Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ $\exp\left(\mathbf{t}(\mathbf{S}\nabla,\nabla)\right)$ С КОМПЛЕКСНОЙ МАТРИЦЕЙ S.

§1. Введение.

В статьях авторов [1, 2] были получены результаты о вероятностном представлении и вероятностной аппроксимации решения задачи Коши

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{1}$$

для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $t>0$, а σ является комплексным числом, удовлетворяющим условиям $\operatorname{Re}\sigma\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\sigma^2\geqslant 0$.

При $\sigma\in\mathbb{R}$ уравнение (2) является уравнением теплопроводности, а при $\operatorname{Re}\sigma^2=0$ – уравнением Шрёдингера.

В частности, в работе [1] было показано, что для всякой функции $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$, носитель преобразования Фурье которой содержится в интервале $[-M,M]$ для некоторого $M>0$ (и, тем самым, допускающей аналитическое продолжение, являющееся целой функцией экспоненциального типа M), для решения $u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) справедливо представление

$$u(t,x)=\mathbf{E}\varphi\bigl(x+\sigma w(t)\bigr), \tag{3}$$

Ключевые слова: эолюционные уравнения, предельные теоремы, уравнение Шрёдингера, полугруппы операторов.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 16-01-00258). Работа второго и третьего автора выполнена при поддержке РНФ (грант No. 17-11-01136).

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, а подстановка комплексной величины $x+\sigma w(t)$ в функцию вещественной переменной φ понимается как подстановка в аналитическое продолжение φ. Произвольную функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать функциями указанного вида. Именно, положим

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M} \widehat{\varphi}(p)e^{-ipx}\,dp,$$

$$u_M(t,x) = \mathbf{E}\varphi_M\big(x+\sigma w(t)\big), \tag{4}$$

тогда

$$\|u(t,\cdot\,) - u_M(t,\cdot\,)\|_2^2 \leqslant \|\varphi-\varphi_M\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|p|>M} |\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Кроме того, в [1] было показано, что сходимость к решению задачи Коши для уравнения (2) сохранится если в представлении (4) мы не только будем аппроксимировать начальную функцию φ целой функцией экспоненциального типа, но и одновременно аппроксимировать винеровский процесс последовательностью ступенчатых процессов, построенных по нормированным суммам независимых случайных величин. Соответствующее утверждение естественно трактовать как некоторую предельную теорему.

В настоящей работе мы получим многомерное обобщение результатов [1]. Вместо одного комплексного числа σ^2 у нас будет симметричная (вообще говоря, не эрмитова) квадратная комплексная матрица S с неотрицательно определенной вещественной частью. Данная постановка задачи была предложена нам профессором К. Партасарати на конференции в Нью-Дели в 2015 году.

Рассмотрим оператор

$$\frac{1}{2}\,(S\nabla,\nabla) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} S_{jk}\,\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k},$$

заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R}^d)$. Матрица S – симметричная (то есть, $S^T = S$) комплексная матрица, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} S \geqslant 0$. Последнее означает, что квадратичная форма (Sp,p) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\,(Sp,p) \geqslant 0 \tag{5}$$

для всех $p \in \mathbb{R}^d$.

Для $t \geqslant 0$ через P^t обозначим оператор эволюции $e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}$, являющийся псевдодифференциальным оператором с символом $e^{-\frac{t}{2}(Sp,p)}$. Семейство операторов $P^t,\ t \geqslant 0$, образует полугруппу, то есть $P^{t+s} = P^tP^s$ для всех $t, s \geqslant 0$. Из условия (5) следует неравенство для операторных норм оператора эволюции

$$\left\|e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^d)\to W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \tag{6}$$

что означает, что семейство операторов $e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)},\ t \geqslant 0$ образует полугруппу сжимающих операторов в пространствах $W_2^l(\mathbb{R}^d),\ l \geqslant 0$ (в частности, в $L_2(\mathbb{R}^d)$).

Для каждого $t \geqslant 0$ оператор P^t переводит функцию $\varphi \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$ в решение $u(t,\,\cdot\,)$ задачи Коши

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{7}$$

для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,(S\nabla,\nabla)u = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} S_{jk}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{8}$$

где $u = u(t,x),\ \ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d$.

§2. Основные обозначения.

Через $\|\cdot\|$ мы будем обозначать евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Отметим обозначение, не вполне совпадающее с общепринятым. Для $y, z \in \mathbb{C}^d$ символом (y,z) мы будем обозначать не скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$, а комплексную величину

$$(y,z) = \sum_{j=1}^{d} y_j z_j,$$

то есть аналитическое продолжение скалярного произведения в $\mathbb{R}^d$.

