с дискретным распределением Парето с параметром $s > 0$ и вероятностями

$$\mathbf{P}(Y(s) = k) = \frac{s}{s+k-1} - \frac{s}{s+k}, \quad k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}, \quad s > 0, \quad (25)$$

которая является частным случаем более общей модели дискретного распределения Парето, полученного путем дискретизации в целых числах непрерывного распределения Парето (Ломакса), см. работу Буддана и Козубовского [16], где также приведены основные свойства и характеристики дискретного распределения Парето.

Пусть $s \geqslant 1$ – целые числа, $Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. с.в. с некоторой непрерывной ф.р. и

$$Y(s) = \min\{k \geqslant 1 : \max_{1 \leqslant j \leqslant s} Z_j < \max_{s+1 \leqslant j \leqslant s+k} Z_j\},$$

тогда функция вероятности $Y(s)$ описывается формулой (25). С.в. $Y(s)$ играют важную роль в задачах нахождения количества испытаний до наступления некоторого наблюдения, см. напр., работы Уилкса [17] и Бенинга и Королева [5].

Из определения с.в. (25) следует, что ф.р. может быть записана как

$$\mathbf{P}\big(Y(s) \leqslant k\big) = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}\big(Y(s) = m\big) = 1 - \frac{s}{s+k} = \frac{k}{s+k}, \quad k \in \mathbf{N}, \ s > 0. \tag{26}$$

Пусть $Y_1(s), Y_2(s), \ldots$, $s > 0$ – н.о.р. с.в. с ф.р. (26). Определим с.в.

$$N_n(s) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Y_j(s) \quad \text{с} \quad \mathbf{P}(N_n(s) \leqslant k) = \Big(\frac{k}{s+k}\Big)^n, \quad k \in \mathbf{N}, \ s > 0, \tag{27}$$

и используя $\mathbf{P}(N_n(s) = k) = \mathbf{P}(N_n(s) \leqslant k) - \mathbf{P}(N_n(s) \leqslant k-1)$, находим

$$\mathbf{P}(N_n(s) = k) = \Big(\frac{k}{s+k}\Big)^n - \Big(\frac{k-1}{s+k-1}\Big)^n, \ k \in \mathbf{N}, \ s > 0. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь случайное среднее $T_{N_n(s)}$, описанное в формуле (7), со случайным числом $N_n(s)$ наблюдений $X_1, X_2, \ldots$, где распределение с.в. $N_n(s)$ задано в (28). В работе [5] доказано, что для целых $s \geqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(N_n(s) \leqslant n\,x\right) = H(x) = e^{-s/x}\,\mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x), \tag{29}$$

и пределом $\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{n}(T_{N_n(s)} - \mu) \leqslant x\right)$ является ф.р. Лапласа $L_{1/\sqrt{s}}(x)$ с фунцией плотности

$$l_{1/\sqrt{s}}(x) = \frac{\sqrt{2\,s}}{2}\, e^{-\sqrt{2\,s}|x|}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{30}$$

В работах [3, 4] найдена скорость сходимости в (29), а также для целых $s \geqslant 1$ построено асимптотическое разложение первого порядка для $\mathbf{P}\big(\sigma^{-1}\sqrt{n}(T_{N_n}(s) - \mu) \leqslant x\big)$.

Теперь найдем разложение типа Чебышева–Эджворта для вероятности $\mathbf{P}\big(N_n(s)/n \leqslant x\big)$, удовлетворяющей (9).

Теорема 4. *Пусть дискретная с.в. $N_n = N_n(s)$ имеет распределение, задаваемое (28). Тогда для $x > 0$, фиксированного $s \geqslant s_0 > 0$ и всех $n \in \mathbf{N}$ существует вещественное число $C_2(s) > 0$, такое что*

$$\sup_{x>0}\Big|\mathbf{P}\Big(\frac{N_n(s)}{n} \leqslant x\Big) - e^{-s/x}\Big\{1 + \frac{s\,(s - 1 + 2Q_1(n\,x))}{2\,x^2\,n}\Big\}\Big| \leqslant \frac{C_2(s)}{n^2}, \tag{31}$$

где $Q_1(x)$ *определена в формуле* (21).

Замечание 7. Из (31) следует, что условие 2, см. (9), справедливо с $g_n = n$, $H(x) = e^{-s/x}$, $h_2(x) = e^{-s/x}\, s\,\bigl(s-1+2Q_1(n\,x)\bigr)\,/\,(2\,x^2)$ и $\beta = 2$.

На рис. 4 приведено приближение $\mathbf{P}\,(N_n(s) \leqslant n\,x)$ к $e^{-s/x}$ и $e^{-s/x} + h_2(x)/n$, $x > 0$.

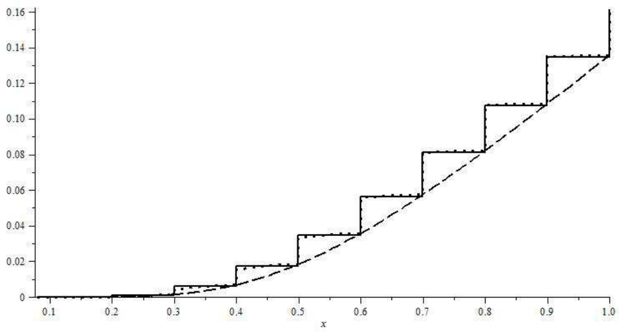

Рис. 4. Ф.р. $\mathbf{P}\,(N_n(s) \leqslant n\,x)$ (непрерывная линия), предельное распределение $e^{-s/x}$ (штриховая линия) и второе приближение $e^{-s/x} + h_2(x)/n$ (пунктирная линия) с $n = 10$ и $s = 2$.

Замечание 8. В работе Лямина [18] найдена оценка для приближения первого порядка при целых $s \geqslant 1$

$$\left|\mathbf{P}\Bigl(\frac{N_n(s)}{n} \leqslant x\Bigr) - e^{-s/x}\right| \leqslant \frac{C(s)}{n},$$

$$C(s) = \begin{cases} 8e^{-2}/3 = 0.360\ldots, & s = 1, n \geqslant 2 \\ 2e^{-2} = 0.270\ldots, & s \geqslant 2, n \geqslant 1 \end{cases}.$$

В случае $n = 1$ и $s = 1$ получаем $\mathbf{P}\,(N_1(1) \leqslant x) = 0$ для $0 < x < 1$ и

$$\sup_{0<x<1}\left|\mathbf{P}\,(N_1(1) \leqslant x) - e^{-1/x}\right| = \sup_{0<x<1} e^{-1/x} = e^{-1} = 0.367\ldots.$$

Замечание 9. С.в. $N_n(s)$ – это дискретная с.в. с целыми значениями $k \geqslant 1$. Таким образом, ф.р. $\mathbf{P}\,(N_n(s) \leqslant n\,x)$ разрывна с точками разрыва $x = k/n$, $k = 1, 2, \ldots$, в то время как предельное распределение $H(x) = e^{-s/x}\,\mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x)$ непрерывно. В интервале $(x, x + 1/n]$ с

$x > 0$ ф.р. $\mathbf{P}\,(N_n(s) \leqslant n\,x)$ имеет скачки в точках $([nx]+1)/n$. Скачок предельного распределения $H(x)$ на интервале $(x, x+1/n]$

$$H(x+1/n) - H(x) = e^{-s/(x+1/n)} - e^{-s/x} = s\,e^{-s/x}/(n\,x^2) + \mathcal{O}(n^{-2}),\qquad n \to \infty,$$

эквивалентен скачку разрывной корректирующей функции (31) в точке $([nx]+1)/n$.

Замечание 10. Непрерывная функция $e^{-s/x}\mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x)$, $s > 0$, – это ф.р. обратной с.в. $W(s) = 1/V(s)$, где с.в. $V(s)$ распределена экспоненциально с параметром $s > 0$.

В теоремах 2 и 3 используется нормирующая последовательность $g_n = \mathbf{E}\big(N_n(r)\big)$, если случайный размер выборки имеет отрицательное биномиальное распределение, см. (15). В теореме 4 и в следующей теореме 5 используется нормирующая последовательность $g_n = n$, поскольку и $\mathbf{P}\big(N_n(s) \leqslant n\,x\big)$, и $e^{-s/x}\,\mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x)$ для фиксированных $s > 0$ имеют тяжелые хвосты с параметром равным 1.

Лемма 2. *Для случайного размера выборки $N_n(s)$ с вероятностями, определенными в* (28), *и с.в. $W(s)$ с ф.р. $e^{-s/x}\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x)$, при $s > 0$ и $1 \leqslant r < 2$ имеем*

i) $\mathbf{E}\big(N_n(s)\big) = \infty$ *и* $\mathbf{E}\big(W(s)\big) = \infty$,

ii) *первый абсолютный псевдо-момент*

$$\nu_1 = \int_0^\infty x\,\big|d\big(\mathbf{P}\big(N_n(s) \leqslant n\,x\big) - e^{-s/x}\big)\big| = \infty,$$

iii) *абсолютный разностный момент*

$$\chi_r = \int_0^\infty x^{r-1}\,\big|\mathbf{P}\big(N_n(s) \leqslant n\,x\big) - e^{-s/x}\big|\,dx < \infty.$$

О псевдо–моментах и их свойствах см. книгу Кристофа и Вольфа [19, гл. 2].

К разложению $N_n(s)$ дополнительно требуется оценка момента $\mathbf{E}(N_n(s))^{-3/2}$, где степень $-3/2$ соответствует показателю степени у m: $m^{-3/2}$ – скорость сходимости разложения Чебышева–Эджворта для T_m в (8).

Лемма 3. *Для всех $n \geqslant 1$ и для случайного $N_n(s)$ с вероятностями, определенными в (28) с вещественными $s \geqslant s_0 > 0$, где $s_0 > 0$ произвольно мало, справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\big(N_n(s)\big)^{-3/2} \leqslant \left\{\begin{matrix} \zeta(3/2) = 2.612\ldots, & n = 1 \\ \dfrac{sn}{\Gamma(5/2)(n-3/2)^{5/2}}, & n \geqslant 2 \end{matrix}\right\} \leqslant C(s)\, n^{-3/2}.$$

Теперь получим разложение Чебышева–Эджворта для нормированного случайного среднего $T_{N_n(s)}$.

