Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2015 г.

**В. М. Корчевский**

# ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**1. Введение.** В настоящей работе мы обобщаем теорему Колмогорова–Этемади об усиленном законе больших чисел для попарно независимых одинаково распределенных случайных величин на неодинаково распределенные случайные величины.

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность случайных величин. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ для $n \geqslant 1$. Классическая теорема Колмогорова утверждает, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$ то $S_n/n \to \mathbf{E}\,X_1$ почти наверное. Этемади [1] обобщил теорему Колмогорова, заменив условие независимости условием попарной независимости.

**Теорема A** (Этемади [1]). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин. Если $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$ то $S_n/n \to \mathbf{E}\,X_1$ почти наверное.*

Другие результаты, обобщающие теорему Колмогорова на различные классы зависимых случайных величин, можно найти в работах Матулы [2,3].

Результаты, обобщающие теорему  на неодинаково распределенные случайные величины, содержатся в [4–6]. Приведем соответствующие результаты этих работ.

**Теорема B** (Чандра, Госвами [4]). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность попарно независимых случайных величин. Положим $G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(|X_n| > x)$ для всех $x \geqslant 0$. Если*

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty,$$

*Ключевые слова*: усиленный закон больших чисел, попарно независимые случайные величины.

*то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k(X_k - \mathbf{E}\,X_k) \to 0 \quad \text{п.н.} \quad (n \to \infty)$$

*для любой ограниченной последовательности* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Теорема C** (Бозе, Чандра [5]). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность попарно независимых случайных величин. Если выполнены условия*

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty, \ \text{где} \ \ G(x) = \sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(|X_k| > x) \ \text{для всех} \ x \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(|X_n| > n) < \infty,$$

*то*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{n} \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{2}$$

**Теорема D** (Круглов [6]). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность попарно независимых случайных величин, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathbf{E}\,|X_n| < \infty. \tag{3}$$

*Если существует такая случайная величина* $X$, *что* $\mathbf{E}\,|X| < \infty$ *и*

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(|X_k| > x) \leqslant C\,\mathbf{P}(|X| > x) \quad \text{для всех} \ x \geqslant 0, \tag{4}$$

*где* $C$ *– некоторая положительная постоянная, то имеет место соотношение* (2).

Отметим, что в работе Егорова [7] получено обобщение теоремы Хартмана–Винтнера о законе повторного логарифма на неодинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условию (4) с $\mathbf{E}\,X^2 < \infty$.

Цель настоящей работы – обобщение теорем C и D.

**2. Основные результаты.**

**Теорема 1.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность попарно независимых случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Пусть выполнены условия*

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty \quad \text{где } G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| > x) \quad \text{для всех } x \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| > a_n) < \infty. \tag{6}$$

*Тогда*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{a_n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Положив в теореме $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$, мы приходим к теореме C.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность попарно независимых случайных величин. Если существует функция* $H(x)$*, невозрастающая в области* $x \geqslant 0$*, такая что*

$$\int_0^{\infty} H(x)\,dx < \infty, \ \text{ и } \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| > x) \leqslant H(x) \quad \text{для всех } x \geqslant 0, \tag{7}$$

*то*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

В качестве следствия теоремы мы немедленно получаем следующий результат:

**Следствие 1.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность попарно независимых случайных величин. Если существует случайная величина* $X$*, такая что* $\mathbf{E}\,|X| < \infty$ *и*

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| > x) \leqslant C\mathbf{P}(|X| > x) \quad \text{для всех } x \geqslant 0,$$

*где* $C$ *– некоторая положительная постоянная, то*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Следствие 1 показывает, что условие (3) в теореме **D** может быть опущено.

**3. Доказательства.** Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующий результат, являющийся следствием теоремы 1 из работы [4]:

**Лемма 1.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Если выполнены условия*

$$\mathbf{D}(S_n) \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}(X_k) \qquad \text{для всех } n \geqslant 1,$$

*где* $C$ – *некоторая положительная постоянная,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}(X_n)}{a_n^2} < \infty,$$

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\, X_n < \infty,$$

*то*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{a_n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

**Доказательство теоремы 1.** Для произвольной случайной величины $X$ положим $X^+ = \max\{0, X\}$, $X^- = \max\{0, -X\}$. Для последовательности попарно независимых случайных величин $\{X_n\}$ каждая из последовательностей $\{X_n^+\}$ и $\{X_n^-\}$ является последовательностью попарно независимых случайных величин. Поэтому, не ограничивая общности, мы можем рассматривать только случай, когда $X_n \geqslant 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Положим $Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{X_n \leqslant a_n\}}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ для $n \geqslant 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\frac{\mathbf{E}\, S_n - \mathbf{E}\, T_n}{a_n} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{8}$$

и

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\, T_n}{a_n} \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{9}$$

Заметим, что для любой неотрицательной случайной величины $Z$ и любого $a > 0$ выполнены соотношения

$$\mathbf{E}\,(Z\mathbb{I}_{\{Z>a\}}) = a\,\mathbf{P}(Z > a) + \int_a^\infty \mathbf{P}(Z > x)\,dx \tag{10}$$

и

$$\mathbf{E}\,(Z\,\mathbb{I}_{\{Z\leqslant a\}}) \leqslant \int_0^a \mathbf{P}(Z > x)\,dx. \tag{11}$$