Теорема 5. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. с.в., и X удовлетворяет (2) и условию Крамера (3). Пусть также распределение дискретной с.в. $N_n = N_n(s)$ с параметром $s \geqslant s_0 > 0$ задано формулой (28), и N_n независима от $X_1, X_2, \ldots$. Пусть $T_{N_n} = N_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_{N_n})$. Предположим, что для статистики T_m справедливо асимптотическое разложение (5) и для случайного объема $N_n(s)$ с $s \geqslant s_0 > 0$ справедливо асимптотическое разложение (31). Тогда для всех $n \in \mathbf{N}$ существует константа $C(s) > 0$, такая что*

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{n}(T_{N_n(s)} - \mu) \leqslant x\right) - L_{1/\sqrt{s};n}(x)\right| \leqslant C(s) n^{-3/2},$$

где

$$L_{1/\sqrt{s};n}(x) = L_{1/\sqrt{s}}(x) + n^{-1/2} A_1(x)\, l_{1/\sqrt{s}}(x) + n^{-1}\Big(A_{2,1}(x) + A_{2,2}(x)\Big) l_{1/\sqrt{s}}(x),$$

$$A_1(x) = \frac{\lambda_3}{6}\left(-x^2 + \frac{|x|}{\sqrt{2s}} + \frac{1}{2s}\right), \quad A_{2,2}(x) = \frac{x(1-s)}{8s}\,(\sqrt{2\,s}\,|x| + 1)$$

и

$$A_{2,1}(x) = \frac{x\,\lambda_4}{48\,s}\Big(3 - 2sx^2 + 3\sqrt{2s}|x|\Big) + \frac{x\,\lambda_3^2}{144\,s}\Big(20sx^2 - (2s)^{3/2}|x|^3 - 15\sqrt{2s}|x| - 15\Big).$$

Замечание 11. Пусть $\mathbf{E}\,|X|^{3+2\delta} < \infty$ для некоторого $0 < \delta < 1/2$. В работе [3] доказано, что при $n \to \infty$

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\Big(\sigma^{-1}\sqrt{n}(T_{N_n(s)} - \mu) < x\Big) - L_{1/\sqrt{s}}(x) - \frac{\lambda_3 l_s^*(x)}{6\sqrt{n}}\right| = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{1/2+\delta}}\Big),$$

где

$$l_s^*(x) = \int\limits_0^\infty \varphi(x\sqrt{y})\frac{1-x^2y}{\sqrt{y}}de^{-s/y} = l_{1/\sqrt{s}}(x)\Big(\frac{|x|}{\sqrt{2s}} + \frac{1}{2s} - x^2\Big).$$

Последний интеграл был вычислен в работе [15], где также было построено разложение Корниша–Фишера первого порядка (с некоторыми вычислительными неточностями).

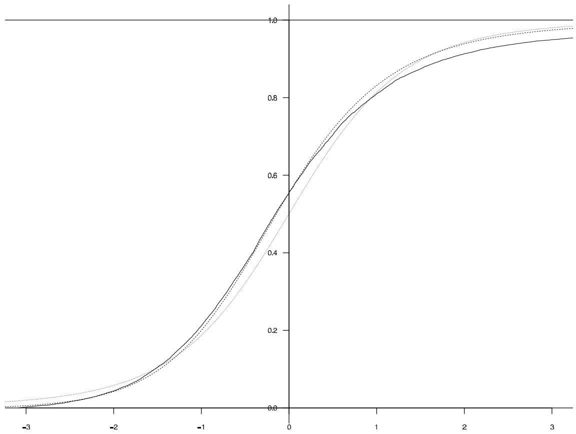

Рис. 5. Эмпирическая ф.р. $\mathbf{P}\left(\sigma^{-1}\sqrt{n}(T_{N_n(s)} - \mu) \leqslant x\right)$ (непрерывная линия), ф.р. Лапласа $L_{1/\sqrt{2}}(x)$ (пунктирная линия) и приближение второго порядка $L_{1/\sqrt{2};n}(x)$ (штриховая линия) для нормированного случайного среднего $N_n(s)$ независимых с.в. с χ^2_1-распределением с параметрами $\lambda_3 = \sqrt{8}$ и $\lambda_4 = 12$ для $n = 10$ и $s = 2$.

Используя разложение Чебышева–Эджворта второго порядка из теоремы 4 и утверждение 2, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть* $x = x_\alpha$ – α*–квантиль нормированной статистики* $\sigma^{-1}\sqrt{n}\,\big(T_{N_n(s)} - \mu\big)$ *и* $u = u_\alpha$ – α*–квантиль предельного распределения Лапласа* $L_{1/\sqrt{s}}(x)$*. Тогда для* u*, не равных* 0*, справедливо следующее асимптотическое разложение*

$$x = u - \frac{\lambda_3}{6\sqrt{n}}\left(\frac{|u|}{\sqrt{2s}} + \frac{1}{2s} - u^2\right) + \frac{1}{n}\,B_2(u) + \mathcal{O}\Big(n^{-3/2}\Big) \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где

$$\begin{aligned} B_2(u) = &-\frac{\lambda_3^2}{36}\Big(\frac{\sqrt{2\,s}\,u}{2|u|}\Big(u^2 - \frac{|u|}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2s}\Big)^2 \\ &+ \Big(u^2 - \frac{|u|}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2s}\Big)\Big(2u - \frac{u}{\sqrt{2\,s}\,|u|}\Big)\Big) \\ &+ \frac{u\,\lambda_3^2}{144\,s}\Big(20\,su^2 - (2\,s)^{3/2}|u|^3 - 15\sqrt{2\,s}\,|u| - 15\Big) \\ &+ \frac{u\,\lambda_4}{48\,s}\Big(3 - 2su^2 + 3\sqrt{2\,s}\,|u|\Big) + \frac{u(1-s)}{8s}\,(\sqrt{2\,s}\,|u| + 1). \end{aligned}$$

На рис. 6 приведен график квантиль-квантиль, сравнивающий эмпирические квантили сгенерированного нормированного случайного среднего по горизонтальной оси и квантили, основанные на разложении Корниша–Фишера, по вертикальной оси.

§5. Доказательства

Доказательство утверждения 1. Используя условие 1 для статистики $T_m(X_1, \ldots, X_m)$ и условие 2 для случайного размера выборки N_n, Бенинг, Галиева и Королев [3, теорема 3.1] получили в терминах утверждения 1 следующее разложение типа Чебышева–Эджворта для статистики $T_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ для всех $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \sup_x \big|\mathbf{P}\big(\sigma^{-1}\sqrt{g_n}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x\big) - G_{2,n}(x, 1/g_n)\big| \\ \leqslant C_1\mathbf{E}(N_n^{-a}) + (C_3^* + C_2 M_n)\,n^{-b}, \end{aligned}$$

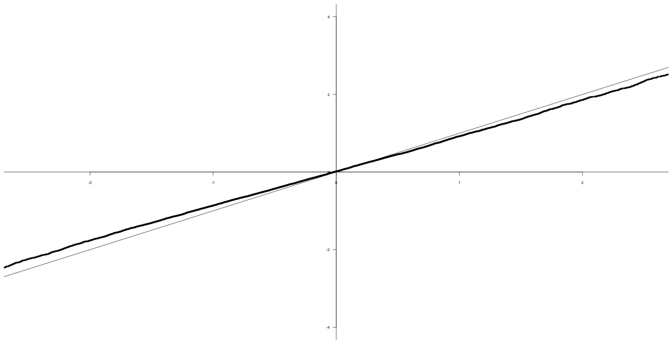

Рис. 6. График квантиль-квантиль для сравнения квантилей разложения Корниша–Фишера с эмпирическими квантилями нормированного случайного среднего $N_{10}(2)$ независимых с.в. с χ^2_1-распределением с параметрами $\lambda_3 = \sqrt{8}$ и $\lambda_4 = 12$.

где $C_3^* > 0$ – константа, не зависящая от n, $0 < g_n \uparrow \infty$,

$$G_{2;n}(x, 1/g_n) = \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \Phi(x\sqrt{y})\, dH(y) + \frac{1}{\sqrt{g_n}} \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \frac{f_1(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\, dH(y)$$

$$+ \frac{1}{g_n} \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \frac{f_2(x\sqrt{y})}{y}\, dH(y) + \frac{1}{n} \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \Phi(x\sqrt{y})\, dh_2(y),$$

$$M_n = \sup_x M_n(x) := \sup_x \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \Big| \frac{\partial}{\partial y} \Big(\Phi(x\sqrt{y}) + \frac{f_1(x\sqrt{y})}{\sqrt{y\, g_n}} + \frac{f_2(x\sqrt{y})}{y\, g_n} \Big) \Big| \, dy,$$

$f_1(x) = -\frac{\lambda_3}{6} H_2(x)\, \varphi(x)$ и $f_2(x) = -\Big(\frac{\lambda_4}{24} H_3(x) + \frac{\lambda_3^2}{72} H_5(x)\Big)\, \varphi(x)$, где $H_m(x)$ – полиномы Чебышева–Эрмита, определенные в (6) .

Для доказательства утверждения 1 необходимо оценить $|G_{2;n}(x) - G_{2;n}(x, 1/g_n)|$, где $G_{2;n}(x)$ определена в (11), и M_n. Положим

$V_m(z) = H_m(z)\, \varphi(z)$, где $H_m(z)$– полиномы Эрмита для $m = 2, 3, 5$.

Поскольку $V_m'(z_m) = 0,\ m = 2,3$, где $z_2 = 0, \pm\sqrt{2}$ и $z_3 = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$, то $|V_2(z)| \leqslant |V_2(0)| = 1/\sqrt{2\pi} \leqslant 0.399$, $|V_3(z)| \leqslant |V_3(\pm\sqrt{3-\sqrt{6}})| \leqslant 0.551$. Вычисляем оценку $|V_5(z)| \leqslant |V_5(0.380\ldots)| \leqslant 2.308$. Вместе с $\Phi(z) \leqslant 1$ и (10) получаем

$$|G_{2;n}(x) - G_{2;n}(x; 1/g_n)| \leqslant C_0(2 + 0.067\,|\lambda_3| + 0.023\,\lambda_4 + 0.033\,\lambda_3^2)g_n^{-\gamma}.$$

Поскольку

$$M_n = \sup_x |M_n(x)| = \max\{\sup_{x>0} |M_n(x)|,\ \sup_{x<0} |M_n(x)|,\ |M_n(0)|\},$$

для оценки M_n рассмотрим 3 случая.

Начнем со случая $x > 0$. Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi(x\sqrt{y}) = \dfrac{x\,\varphi(x\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \geqslant 0$, получаем, что

$$\int\limits_{1/g_n}^{\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x\sqrt{y})\Big|dy = \int\limits_{1/g_n}^{\infty} \frac{x\,\varphi(x\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}dy = \Phi(\infty) - \Phi(x/\sqrt{g_n}) \leqslant 1/2.$$

Теперь рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{V_2(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{Q_2(x\sqrt{y})}{y^{3/2}}, \quad \text{где} \quad Q_2(z) = \frac{1}{2}\,(1 + 2z^2 - z^4)\,\varphi(z)$$

и $|Q_2(z)| \leqslant Q_2(\sqrt{3-\sqrt{6}}) \leqslant 0.273$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{V_3(x\sqrt{y})}{y} = \frac{Q_3(x\sqrt{y})}{y^2}, \quad \text{где} \quad Q_3(z) = \frac{z}{2}\,(3 + 4z^2 - z^4)\,\varphi(z)$$

и вычисляем оценку $|Q_3(z)| \leqslant Q_3(1.210\ldots) \leqslant 0.780$. Далее

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{V_5(x\sqrt{y})}{y} = \frac{Q_5(x\sqrt{y})}{y^2}, \quad \text{где} \quad Q_5(z) = \frac{z}{2}\,(-15 - 25z^2 + 13z^4 - z^6)\,\varphi(z)$$

и $|Q_5(z)| \leqslant |Q_5(1.061\ldots)| \leqslant 3.395$. В итоге получаем для $x > 0$

$$\begin{aligned} M_n(x) &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{2\,|\lambda_3|\,Q_2(\sqrt{3-\sqrt{6}})}{6} + \frac{\lambda_4\,Q_3(1.210\ldots)}{24} + \frac{\lambda_3^2\,Q_5(1.061\ldots)}{72} \\ &\leqslant 0.5 + 0.091\,|\lambda_3| + 0.033\,\lambda_4 + 0.032\,\lambda_3^2\,. \end{aligned}$$

Для случая $x < 0$ верхняя оценка получается аналогично случаю $x > 0$. В итоге получаем $M_n(0) = |\lambda_3|/(6\sqrt{2\pi}) \leqslant 0.067\,|\lambda_3|$. Утверждение 1 доказано. □

Приведем в качестве леммы неравенства, которые будут использованы в дальнейших доказательствах.

Лемма 4.

$$0 \leqslant g_1(t) := \ln(1+t) - t + t^2/2 \leqslant t^3/3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{32}$$

$$0 \leqslant (1+t)^{-a} - 1 + at \leqslant a(a+1)t^2/2, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ \ a > 0, \tag{33}$$

$$0 \leqslant (1+t)^r - 1 - rt \leqslant (1/2)r(r-1)t^2 2^{|r-2|}, \ -1/2 < t \leqslant 1, \ r > 1, \tag{34}$$

$$0 \leqslant g_2(t) = (1-t)^{-1} - 1 - t \leqslant 3t^2/2\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3\,, \tag{35}$$

$$0 \leqslant g_3(t) = (1-t)^{-2} - 1 \leqslant 15t/4\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3\,, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\text{i)} \qquad |e^{-t} - 1| \leqslant t, \ \ t > 0, \\ &\text{ii)} \qquad 0 \leqslant e^t - 1 - t \leqslant t^2 e^{\max\{0,t\}}/2\,, \forall t, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\{t^k e^{-at}\,, t^{-k} e^{-a/t}\} \leqslant (k/a)^k e^{-k}\,, \quad t > 0 \ \ \textit{с фикс.} \ \ a > 0, k > 0\,. \tag{38}$$

Доказательство леммы 4. Неравенства (32), (33), (34) и (37) получаются из разложения Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Сходимость геометрического ряда дает (35). Неравенство (36) следует из $(1-t)^{-2} - 1 = 2t(1-t/2)(1-t)^{-2}$, и поскольку $(1-t/2)(1-t)^{-2}$ монотонно возрастает на указанном интервале. Неравенство (38) справедливо, потому что обе функции $t^k e^{-at}$ и $t^{-k} e^{-a/t}$ достигают максимума в точках $t = k/a$ и $t = a/k$ соответственно. □

Доказательство теоремы 1. Необходимо рассмотреть только случай $n \geqslant 2$, см. замечание 4. Напомним, что $g_n = \mathbf{E}\, N_n(r) = r(n-1)+1$. Если $\ g_n x = (r(n-1)+1)x < r+1, \ $ то $\ 0 \leqslant x < 2/(n-1) \leqslant 4/n$,

$$\mathbf{P}\big(N_n(r) \leqslant (r(n-1)+1)x\big) \leqslant n^{-r} \sum_{k=1}^{[r]+1} \frac{\Gamma(k+r-1)}{\Gamma(r)\,(k-1)!} \leqslant c_1^*(r)\, n^{-r},$$

$$G_{r,r}(x) \leqslant (r^{r-1}/\Gamma(r))\, x^r \leqslant c_2^*\, n^{-r}, \quad g_{r,r}(x) \leqslant r^r/\Gamma(r))x^{r-1} \leqslant c_3^*\, n^{-r+1}$$

и (18) выполняется с $C_2(r) = c_1^*(r) + c_2^*(r) + c_3^*(r)$. Нужно рассмотреть (15) только для $k \geqslant [r]+1 > r$.

Пусть $r > 1$, $n \geqslant 2$ и $g_n x = (r(n-1)+1)x \geqslant r+1$, тогда

$$x \geqslant \frac{r+1}{g_n} \geqslant \frac{r+1}{r(n-1)+1} \geqslant \frac{r}{r(n-1)} \geqslant \frac{1}{n}\,. \tag{39}$$

Определим $\tau = g_n\, x - [g_n\, x] \in [0\,,\, 1)$ и введем обозначения

$$m_{n,x} = g_n x + r - \tau, \ \ n_r = r(n-1), \quad x_r = x + r - \tau \ \ \text{и} \quad q = 1/(n-1). \tag{40}$$

Ф.р. дискретной с.в. $N_n(r)$ ((15)) имеет скачки в точках $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Следовательно

$$\mathbf{P}\big(N_n(r) \leqslant g_n\, x\big) = \mathbf{P}\big(N_n(r) \leqslant [g_n\, x]\big) = \mathbf{P}\big(N_n(r) \leqslant g_n\, x - \tau\big)\,,$$

и нужно вычислить (15) для k, где $[r] + 1 \leqslant k = [g_n\, x] = g_n\, x - \tau$.

Сначала рассмотрим представление второго интеграла в (16) в виде неполной бета-функции $B_{1/n}(r, k)$ в точках $k = g_n\, x - \tau$:

$$B_{1/n}(r, k) = \int\limits_0^{1/(n-1)} t^{r-1}(1+t)^{-g_n x - r + \tau} dt = \int\limits_0^{q} t^{r-1}(1+t)^{-m_{n,x}} dt. \quad (41)$$

Поскольку $n \geqslant 2$, $t \leqslant 1/(n-1)$, $n_r\, t \leqslant r$, $t - t^2/2 \geqslant t/2$ для $0 \leqslant t < 1$ и $x_r > 0$, найдем оценку для второго сомножителя в правой части равенства (41)

$$\begin{aligned}(1+t)^{-m_{n,x}} &= e^{-m_{n,x}\,\ln(1+t)} \overset{(32)}{=} e^{-m_{n,x}(t - t^2/2)} - r_1 \\ &= e^{-m_{n,x} t}\big(1 + n_r x t^2/2\big) + e^{-m_{n,x} t} x_r t^2/2 + r_2 - r_1 \\ &= e^{-(n_r x + x_r)t}\big(1 + n_r x t^2/2\big) + r_3 \\ &= e^{-n_r x t}\big(1 - x_r t + n_r t^2/2\big) + r_4,\end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= e^{-m_{n,x}(t-t^2/2)}\big(1 - e^{-m_{n,x} g_1(t)}\big) \\ &\qquad \overset{(37i),(32)}{\leqslant} \frac{m_{n,x} t^3}{3} e^{-m_{n,x} t/2} \overset{(38)}{\leqslant} \frac{4t^2}{3e} e^{-m_{n,x} t/4}, \\ r_2 &= \big(e^{m_{n,x} t^2/2} - 1 - m_{n,x} t^2/2\big) \\ &\qquad \overset{(37ii)}{\leqslant} m_{n,x}^2 t^4 e^{-m_{n,x} x t/2}/8 \overset{(38)}{\leqslant} 8e^{-2} t^2 e^{-m_{n,x} t/4}, \\ r_3 &= e^{-m_{n,x} t} x_r t^2/2 + r_2 - r_1 \quad \text{и} \quad |r_3| \leqslant \big(4/(3e) + 8e^{-2} + x_r\big) t^2 e^{-m_{n,x} t/4}. \end{aligned}$$

Используем $(37ii)$

$$\begin{aligned} r_4(t) &= r_3 + e^{-n_r x t}\big(x_r n_r x t^3/2 + (e^{-x_r t} - 1 + x_r t)(1 + n_r x t^2/2)\big) \\ &\overset{(38)}{\leqslant} |r_3| + \big(x_r^2 + x_r\big) t^2 e^{-n_r x t/2} \leqslant \big(c_1(r) + c_2(r) x^2\big) t^2 e^{-n_r x t/4}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $c_1(r), c_2(r) > 0$ – константы, не зависящие от n, x, t.

Из (41) и (42) следует, что с $k = g_n\, x - \tau$ и $q = 1/(n-1)$

$$B_{1/n}(r,k) = \int_0^q \frac{1 - x_r t + n_r x t^2/2}{t^{1-r}\, e^{n_r x t}}\,dt + \int_0^q t^{r-1} r_4(t)\,dt =: J_1(x) + R_1(n). \quad (44)$$

Из замены переменной $s = (n-1)xt$ следует, что $0 \leqslant s \leqslant x$, и для $j = 0,1,2$

$$\begin{aligned} I_j(x;r) &:= \int_0^{1/(n-1)} t^{r+j-1} e^{-n_r x t}\,dt = \frac{r^{r+j}}{(n_r\, x)^{r+j}} \int_0^x s^{r+j-1} e^{-rs}\,ds \\ &= \frac{\Gamma(r+j)}{(n_r\, x)^{r+j}} G_{r+j,r}(x), \end{aligned} \quad (45)$$

где $G_{\alpha,\beta}(x)$ – ф.р. гамма-распределения с плотностью (17). Получаем

$$J_1(x) = \frac{\Gamma(r)}{(n_r x)^r}\Big(G_{r,r}(x) - \frac{r\, x_r}{n_r x} G_{r+1,r}(x) + \frac{r(r+1)}{2n_r\, x} G_{r+2,r}(x)\Big). \quad (46)$$

Для вычисления $R_1(x)$ используем (43) и (45):

$$\begin{aligned} R_1(n) &= \int_0^{1/(n-1)} t^{r-1} r_4(t)\,dt \leqslant (c_1(r) + c_2(r)\, x^2) \int_0^{1/(n-1)} t^{r+1} e^{-n_r x t/4}\,dt \\ &\leqslant c_1(r)(n-1)^{-2} I_0(x/4;r) + c_2(r)\, x^2 I_2(x/4;r) \\ &\leqslant \frac{c_1(r)\,\Gamma(r)\, G_{r,r}(x/4)}{(n-1)^2\,(n_r x/4)^r} + \frac{c_2(r)\,\Gamma(r+2)\, G_{r+2,r}(x/4)}{(n_r/4)^2\,(n_r x/4)^r} \\ &\leqslant \frac{\Gamma(r)\, R_2(n)}{(n_r x)^r}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$R_2(n) \leqslant c_3(r)\, n^{-2}\big(G_{r,r}(x/4) + G_{r+2,r}(x/4)\big) \leqslant 2\, c_3(r) n^{-2}, \quad (48)$$

а $c_3(r)$ и остальные константы от $c_4(r)$ до $c_{14}(r)$ – положительные константы, не зависящие от n и x.