Зафиксируем $N \geqslant 1$. В силу (5) и (10) для $n > N$ имеем

$$\mathbf{E}\,S_n - \mathbf{E}\,T_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\,(X_k\mathbb{I}_{\{X_k>a_k\}}) = \sum_{k=1}^n a_k\mathbf{P}(X_k > a_k)$$

$$+ \sum_{k=1}^n \int\limits_{a_k}^\infty \mathbf{P}(X_k > x)\,dx = \sum_{k=1}^n a_k\mathbf{P}(X_k > a_k) + \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^\infty \mathbf{P}(X_k > x)\,dx$$

$$+ \sum_{k=N+1}^n \int\limits_{a_k}^\infty \mathbf{P}(X_k > x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^n a_k\mathbf{P}(X_k > a_k) + \sum_{k=1}^N \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(X_k > x)\,dx$$

$$+ \sum_{k=1}^n \int_{a_N}^\infty \mathbf{P}(X_k > x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^n a_k\mathbf{P}(X_k > a_k)$$

$$+ a_N \int\limits_0^\infty G(x)\,dx + a_n \int_{a_N}^\infty G(x)\,dx.$$

Из условия (6) и леммы Кронекера (см., например, [8]) следует, что

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n a_k\mathbf{P}(X_k > a_k) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Таким образом, для любого $N \geqslant 1$ выполнено соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}(\mathbf{E}\,S_n - \mathbf{E}\,T_n) \leqslant \int\limits_{a_N}^\infty G(x)\,dx \tag{12}$$

и, поскольку правую часть (12) можно сделать сколь угодно малой за счет выбора $N$, мы приходим к соотношению (8).

Далее, покажем, что

$$\frac{T_n - \mathbf{E}\,T_n}{a_n} \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{13}$$

Для этого достаточно показать, что последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1. В силу (5) и (11) имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{D}(Y_n)}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left(X_n^2\mathbb{I}_{\{X_n\leqslant a_n\}}\right)}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{a_n^2}\mathbf{P}(X_n>x^{1/2})\,dx\\
&\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int\limits_0^{a_n}y\mathbf{P}(X_n>y)\,dy\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{([a_n]+1)^2}\int\limits_0^{[a_n]+1}y\mathbf{P}(X_n>y)\,dy\\
&\leqslant 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{[a_n]+1}\int\limits_{k-1}^{k}y\mathbf{P}(X_n>y)\,dy\\
&\leqslant 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int\limits_{k-1}^{k}y\mathbf{P}(X_n>y)\,dy\\
&\leqslant 8\sum_{j=[a_1]+1}^{\infty}\sum_{n:a_n\leqslant j}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int\limits_{k-1}^{k}y\mathbf{P}(X_n>y)\,dy\\
&\leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^2}\int\limits_{k-1}^{k}y\frac{\sum\limits_{n:a_n\leqslant j}\mathbf{P}(X_n>y)}{j}\,dy\\
&\leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^2}\int\limits_{k-1}^{k}yG(y)\,dy=8\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^2}\int\limits_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\\
&\leqslant 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int\limits_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\leqslant 16\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{k-1}^{k}G(y)\,dy=16\int\limits_0^{\infty}G(y)\,dy<\infty,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $[a_n]$ – целая часть от $a_n$. Далее, для любого $n\geqslant 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,Y_k\leqslant\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,X_k=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\infty}\mathbf{P}(X_k>x)\,dx\\
&\leqslant\int\limits_0^{\infty}G(x)\,dx<\infty.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Из (14), (15), а также из попарной независимости случайных величин $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Таким образом, (13) выполнено.

В силу (6) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > a_n) < \infty. \tag{16}$$

Из (13), (16) и леммы Бореля–Кантелли следует (9). □

**Доказательство теоремы 2.** Поскольку функция $H(x)$ не возрастает в области $x \geqslant 0$, из условия $\int\limits_0^{\infty} H(x)\,dx < \infty$ следует, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k H(2^k) < \infty$. Отсюда, учитывая (7), мы получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| > n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \mathbf{P}(|X_n| > n) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \mathbf{P}(|X_n| > 2^k)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{2^{k+1}} \mathbf{P}(|X_n| > 2^k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} H(2^k) < \infty.$$

Теперь, принимая во внимание, что из условия (7) следует (1), применив теорему **C**, мы немедленно получаем требуемый результат. □

## Литература


1. N. Etemadi, *An elementary proof of the strong law of large numbers.* — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **55** (1981), 119–122.
2. P. Matula, *A note on the almost sure convergence of sums negatively dependent random variables.* — Statist. Probab. Lett. **15** (1992), 209–213.
3. P. Matula, *On some families of AQSI random variables and related strong law of large numbers.* — Appl. Math. E-Notes **5** (2005), 31–35.
4. T. K. Chandra, A. Goswami, *Cesáro uniform integrability and a strong laws of large numbers.* — Sankhyā, Ser. A, **54** (1992), 215–231.
5. A. Bose, T. K. Chandra, *A note on the strong law of large numbers.* — Calcutta Statist. Assoc. Bull. **44** (1994), 115–122.
6. V. M. Kruglov, *Strong law of large numbers.* — In: Stability Problems for Stochastic Models (V. M. Zolotarev, V. M. Kruglov, V. Yu. Korolev, eds.) TVP/VSP. Moscow–Utrecht, 1994, pp. 139–150.
7. В. А. Егоров, *Обобщение теоремы Хартмана–Винтнера о законе повторного логарифма.* — Вестн. ЛГУ **7** (1971), 22–28.

8. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.

Korchevsky V. M. On the strong law of large numbers for sequences of pairwise independent random variables.

We establish new sufficient conditions for the applicability of the strong law of large numbers (SLLN) for sequences of pairwise independent non-identically distributed random variables. These results generalize Etemadi's extension of Kolmogorov's SLLN for identically distributed random variables. Some of the obtained results hold with an arbitrary norming sequence in place of the classical normalization.

С.-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
ул. Большая Морская, д. 67
С.-Петербург, 190000, Россия
*E-mail*: valery_ko@list.ru

Поступило 3 октября 2017 г.