На следующем шаге оценим бета-функцию $B(r,k)$ из (15). В работе Немеса [20, теорема 1.3] доказано, что для $z > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \sqrt{2\,\pi} z^{z-1/2} e^{-z}\Big(1 + \frac{1}{12z} + R_3(z)\Big) \\ \frac{1}{\Gamma(z)} &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} z^{-z+1/2} e^{z}\Big(1 - \frac{1}{12z} + R_4(z)\Big) \end{aligned} \quad \text{с} \quad |R_3(z)|, |R_4(z)| \leqslant \frac{c}{z^2},$$

где $c = (\sqrt{2}+1)(1+\pi^2/6)/(16\pi^3)$. Следовательно, для $k = [g_n\,x] = g_n\,x - \tau$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(r,k)} &= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\,\Gamma(k)} = \frac{(r+k)^{r+k-1/2}\,e^{-(r+k)}}{\Gamma(r)\,k^{k-1/2}\,e^{-k}}\big(1+R_5(k)\big) \\ &= \frac{e^{-r}k^r}{\Gamma(r)}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k+r-1/2}\big(1+R_5(k)\big), \end{aligned} \tag{49}$$

где $\big(1+R_5(k)\big) = \left(1+\frac{1}{12\,(r+k)}+R_3(r+k)\right)\left(1-\frac{1}{12k}+R_4(k)\right)$. Поскольку

$$\left(1+\frac{1}{12\,(r+k)}\right)\left(1-\frac{1}{12k}\right) = 1-\frac{12r+1}{144\,k\,(k+r)}$$

получаем, что

$$R_5(k) \leqslant \frac{c_4(r)}{k^2}.$$

Напомним, что $r \leqslant k = [g_n\,x] = g_n\,x - \tau$, случай $r > k$ был доказан в начале. Для $(1+r/k) = \exp\{\ln(1+r/k)\}$ получаем

$$\begin{aligned} \big(1+r/k\big)^{k+r-1/2} &\overset{(32)}{=} \exp\big\{(k+r-1/2)\,\big(r/k-r^2/(2k^2)\big)\big\} + R_6(k) \\ &= e^r\left(1+\frac{r^2-r}{2k}+R_7(k)\right)+R_6(k) \\ &= e^r\left(1+\frac{r^2-r}{2k}\right)+R_8(k)\,, \end{aligned} \tag{50}$$

где использовано, что $(k+r-1/2)g_1(r/k) \overset{(32)}{\leqslant} (1/3)(k+r-1/2)\,r^3k^{-3} \leqslant c_5(r)\,k^{-2}$,

$$\begin{aligned} R_6(k) &= e^r\,e^{(r^2-r)/(2k)}\,e^{-(r-1/2)\,r^2/(2k^2)}\left(e^{(k+r-1/2)g_1(r/k)}-1\right) \\ &\leqslant e^r\,e^{(r^2-r)/(2k)}c_5(r)\,k^{-2}e^{c_5(r)/k^2} \leqslant c_6(r)k^{-2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_7(k)| &= e^{(r^2-r)/(2k)}\left|e^{-(r-1/2)r^2/(2k^2)}-1\right|+e^{(r^2-r)/(2k)}-1-(r^2-r)/(2k) \\ &\overset{(37)}{\leqslant} e^{(r^2-r)/2}\big((r-1/2)\,r^2/(2k^2)+(r^2-r)^2/(8k^2)\big) \leqslant c_7(r)\,k^{-2} \end{aligned}$$

и

$$R_8(k) = R_6(k)+e^r|R_7(k)| \leqslant c_8(r)\,k^{-2}\,.$$

Из (49) и (50) следует что

$$\frac{\Gamma(r)}{(n_r x)^r B(r,k)} = \frac{k^r}{(n_r x)^r}\Big(1 + \frac{r^2 - r}{2k} + R_9(k)\Big), \tag{51}$$

где

$$R_9(k) = e^{-r} R_8(k) + R_5(k)\Big(1 + (r^2 - r)/(2k) + R_8(k)\Big) \leqslant c_9(r) k^{-2}\,.$$

В виду того, что $\tau \leqslant 1 \leqslant k = [g_n x] = [(n_r + 1)x] = (n_r + 1)x - \tau$, получаем

$$1 + \frac{x - \tau}{n_r x} = \frac{k}{n_r x} = \frac{[(n_r + 1)x]}{n_r x} \begin{cases} \leqslant & \dfrac{(n_r + 1)x}{n_r x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{r(n-1)} < 2 \\ \geqslant & \dfrac{[n_r + 1)x]}{(n_r + 1)x} \geqslant \dfrac{k}{k + \tau} > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, $z = \frac{x - \tau}{n_r x} \in \Big(-\frac{1}{2}, 1\Big)$ и, используя $\Big|\frac{1}{1+z} - 1\Big| = \frac{|z|}{1+z} \leqslant 2|z|$, получаем

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n_r x}\Big(1 + \frac{x - \tau}{n_r x}\Big)^{-1} = \frac{1}{n_r x} + R_{10}(n,x), \quad \text{где} \quad |R_{10}(n,x)| \leqslant \frac{2x + 2}{(n_r x)^2}.$$

Используя $n_r = r(n-1) \geqslant r$ для $n \geqslant 2$ и $x \geqslant 1/(n_r + 1)$, находим

$$\text{i) } \Big|\frac{1}{k} - \frac{1}{n_r x}\Big| \leqslant \frac{2 + 2x}{(n_r x)^2}\,, \quad \text{ii) } \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{4}{(n_r x)^2} \quad \text{и} \quad \text{iii) } \frac{1}{n_r x} \leqslant 1 + \frac{1}{r}\,. \tag{52}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \Big(\frac{k}{n_r x}\Big)^r = \Big(\frac{n_r x + x - \tau}{n_r x}\Big)^r &= \Big(1 + \frac{x - \tau}{n_r x}\Big)^r \\ &= 1 + \frac{r(x - \tau)}{n_r x} + R_{11}(n,x), \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$\begin{aligned} |R_{11}(n,x)| = \Big|\Big(1 + \frac{x - \tau}{n_r x}\Big)^r - 1 - \frac{r(x - \tau)}{n_r x}\Big| &\overset{(34)}{\leqslant} \frac{r(r-1)}{2}\Big(\frac{x - \tau}{n_r x}\Big)^2 2^{|r-2|} \\ &\leqslant (c_{10}(r) + x^2 c_{11}(r))(n_r x)^{-2}. \end{aligned}$$

Объединяя (51), (53) и (52), получаем

$$\frac{\Gamma(r)}{(n_r x)^r B(r,k)} = 1 + \frac{r(x - \tau)}{n_r x} + \frac{r^2 - r}{2 n_r x} + R_{12}(n,x), \tag{54}$$

где

$$
\begin{aligned}
|R_{12}(n,x)| \leqslant \frac{r|x-\tau|(r^2-r)}{2k\,n_r x} + |R_{11}(n,x)|\Big(1+\frac{r^2-r}{2k}+R_9(k)\Big) \\
+\Big(1+\frac{r|x-\tau|}{n_r x}\Big)R_9(k) \leqslant \frac{c_{12}(r)+x^2c_{13}(r)}{(n_r x)^2}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Объединяя (15), (44), (46), (47), (48) и (54), находим

$$
\begin{aligned}
\frac{B_{1/n}(r,k)}{B(r\,,\,k)} &= \Big(G_{r,r}(x) - \frac{rx_r}{n_r x}G_{r+1,r}(x) + \frac{r(r+1)}{2n_r x}G_{r+2,r}(x) + R_2(n)\Big) \\
&\quad\times\Big(1+\frac{r(x-\tau)}{n_r x} + \frac{r^2-r}{2n_r x} + R_{12}(n,x)\Big) \\
&= G_{r,r}(x) + \frac{a_0G_{r,r}(x)+a_1G_{r+1,r}(x)+a_2G_{r+2,r}(x)}{2(n-1)x} + R_{13}(n,x),
\end{aligned}
$$

где $a_0 = 2(x-\tau)+r-1$, $a_1 = -2(x+r-\tau)$, $a_2 = r+1$ и

$$
\begin{aligned}
R_{13}(n,x) = G_{r,r}(x)\,R_{12}(n,x) + R_2(n)\Big(1+\frac{a_0}{2(n-1)x}+R_{12}(n,x)\Big) \\
+\Big(\frac{a_1G_{r+1,r}(x)+a_2G_{r+2,r}(x)}{(n-1)x}\Big)\Big(\frac{a_0}{2(n-1)x}+R_{12}(n,x)\Big).
\end{aligned}
$$

Чтобы получить равномерную по $x>0$ оценку для $R_{13}(n,x)$, используем неравенства

$$
\begin{aligned}
G_{r+j,r}(x) &\leqslant 1 \quad \text{для} \quad j=0,1,2, \\
G_{r,r}(x) &\leqslant r^r\,x^r/\Gamma(r+1) \quad \text{для} \quad 1<r\leqslant 2, \\
G_{r+j,r}(x) &= \frac{(r+j)^{r+j}}{\Gamma(r+j)}\int_0^x y\,y^{r+j-2}e^{-ry}\,dy \\
&\leqslant \frac{(r+j)^{r+j}}{\Gamma(r+j)}\Big(\frac{r+j-2}{e\,r}\Big)^{r+j-2}\frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

для $j=0$, $r>2$ и $j=1,2$, $r>1$, а также $x^{-1}G_{r+2,r}(x)\leqslant G_{r+1,r}(x)\leqslant 1$. Объединяя (47), (48), (55),

$$
|a_0a_1| \leqslant 12x^2+12r^2, \quad |a_0a_2| \leqslant 2(r+1)x+(r+1)^2
$$

и $(n-1)x\geqslant 1$ (см. (39)), находим $|R_{13}(n,x)|\leqslant c_{14}n^{-\min\{r,2\}}$. Теорема 1 доказана для $C_2(r)=c_{14}(r)$. □

Доказательство леммы 1. Если $n = 1$, то $\mathbf{P}(N_1(r) = 1) = 1$ и (23) выполняется с $C(r) = 1$. Пусть $n \geqslant 2$. Из определения $N_n(r)$ в (14) для $r > 1$ имеем

$$\mathbf{E}(N_n(r))^{-3/2} = \frac{1}{n^r}\Big(\sum_{k=1}^{[r]} + \sum_{k=[r]+1}^{\infty}\Big)\frac{\Gamma(k+r-1)}{k^{3/2}\,\Gamma(r)\Gamma(k)}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{k-1} =: \sum_1 + \sum_2,$$

где, очевидно, $\sum_1 \leqslant c_1(r)n^{-r}$. Для оценки $\sum_2$ используем бета-функцию $B(r\,,\,k)$ с $k > r > 1$ и равенства (49) и (50) с соответствующими оценками из доказательства теоремы 1, откуда получаем

$$\begin{gathered}\frac{\Gamma(k+r-1)}{\Gamma(r)\Gamma(k)} = \frac{1}{(k+r-1)\,B(r\,,\,k)} = \frac{k^{r-1}}{\Gamma(r)}\big(1 + R_1(k)\big),\\ |R_1(k)| \leqslant \frac{c_2(r)}{k}.\end{gathered} \tag{56}$$

Для $r > 1$ и $x \geqslant k \geqslant 2$, используя $(1-1/n)^x \leqslant e^{-x/n}$, находим

$$\frac{k^{r-1}(1-1/n)^{k-1}}{k^{3/2}} \leqslant \int\limits_k^{k+1} \frac{x^{r-1}\,(1-1/n)^{x-2}}{(x-1)^{3/2}}dx \leqslant 8\sqrt{2}\int\limits_k^{k+1} x^{r-5/2}\,e^{-x/n}dx.$$

Следовательно, используя $c_3 = 8\sqrt{2}(1+c_2)/\Gamma(r)$, получаем

$$\sum_2 \leqslant c_3(r)n^{-r}J_r(n), \quad \text{где} \quad J_r(n) = \int\limits_1^{\infty} x^{r-5/2}\,e^{-x/n}dx.$$

Поскольку $J_r(n) \leqslant (3/2-r)^{-1}$ для $1<r<3/2$, $J_r(n) \leqslant n^{r-3/2}\,\Gamma(r-3/2)$ для $r > 3/2$ и $J_{3/2}(n) \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}dx + \frac{1}{n}\int_n^{\infty} e^{-x/n}dx \leqslant \ln n + e^{-1}$ оценка (23) доказана.

Пусть теперь $r = 3/2$. Учитывая (56),

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1}|R_1(k)| \leqslant c_2(3/2)\pi^2/6 < \infty,$$

$$\sum_{(n)} := \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \geqslant \ln n - 1$$

и

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1-(1-1/n)^{k-1}}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{k-1}{k\,n} \leqslant 1,$$

находим нижнюю оценку для $\mathbf{E}(N_n(3/2))^{-3/2}$:

$$\mathbf{E}(N_n(3/2))^{-3/2} \geqslant n^{-3/2} \sum_2$$

$$\geqslant (2/\sqrt{\pi})\, n^{-3/2} \Big(\sum_{(n)} - c_2(3/2)\Big) \geqslant (2/\sqrt{\pi})\, n^{-3/2} (\ln n - c_2(3/2) - 1). \quad \square$$

Доказательство теоремы 2. Так как в утверждении 1 дополнительные предположения (10) для предельного распределения $H(x) = G_{r,r}(x)$ нормированного размера выборки $N_n(r)$ выполняются с $\gamma = r > 1$, необходимо вычислить интегралы (11). Учитывая, что $g_n = \mathbf{E}\big(N_n(r)\big) = r(n-1)+1$, определим

$$J_1(x) = \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, dG_{r,r}(y), \quad J_2(x) = \int_0^\infty \frac{H_2(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\, dG_{r,r}(y),$$

$$J_{3,1}(x) = \int_0^\infty \frac{H_3(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{y}\, dG_{r,r}(y),$$

$$J_{3,2}(x) = \int_0^\infty \frac{H_5(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{y}\, dG_{r,r}(y) \ \text{ и } \ J_4(x) = \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, dh_2(y),$$

где $h_2(y) = \big((y-1)\,(2-r) + 2Q_1\big((r(n-1)+1)y\big)\big)\, g_{r,r}(y)/(2r)$, $Q_1(y) = 1/2 - (y - [y])$, и полиномы Чебышева–Эрмита $H_m(x)$ определены в формуле (6). Тогда

$$G_{2;n}(x;0) = J_1(x) - \frac{\lambda_3\, J_2(x)}{6\sqrt{g_n}} - \frac{1}{g_n}\left(\frac{\lambda_4}{24}\, J_{3,1}(x) + \frac{\lambda_3^2}{72}\, J_{3,2}(x)\right) + \frac{J_4(x)}{n}. \tag{57}$$

Используя формулу 2.3.3.1 из книги Прудникова, Брычкова и Марычева [21, с. 259] с $\alpha = r - 1/2$, $r + 1/2$, $r + 3/2$ и $p = 1 + x^2/(2r)$

$$K_\alpha(x) = \frac{r^r}{\Gamma(r)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-(r+x^2/2)y}\, dy = \frac{\Gamma(\alpha)\, r^{r-\alpha}}{\Gamma(r)\sqrt{2\pi}} \big(1 + x^2/(2r)\big)^{-\alpha}, \tag{58}$$

вычислим интегралы, входящие в (57). Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x} J_1(x) = \int_0^\infty y^{1/2}\, \varphi(x\sqrt{y})\, g_{r,r}(y)\, dy = \frac{r^r}{\Gamma(r)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{r-1/2}\, e^{-(r+x^2/2)y}\, dy$$

$$=K_{r+1/2}(x) = s_{2r}(x) \quad \text{и} \quad J_1(x) = S_{2r}(x)\,.$$

Интегралы $J_2(x)$, $J_{3,1}(x)$ и $J_{3,2}(x)$ в (57) вычислим с помощью (58), используя равенства $K_{r-1/2}(x)=s_{2r}(x)\,(2r+x^2)/(2r-1)$ и $K_{r+1/2}(x)=s_{2r}(x)$:

$$J_2(x) := \int\limits_0^\infty \frac{(x^2y-1)}{\sqrt{y}}\varphi(x\sqrt{y})\,g_{r,r}(y)\,dy$$
$$= x^2K_{r+1/2}(x) - K_{r-1/2}(x) = \frac{2}{2\,r-1}\left((r-1)x^2 - r\right)\,s_{2r}(x)\,,$$
$$J_{3,1}(x) := \frac{r^r}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{y}\left(x^3y^{3/2} - 3\,x\,y^{1/2}\right)y^{r-1}\,e^{-(r+x^2/2)y}dy$$
$$= \left(x^3\,K_{r+1/2}(x) - 3\,x\,K_{r-1/2}(x)\right) = 2\,\frac{(r-2)x^2-3r}{2r-1}\,x\,s_{2r}(x),$$

и так как $K_{r+3/2}(x) = \dfrac{2r+1}{2r+x^2}\,s_{2r}(x)$, получаем

$$J_{3,2}(x) := \frac{r^r}{\sqrt{2\pi}\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{y}\left(x^5y^{5/2}-10x^3y^{3/2}+15xy^{1/2}\right)y^{r-1}e^{-(r+x^2/2)y}dy$$
$$= x^5\,K_{r+3/2}(x) - 10\,x^3\,K_{r+1/2}(x) + 15\,x\,K_{r-1/2}(x)$$
$$= \frac{(r-2)(r-3)x^4 + 10\,r(2-r)x^2 + 15\,r^2}{(2r-1)\,(2r+x^2)}\,4\,x\,s_{2r}(x).$$

Интегрирование по частям $J_4(x)$ в (57) дает

$$J_4(x) = \int\limits_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\,dh_2(y) = -\frac{x}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2y/2}}{\sqrt{y}}\,h_2(y)\,dy$$
$$=-\frac{xr^r}{4\,r\sqrt{2\pi}\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty y^{r-3/2}\left((y-1),(2-r)+2Q_1(g_ny)\right)e^{-(r+x^2/2)y}\,dy$$
$$= \frac{(r-2)x}{4r}\left(K_{r+1/2}(x) - K_{r-1/2}(x)\right) - J_4^*(x)$$
$$= \frac{(2-r)\,x\,(x^2+1)}{4\,r(2r-1)}\,s_{2r}(x) - J_4^*(x),$$

где

$$J_4^*(x) = \frac{x\, r^{r-1}}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)} \int_0^\infty y^{r-3/2}\, Q_1\big(g_n y\big)\, e^{-(r+x^2/2)y}\, dy\,.$$

Функция $Q_1(y)$ периодична с периодом 1:

$$Q_1(y) = Q_1(y+1) \;\text{ для всех }\; y \in \mathbf{R} \;\text{ и }\; Q_1(y) := 1/2 - y \;\text{ для }\; 0 \leqslant y < 1. \tag{59}$$

Она является непрерывной справа и имеет единичный скачок в каждой целочисленной точке y. Запишем разложение в ряд Фурье функции $Q_1(y)$ во всех нецелых точках y

$$Q_1(y) = 1/2 - (y - [y]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\,\pi\, k\, y)}{k\,\pi}\,, \quad y \neq [y], \tag{60}$$

см. формулу 5.4.2.9 в книге [21, с. 576] с $a = 0$. Теперь оценим интеграл J_4^*. Используем (60), изменение порядка суммирования, интегрирование и формулу 2.5.31.4 из книги [21, с. 362] с $\alpha = r - 1/2$, $p = (r + x^2/2)$ и $b = 2\pi k g_n$

$$\begin{aligned}
J_4^*(x) &= \frac{x\, r^{r-1}}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)} \int_0^\infty y^{r-3/2}\, e^{-(r+x^2/2)y} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\big(2\pi k g_n y\big)}{\pi k} \Big)\, dy \\
&= \frac{x\, r^{r-1}}{2\,\pi\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^\infty y^{r-3/2}\, e^{-(r+x^2/2)y} \sin\big(2\pi k g_n y\big)\, dy \\
&= \frac{x r^{r-1}\Gamma(r-1/2)}{2\,\pi\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\big((r-1/2)\arctan\big(4\pi k g_n/(x^2+2r)\big)\big)}{k\,\big(\big(2\pi k g_n\big)^2 + (r+x^2/2)^2\big)^{(r-1/2)/2}} \\
&=: \frac{r^{r-1}\,\Gamma(r-1/2)}{2\,\pi\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x;n)}{k}.
\end{aligned}$$

Теперь представим в виде суммы степень $(r-1/2)/2 = (r-1)/2 + 1/4$. Имеем

$$\begin{aligned}
|a_k(x;n)| &\leqslant \frac{|x|}{\big(\big(2\pi\, k\, g_n\big)^2 + \big(r + x^2/2\big)^2\big)^{(r-1)/2+1/4}} \\
&\leqslant \frac{|x|}{(2\pi\, k\, g_n)^{r-1}\,(r + x^2/2)^{1/2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(2\pi\, r\, k\,(n-1))^{r-1}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $r > 1$ и $n \geqslant 2$, оценка равномерна по x

$$n^{-1}\,|J_4^*| \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} = \frac{c_1(r)}{n^r}\,.$$

Объединяя $|1/g_n - 1/(rn)| \leqslant \max\{2,r\}(r-1)(rn)^{-2}$, утверждение 1 и лемму 1, получаем оценку (24).

Рассмотрим теперь случай $r = 3/2$. Если с.в. X имеет момент $\mathbf{E}\,|X|^{5+\delta} < \infty$ для некоторого $0 < \delta < 1$, то для статистики T_m вместо (5) можно получить разложение Чебышева–Эджворта третьего порядка со скоростью сходимости $m^{-(3+\delta)/2}$. Аналогично доказательству леммы 1 находим $\mathbf{E}(N_n(r))^{-(3+\delta)/2} \leqslant Cn^{-3/2}$. Добавочный член в разложении Чебышева–Эджворта можно записать в виде

$$m^{-3/2} f_3(x) = -m^{-3/2}\varphi(x)\Big(H_4(x)\lambda_5/5! + H_6(x)\lambda_3\lambda_4/(3!4!) \\ +H_8(x)(\lambda_3/3!)^3\Big),$$

где λ_k, $k = 3,4,5,$ – нормированные кумулянты X, и $H_m(x)$ с $H_m(0) > 0$ суть полиномы Чебышева–Эрмита четной степени $m = 4,6,8$, см. книгу Петрова [22, теорема 5.18, $r = 5+\delta$].

Соответствующий дополнительный член в разложении $T_{N_n(3/2)}$ – $g_n^{-3/2}\int\limits_{1/g_n}^{\infty} y^{-3/2}\, f_3(x\sqrt{y})\, dG_{3/2,3/2}(y)$, см. работу [3, теорема 3.1]. Поэтому существует $H_m(0)g_n^{-3/2}J(x)$ с

$$J(x) = \int\limits_{1/g_n}^{\infty} y^{-1}e^{-(x^2-3)y/2}\,dy \geqslant \int\limits_{(x^2-3)y/(2g_n)}^{1} (y^{-1} - y^{-1}(1-e^{-y}))\,dy \\ \geqslant -\ln((x^2-3)y/(2g_n)) - 1 = \ln(3(n-1)+2) - \ln(x^2+3) - 1.$$

Следовательно, для $|x| \leqslant K < \infty$ в случае $r = 3/2$ множитель $\ln n$ из (24) исчезает только при $\lambda_3 = \lambda_5 = 0$. □

Доказательство теоремы 4. Пусть $\tau = nx - [nx] \in [0\,,\,1)$, т.е. $[nx] = nx - \tau$. Рассмотрим случай

$$0 \leqslant \frac{\max\{s,1\}}{nx-\tau} < \frac{1}{3}, \quad \text{включающий} \quad 0 \leqslant \frac{s}{nx} < \frac{1}{3} \text{ и } 0 \leqslant \frac{\tau}{nx} < \frac{1}{3}. \tag{61}$$

Напишем предварительные оценки для подготовки доказательства (31). Определим и оценим

$$a(n,x) := -n\Big(\frac{s}{nx-\tau} - \frac{s^2}{2(nx-\tau)^2}\Big) \overset{(61)}{\leqslant} -\frac{5ns}{6(nx-\tau)} \leqslant -\frac{5\,s}{6\,x} \tag{62}$$

$$b(n,x) := -\frac{s}{x} + \frac{s^2 - 2\,s\tau}{2nx^2} \leqslant -\frac{s}{x} + \frac{s}{2x}\frac{s}{nx} \overset{(61)}{\leqslant} -\frac{5\,s}{6\,x}\,, \tag{63}$$

$$f(n,x) := -\frac{s}{x} g_2\Big(\frac{\tau}{nx}\Big) + \frac{s^2}{2\,nx^2} g_3\Big(\frac{\tau}{nx}\Big), \tag{64}$$

где $g_2(\,\cdot\,) \geqslant 0$ и $g_3(\,\cdot\,) \geqslant 0$ определены в (35) и (36). Тогда

$$\begin{aligned} |f(n,x)| &\leqslant \max\Big\{\frac{s}{x}\, g_2\Big(\frac{\tau}{nx}\Big)\,,\ \frac{s^2}{2\,nx^2}\, g_3\Big(\frac{\tau}{nx}\Big)\Big\} \\ &\overset{(35),(36)}{\leqslant} \frac{15\,s\,\max\{1,s\}}{8\,n^2x^3} \overset{(61)}{\leqslant} \frac{5\,s}{24\,x}. \end{aligned} \tag{65}$$

Теперь докажем (31):

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\Big(\frac{N_n(s)}{n} \leqslant x\Big) = \mathbf{P}(N_n(s) \leqslant n\,x) = \mathbf{P}(N_n(s) \leqslant [n\,x]) \overset{(27)}{=} \Big(\frac{[nx]}{s+[nx]}\Big)^n \\ &= \Big(1 + \frac{s}{[nx]}\Big)^{-n} = \exp\Big\{-n\,\ln\Big(1 + \frac{s}{nx-\tau}\Big)\Big\} \\ &\overset{(32),(62)}{=} \exp\Big\{-n\,g_1\Big(\frac{s}{nx-\tau}\Big) + a(n,x)\Big\} = e^{a(n,x)} - r_1(n,x) \\ &= \exp\Big\{-\frac{s}{x}\Big(1-\frac{\tau}{nx}\Big)^{-1} + \frac{s^2}{2\,nx^2}\Big(1-\frac{\tau}{nx}\Big)^{-2}\Big\} - r_1(n,x) \\ &\overset{(63)}{=} e^{b(n,x)} + r_2(n,x) - r_1(n,x) \\ &= e^{-s/x}\Big(1 + \frac{s\,(s-2\tau)}{2\,nx^2}\Big) + r_3(n,x) + r_2(n,x) - r_1(n,x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1(n,x) &:= \Big(1 - \exp\Big\{-n\,g_1\Big(\frac{s}{nx-\tau}\Big)\Big\}\Big)e^{a(n,x)} \\ &\overset{(37)i,(62)}{\leqslant} ng_1\Big(\frac{s}{nx-\tau}\Big)e^{-5s/(6x)} \\ &\overset{(32)}{\leqslant} \frac{ns^3e^{-5s/(6x)}}{3(nx-\tau)^3} = \frac{s^3e^{-5s/(6x)}}{3\,n^2x^3(1-\tau/(nx))^3} \\ &\overset{(61)}{\leqslant} \frac{9\,s^3e^{-s/(2x)}}{8\,n^2x^3} \overset{(38)}{\leqslant} \frac{c_1(s)}{n^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2(n,x) &\overset{(64)}{:=} \left|\exp\left\{-\frac{s}{x}\,g_2\Big(\frac{\tau}{nx}\Big)+\frac{s^2}{2nx^2}\,g_3\Big(\frac{\tau}{nx}\Big)\right\}-1\right|e^{b(n,x)} \\ &\overset{(37)i}{\leqslant} |f(n,x)|e^{\{|f(n,x)|+b(n,x)\}} \\ &\overset{(65),(63)}{\leqslant} \frac{15\,s\,\max\{1,s\}}{8\,n^2x^3}\exp\left\{\frac{5s}{24x}-\frac{5s}{6x}\right\} \\ &= \frac{15\,s\,\max\{1,s\}}{8\,n^2x^3}e^{-5s/(8x)} \overset{(38)}{\leqslant} \frac{c_2(s)}{n^2}, \end{aligned}$$

и используя $s(\tau):=s^2-2s\tau$ и $|s(\tau)|\leqslant\max\{s^2\,,\,2s\}$, получаем

$$\begin{aligned} r_3(n,x) &:= \left|e^{b(n,x)}-e^{-s/x}\Big(1+\frac{s(\tau)}{2\,nx^2}\Big)\right| \\ &= e^{-s/x}\left|\exp\left\{\frac{s(\tau)}{2\,nx^2}\right\}-1-\frac{s(\tau)}{2\,nx^2}\right| \\ &\overset{(37)ii}{\leqslant} e^{-s/x}\,\frac{s^2(\tau)}{8\,n^2x^4}\,e^{|s(\tau)|/(2nx^2)} \\ &\overset{(61)}{\leqslant} \frac{\max\{s^4,4s^2\}}{8\,n^2x^4}\,e^{-2s/(3x)} \overset{(38)}{\leqslant} \frac{c_3(s)}{n^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, (31) доказано для $s/(nx-\tau)\leqslant 1/3$ с $C_2(s)=c_1(s)+c_2(s)+c_3(s)$.

Пусть теперь справедливо $s/(nx-\tau)=s/[nx]\geqslant 1/3$, что выполняется только для скачков $x=k/n$ of $N_n(s)/n$ с $k=1,2,\dots,3s$. Тогда для $x\leqslant 3s/n$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{N_n(s)}{n}\leqslant x\Big)=\sum_{k=1}^{3s}\mathbf{P}\Big(N_n(s)=k\Big)\overset{(28)}{=}\Big(\frac{3\,s}{4\,s}\Big)^n=\frac{n^2}{n^2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n\overset{(38)}{\leqslant}\frac{c_4}{n^2}.$$

Если $s/(nx-\tau)\geqslant 1/3$, то $1\leqslant(3s+1)/(nx)$, и

$$e^{-s/x}\left|1+\frac{s\,(s-2\,\tau)}{2\,x^2\,n}\right|\leqslant\frac{(3s+1)^2}{n^2x^2}\left\{1+\frac{\max\{s^2,2s\}}{2\,x^2}\right\}e^{-s/x}\overset{(38)}{\leqslant}\frac{c_5(s)}{n^2}.$$

Следовательно (31) доказано для $s/(nx-\tau)\geqslant 1/3$ с $C_2=c_4+c_5(s)$. Теорема 4 доказана. □

Доказательство леммы 2. Пусть $s>0$ и $n\geqslant 1$ фиксированы. Для $k\geqslant 1$ положим $a_k=k/(s+k)$ и $b_k=(k-1)/(s+k-1)$. Тогда $a_k-b_k=s/\big((s+k)(s+k-1)\big)$, $a_k>b_k$ и $a_k^n-b_k^n=(a_k-b_k)\left(a_k^{n-1}+a_k^{n-2}b_k+\dots+a_kb_k^{n-2}+b_k^{n-1}\right)>(a_k-b_k)nb_k^{n-1}$. Далее, для $k\geqslant s^*=2s+1$ находим

$b_k \geqslant 2/3$, $a_k - b_k \geqslant (3k/2)^{-2}$ и

$$\sum_{k=s^*}^{\infty} k(a_k^n - b_k^n) \geqslant \sum_{k=s^*}^{\infty} \frac{4\,n}{9\,k}\Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^{n-1} = \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{E}\, N_n(s) = \infty$. Из замечания 10 следует, что

$$\mathbf{E}\, W(s) = s\int_0^{\infty} x^{-1} e^{-s/x}\, dx = s\int_0^{\infty} y^{-1} e^{-sy}\, dy = \infty.$$

Чтобы исследовать абсолютный псевдо-момент ν_1, разобьем для любого фиксированного целого $n \geqslant 1$ область интегрирования на части вида $\mathbf{R}_+ = (0\,,\infty) = (\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{M}_n) \cup \mathbf{M}_n$, где $\mathbf{M}_n = \{k/n : k \in \mathbf{N}\}$ – множество точек разрыва $\mathbf{P}(N_n(s) \leqslant nx)$. Поскольку ф.р. $e^{-s/x}\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(x)$ непрерывна, и мера Лебега $\lambda(\mathbf{M}_n) = 0$, получаем $\nu_1 = \int\limits_{\mathbf{R}_+} x\,\bigl|d\bigl(\mathbf{P}\bigl(N_n(s) \leqslant n\,x\bigr) - e^{-s/x}\bigr)\bigr| \geqslant \int\limits_{\mathbf{R}_+\setminus\mathbf{M}_n} x\, de^{-s/x} = \infty\,.$

Если $k/n \leqslant x < (k+1)/n$, то $0 \leqslant e^{-s/x} - 1 + s/x \overset{(37)ii}{\leqslant} s^2/(2\,x^2) \leqslant n^2 s^2/(2\,k^2)$, $(1+s/k)^{-n} - 1 + ns/k \overset{(33)}{\leqslant} n\,(n+1)\,s^2/(2\,k^2)$, $\quad 0 \leqslant ns/k - s/x$ и

$$\bigl|e^{-s/x} - \mathbf{P}\bigl(N_n(s) \leqslant nx\bigr)\bigr| \overset{(27)}{=} \bigl|e^{-s/x} - \bigl(1+s/k\bigr)^{-n}\bigr| \\ \leqslant ns/k - s/x + 2\,n(n+1)s^2/k^2.$$

Более того,

$$I_k = \int_{k/n}^{(k+1-0)/n} \bigl(ns/k - s/x\bigr)\,dx \leqslant s/k - s\,\ln(1+1/k) \leqslant s/(2\,k^2).$$

Тогда для $k \geqslant s^* = 2s+1$ и $1 \leqslant r < 2$ имеем

$$\sum_{k=s^*}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1-0)/n} x^{r-1}\bigl|e^{-s/x} - \mathbf{P}\bigl(N_n(s) \leqslant nx\bigr)\bigr|dx \\ \leqslant \sum_{k=s^*}^{\infty}\Bigl(\frac{k+1}{n}\Bigr)^{r-1}\Bigl(I_k + \frac{2n(n+1)s^2}{k^2}\Bigr) \leqslant c(s,n)\sum_{k=s^*}^{\infty}\frac{(k+1)^{r-1}}{k^2} < \infty,$$

и $\chi_r < \infty$ для $1 \leqslant r < 2$. Лемма 2 доказана. □

Доказательство леммы 3. Пусть $n \geqslant 2$. Действуя так же как в работе [3], и используя

$$\mathbf{P}(N_n(s)=k)=\Big(\frac{k}{s+k}\Big)^n-\Big(\frac{k-1}{s+k-1}\Big)^n=s\,n\int\limits_{k-1}^{k}\frac{x^{n-1}}{(s+x)^{n+1}}\,dx,$$

и формулу 2.2.4.24 из книги [21, с. 239], получаем

$$\mathbf{E}(N_n^{-3/2})=s\,n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{x^{n-1}}{(s+x)^{n+1}}dx\leqslant s\,n\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{x^{n-5/2}}{(s+x)^{n+1}}dx$$

$$=s\,n\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^{n-5/2}}{(s+x)^{n+1}}\,dx=s\,n\,B(5/2,n-3/2)\overset{(51)}{\leqslant}\frac{sn}{\Gamma(5/2)\,(n-3/2)^{5/2}}.$$

Более того, $\mathbf{E}(N_1^{-3/2})\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-3/2}=\zeta(3/2)=2.612\ldots$. Лемма 3 доказана. □

Доказательство теоремы 5. В утверждении 1 дополнительные предположения (10) для предельного обратного экспоненциального распределения $H(x)=e^{-s/x}\,\mathbf{I}_{(0\,,\,\infty)}(x)$ нормированного размера выборки $N_n(s)$, $s\geqslant s_0>0$ и $h_2(y)=e^{-s/y}\,s\big(s-1+2\,Q_1(y\,n)\big)/(2\,y^2)$, $Q_1(y)=1/2-(y-[y])$, $y>0$ выполняются с $g_n=n$ и $\gamma=3/2$, где $h_2(0)=\lim_{y\downarrow 0}h_2(y)=0$. Следовательно, необходимо вычислить (11). Обозначим

$$J_1(x)=\int\limits_0^\infty\Phi(x\sqrt{y})\,de^{-s/x}(y),\quad J_2(x)=\int\limits_0^\infty\frac{H_2(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,de^{-s/x}(y),$$

$$J_{3,1}(x)=\int\limits_0^\infty\frac{H_3(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{y}\,de^{-s/x}(y),$$

$$J_{3,2}(x)=\int\limits_0^\infty\frac{H_5(x\sqrt{y})\,\varphi(x\sqrt{y})}{y}\,de^{-s/x}(y)\ \text{ и }\ J_4(x)=\int\limits_0^\infty\Phi(x\sqrt{y})\,dh_2(y),$$

где полиномы Чебышева–Эрмита $H_m(x)$ определены в (6). Тогда

$$G_{2;n}(x;0)=J_1(x)-\frac{\lambda_3\,J_2(x)}{6\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_4}{24}\,J_{3,1}(x)+\frac{\lambda_3^2}{72}\,J_{3,2}(x)\right)+\frac{J_4(x)}{n}.\quad(66)$$

Используя формулу 2.3.16.3 из книги [21, с. 277]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-py-s/y}}{y^{m+1/2}}\,dy = (-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{\partial^m}{\partial s^m}e^{-2\sqrt{p\,s}},\ \ p>0,\ s>0,\ m=0,1,2,\ldots \tag{67}$$

и приложение II.1 из книги [21, с. 611]:

$$\int\limits_0^\infty y^{-m-1/2}e^{-s/y}\,dy = s^{-m+1/2}\int\limits_0^\infty t^{m-3/2}e^{-t}\,dt = s^{-m+1/2}\,\Gamma(m-1/2)\,,$$

где $s>0$ и $m>1/2$. Для $p=x^2/2$ и $s>0$ находим

$$\begin{aligned} K_m(x) &:= \int\limits_0^\infty \frac{e^{-(x^2/2)y-s/y}}{\sqrt{2\,\pi}\,y^{m+1/2}}\,dy \\ &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{|x|}\,\dfrac{\partial^m}{\partial s^m}e^{-\sqrt{2\,s}\,|x|}, & x\neq 0,\ m=0,1,2, \\ s^{-m+1/2}\,\Gamma(m-1/2), & x=0,\ m=1,2. \end{cases} \end{aligned} \tag{68}$$

Поскольку $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ и $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$, имеем для $x\neq 0$

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \frac{1}{|x|}\,e^{-\sqrt{2s}\,|x|} = \frac{2}{\sqrt{2s}\,|x|}l_{1/\sqrt{s}}(x), \\ K_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2s}}\,e^{-\sqrt{2s}\,|x|} = \frac{1}{s}\,l_{1/\sqrt{s}}(x), \\ K_2(x) &= e^{-\sqrt{2s}\,|x|}\Big(\frac{1}{(2s)^{3/2}}+\frac{|x|}{2s}\Big) = \frac{2}{(2s)^2}(1+\sqrt{2s}|x|)\,l_{1/\sqrt{s}}(x), \end{aligned}$$

где $K_1(x)$, $K_2(x)$ и $|x|^\gamma K_0(x)$ для некоторого $\gamma>1$ непрерывны при $x\in\mathbf{R}$.

Вычислим теперь интегралы, входящие в (66). Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x}J_1(x) = \frac{s}{\sqrt{2\,\pi}}\int\limits_0^\infty y^{-3/2}e^{-(x^2/2)y-s/y}dy = s\ K_1(x) = l_{1/\sqrt{s}}(x)$$

$$\text{и}\quad J_1(x) = L_{1/\sqrt{s}}(x)\,.$$

Первый и третий интегралы в (66) вычисляем с использованием (68)

$$
\begin{aligned}
J_2(x) &:= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{x^2 y - 1}{y^{5/2}}\, e^{-(x^2/2)y - s/y} dy = s\big(x^2 K_1(x) - K_2(x)\big) \\
&= \Big(x^2 - \frac{|x|}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2\,s}\Big) l_{1/\sqrt{s}}(x), \\
J_{3,1}(x) &:= s\,\big(x^3\, K_1(x) - 3\,x K_2(x)\big) = \frac{x}{2\,s}\big(2\,s x^2 - 3\sqrt{2s}|x| - 3\big) l_{1/\sqrt{s}}(x),
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
J_{3,2}(x) &:= s\,\big(x^5\, K_0(x) - 10x^3 K_1(x) + 15 x K_2(x)\big) \\
&= \frac{x}{2s}\big((2s)^{3/2}|x|^3 - 20 s x^2 + 15\,\sqrt{2\,s}\,|x| + 15\big) l_{1/\sqrt{s}}(x).
\end{aligned}
$$

Интегрируя по частям последний интеграл в (66), получаем

$$
\begin{aligned}
J_4(x) &:= \int\limits_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, d(h_2(y)) = -\int\limits_0^\infty \frac{x}{2\sqrt{y}} \varphi(x\sqrt{y})\, h_2(y) dy \\
&= -\frac{x\,s(s-1)}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty y^{-5/2} e^{-(x^2/2)y - s/y} dy + J_4^*(x) \\
&\overset{(68)}{=} \frac{x\,s\,(1-s)}{4}\, K_2(x) + J_4^*(x) \\
&= \frac{x\,(1-s)}{8\,s}\big(\sqrt{2\,s}\,|x| + 1\big) l_{1/\sqrt{s}}(x) + J_4^*(x),
\end{aligned}
$$

где

$$
J_4^* = -\frac{x\,s}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty y^{-5/2}\, e^{-(x^2/2)y - s/y}\, Q_1(n\,y))\, dy.
$$

Используя разложение в ряд Фурье (60) периодической функции $Q_1(y)$, описанной в (59), меняя порядок суммирования и интегрируя, находим

$$
J_4^* = -\frac{s\,x}{2\,\sqrt{2\,\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \int\limits_0^\infty y^{-5/2}\, e^{-(x^2/2)y - s/y}\, \sin(2\pi\, k\, n\, y)\, dy. \tag{69}
$$

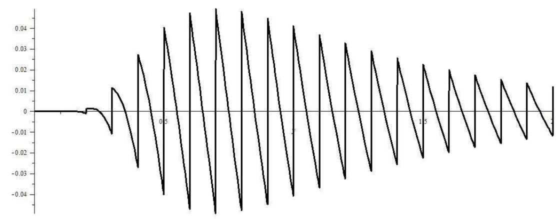

Рис. 7. Функция $h(y) = y^{-5/2} e^{-(x^2/2)y - s/y}\, Q_1(n\, y)$ из подынтегрального выражения J_4^* для $0 \leqslant y \leqslant 2$ и $x = 1$ с $s = 2$ и $n = 10$

Пусть $p > 0$, $s > s_0/2 > 0$ и $b > 0$ – некоторые вещественные константы. Запишем формулу 2.5.37.3 из книги [21, с. 368]

$$\int_0^\infty y^{-3/2}\, e^{-p\,y - s/y}\, \sin(b\,y)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\, e^{-2\sqrt{s}\, z_+}\, \sin(2\sqrt{s}\, z_-), \tag{70}$$

где $2\, z_\pm^2 = \sqrt{p^2 + b^2} \pm p$.

Чтобы оценить $J_4^*(x)$ в (69), докажем, что можно применить правило интегрирования Лейбница, и продифференцируем по s под знаком интеграла в (70). Рассмотрим функцию

$$f(s, y) = \sqrt{2\,p}\, y^{-3/2}\, e^{-p\,y - s/y}\, \sin(b\,y).$$

Для $p > 0$ находим оценку

$$\int_0^\infty |f(s, y)| dy \leqslant \sqrt{2\,p} \int_0^\infty y^{-3/2}\, e^{-p\,y - s/y} dy \overset{(67)}{=} \frac{\sqrt{2\,\pi\,p\,s}}{s}\, e^{-2\sqrt{p\,s}} \overset{(38)}{\leqslant} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{e\, s_0}$$

равномерную по $p > 0$, $b > 0$ и $s > s_0/2$. Более того, частная производная $\dfrac{\partial}{\partial s} f(s, y) = \sqrt{2\,p}\, y^{-5/2}\, e^{-p\,y - s/y}\, \sin(b\,y)$ непрерывна по s и y в области $(s_0/2, \infty) \times (0, \infty)$ и для $s > s_0/2$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} f(s, y) \right| \leqslant \sqrt{2\,p}\, \frac{e^{-p\,y - s/y}}{y^{5/2}} = \sqrt{2\,p}\, \frac{e^{-p\,y}}{y^{1/2}}\, \frac{e^{-s/y}}{y^2}$$
$$\overset{(38)}{\leqslant} \sqrt{2\,p}\, \frac{e^{-p\,y}}{y^{1/2}}\, \frac{16}{e^2\, s_0^2} =: g(y),$$

где

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{16}{e^2\, s_0^2}\sqrt{2\,p}\int_0^\infty \frac{e^{-p\,y}}{y^{1/2}}dy = \frac{16}{e^2\, s_0^2}\,\sqrt{2}\,\Gamma(1/2) < \infty$$

для всех $p > 0$, $b > 0$ и $s > s_0/2$. Следовательно, можно дифференцировать по s под знаком интеграла в (70). Получаем

$$\int_0^\infty y^{-5/2}\, e^{-p\,y - s/y}\sin(b\,y)\,dy = (\sqrt{\pi}/2)\, e^{-2\sqrt{s}\,z_+}\Big(s^{-3/2}\,\sin(2\sqrt{s}\,z_-) + 2\,s^{-1}\,z_+\,\sin(2\sqrt{s}\,z_-) - 2\,s^{-1}\,z_-\,\cos(2\sqrt{s}\,z_-)\Big).$$

Рассмотрим $z_\pm$, определенные в формуле (70) с $p = x^2/2$, $b = 2\pi kn$, $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$:

$$z_\pm = (1/\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{x^4/4 + (2\pi kn)^2}\; \pm x^2/2}\,.$$

Тогда $0 < z_- \leqslant z_+$, $\quad z_+ \geqslant |x|/2 \quad$ и $\quad z_+ \geqslant \sqrt{\pi kn} \geqslant \sqrt{\pi}(\sqrt{k} + \sqrt{n})/2$, $(1 + z_+)\, e^{-\sqrt{s}\,z_+/2} \overset{(38)}{\leqslant} 1 + 2/(e\,\sqrt{s_0})$, и используя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\pi s k}/2}/k \leqslant C$, получаем

$$|J_4^*| \leqslant C_1(s)\,|x|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1 + z_+)\, e^{-2\sqrt{s}\,z_+}}{k} \leqslant C_2(s)\,|x|e^{-\sqrt{s}|x|/4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{s}z_+}}{k}$$
$$\leqslant C_3(s)\, e^{-\sqrt{\pi s n}/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\, e^{-\sqrt{\pi s k}/2} \leqslant C_4(s)\, e^{-\sqrt{\pi s n}/2} \leqslant C(s)\, n^{-3/2}.$$

Заметим, что константа $C(s)$ может не быть равномерно ограничена по $s > 0$, но существует константа $C^*(s_0) < \infty$, такая что $C(s) \leqslant C^*(s_0)$ для $s \geqslant s_0$. Объединяя утверждение 1, (66) и лемму 3, получаем утверждение теоремы 5. □

Литература

1. Б. В. Гнеденко, *Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений.* — Труды тбилисского математического института им. А. М. Размадзе, **92** (1989), 146–150.
2. B. V. Gnedenko, V. Yu. Korolev, *Random Summation, Limit Theorems and Applications,* CRC Press, 1996.

3. В. Е. Бенинг, Н. К. Галиева, В. Ю. Королев, *Асимптотические разложения для функций распределения статистик, построенных по выборкам случайного объема.* — Информ. и ее примен. **7**, No. 2 (2013), 75–83.
4. В. Е. Бенинг, Н. К. Галиева, В. Ю. Королев, *Оценки скорости сходимости для функций распределения асимптотически нормальных статистик, основанных на выборках случайного объёма.* — Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика **17** (2012), 53–65.
5. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, *Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа.* — Информ. и ее примен. **2**, No. 2 (2008), 19–34.
6. В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, *Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики.* — Теория вероятн. и ее примен. **49**, No. 3 (2004), 417435.
7. C. Schluter, M. Trede, *Weak convergence to the Student and Laplace distributions.* — J. Appl. Probab. **53** (2016), 121–129.
8. E. A. Cornish, R. A. Fisher, *Moments and cumulants in the specification of distributions.* — Rev. Inst. Internat. Statist. **4** (1937), 307–320.
9. G. W. Hill, A. W. Davis, *Generalized asymptotic expansions of Cornish–Fisher type.* — Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1264–1273.
10. V. V. Ulyanov, *Cornish–Fisher Expansions.* — International Encyclopedia of Statistical Science, Ed. M. Lovric. – Springer, Berlin 2011, pp. 312–315.
11. S. Jaschke, *The Cornish–Fisher expansion in the context of delta-gamma-normal approximations.* — J. Risk **4** No. 2 (2002), 33–52.
12. Y. Fujikoshi, V. V. Ulyanov, R. Shimizu, *Multivariate Statistics: High-Dimensional and Large-Sample Approximations.* Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, Hoboken, N.J., 2010.
13. V. V. Ulyanov, M. Aoshima, Y. Fujikoshi, *Non-asymptotic results for Cornish–Fisher expansions.* — J. Math. Sci. **218**, No. 3 (2016).
14. N. L. Johnson, A. W. Kemp, S. Kotz, *Univariate Discrete Distributions.* 3rd Edition, Wiley Series in Probability and Statistics, 2005.
15. А. С. Марков, М. М. Монахов, В. В. Ульянов, *Разложения типа Корниша–Фишера для распределений статистик, построенных по выборкам случайного размера.* — Информ. и ее примен. **10** No. 2 (2016), 84–91.
16. A. Buddana, T. J. Kozubowski, *Discrete Pareto distributions.* — Econ. Qual. Control **29**, No. 2 (2014), 143–156.
17. S. S. Wilks, *Recurrence of extreme observations.* — J. Austral. Math. Soc. **1**, No. 1 (1959), 106–112.
18. О. О. Лямин, *О скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Лапласа.* — Вестник Московского Университета. Вычислительная Математика и Кибернетика **3** (2010), 30–37.
19. G. Christoph, W. Wolf, *Convergence Theorems with a Stable Limit Law.* Akademie Verlag, Series Mathematical Research, 1993.
20. G. Nemes, *Error bounds and exponential improvements for the asymptotic expansions of the gamma function and its reciprocal.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh **145** (2015), 571–596.
21. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции.* 2-е изд., исправ., Физматгиз, М., 2003.

22. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1987.

Christoph G., Monakhov M. M., Ulyanov V. V. Second order Chebyshev–Edgeworth and Cornish–Fisher expansions for distributions of statistics constructed from samples with random sizes.

In practice, we often encounter situations where a sample size is not defined in advance and can be a random value. In the present paper second order Chebyshev–Edgeworth and Cornish–Fisher expansions based of Student's t- and Laplace distributions and their quantiles are derived for samples with random size of a special kind, using general transfer theorem, which allows to construct asymptotic expansions for distributions of randomly normalized statistics from the distributions of the considered non-randomly normalized statistics and of the random size of the underlying sample. Recently, interest in Cornish–Fisher expansions has increased because of study in risk management. Widespread risk measure Value at Risk (VaR) substantially depends on the quantiles of the loss function, which is connected with description of investment portfolio of financial instruments.

Поступило 31 октября 2017 г.

Факультет математики,
Магдебургский университет им. Отто Фон Герике
Германия
E-mail: gerd.christoph@ovgu.de

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 119991 ГСП-1 Москва, Россия
E-mail: mih_monah@mail.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991 ГСП-1 Москва, Россия; Российский государственный
гуманитарный университет
Миусская площадь, д. 6, 125993 Москва, Россия
E-mail: vulyanov@cs.msu.ru