Через $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ мы будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbb{R}^d$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ мы выберем норму (эквивалентную стандартной, см., например, [6, 3.I.8])

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 + \|p\|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 \, dp,$$

где через $\widehat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ, которое в данной работе определяется как

$$\widehat{\psi}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(p,x)} \psi(x) \, dx.$$

Соответственно, в обратном преобразовании Фурье появляется множитель $1/(2\pi)^d$, именно

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(p,x)} \widehat{\psi}(p) \, dp.$$

Если H_1, H_2 – два гильбертовых пространства, а линейное отображение $A : H_1 \to H_2$ ограничено, то под $\|A\|_{H_1 \to H_2}$ мы будем понимать операторную норму: $\|A\|_{H_1 \to H_2} = \sup\limits_{\{u : \|u\|_{H_1} = 1\}} \|Au\|_{H_2}$.

Далее мы будем неоднократно рассматривать операторы A, действующие по правилу

$$(Au)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} a(p) \widehat{u}(p) \, dp.$$

Эти операторы являются псевдодифференциальными операторами с символом $a(p)$. Вопрос об области определения A будет нами рассматриваться в зависимости от свойств символа $a(p)$.

§3. Аппроксимация средними значениями функционалов от винеровского процесса.

Представим матрицу S в виде произведения матриц

$$S = KK^T, \tag{9}$$

где K – комплексная квадратная матрица. Такое представление всегда возможно, что следует из того факта, что всякая симметричная квадратичная форма в пространстве $\mathbb{C}^d$ может быть приведена к диагональному виду, причем матрица формы в новом базисе будет составлена только из нулей и единиц.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset [-M, M]^d$$

для некоторого $M > 0$. *Тогда функция*

$$u(t, x) = \mathbf{E}\varphi(x + Kw(t)), \tag{10}$$

где $w(t)$ *– стандартный* d*-мерный винеровский процесс, есть решение задачи Коши* (8),(7).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\mathbf{E} \int\limits_{[-M,M]^d} dp\, \widehat{\varphi}(p) e^{-i(p,x)} e^{-i(p,Kw(t))} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-M,M]^d} dp\, \widehat{\varphi}(p) e^{-i(p,x)} \mathbf{E} e^{-i(p,Kw(t))}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сосчитаем математическое ожидание в правой части (11). Имеем

$$\mathbf{E}e^{-i(p,Kw(t))} = \mathbf{E}e^{-i(K^T p, w(t))} = \prod_{j=1}^{d} \mathbf{E}e^{-ib_j w_j(t)}, \tag{12}$$

где $b_j = (K^T p)_j$, а $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_d(t))$.

Заметим, что для любого $j = 1, \ldots, d$ справедливо

$$\mathbf{E}e^{-ib_j w_j(t)} = e^{-\frac{t}{2} b_j^2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}e^{-i(p,Kw(t))} = e^{-\frac{t}{2}\sum\limits_{j=1}^{d} b_j^2} = e^{-\frac{t}{2}(K^T p, K^T p)} = e^{-\frac{t}{2}(Sp,p)}. \tag{13}$$

Из (11) и (13) немедленно следует утверждение теоремы. □

Пусть теперь начальная функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ не удовлетворяет условию теоремы 1 (в частности, не продолжается до целой функции), так что выражение $\mathbf{E}\varphi(x + Kw(t))$ формально не определено. В этом случае решение задачи Коши можно представить в виде предела вероятностных решений, аппроксимируя φ целыми функциями. Именно, для $M > 0$ определим проектор P_M, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\mathrm{P}_M \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-M,M]^d} e^{-i(p,x)}\, \widehat{\varphi}(p)\, dp. \tag{14}$$

Функция $\varphi_M = \mathrm{P}_M\varphi$ уже удовлетворяет условию теоремы 1 и справедливо

$$\|P^t\varphi - P^t\varphi_M\|_2 \leqslant \|\varphi - \varphi_M\|_2 \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

§4. Аппроксимация средними значениями функционалов от сумм независимых случайных величин.

В этом параграфе мы покажем, что сходимость к решению задачи Коши (7), (8) сохранится, если мы будем не только аппроксимировать начальное данное целой функцией, но и одновременно заменять винеровский процесс его аппроксимацией, построенной по нормированным суммам независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных $\mathbb{R}^d$-значных случайных величин с симметричным распределением $\mathcal{P}$ каждая. Мы будем предполагать, что случайные величины имеют единичную матрицу ковариаций и конечный экспоненциальный момент, то есть для некоторого $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}\, e^{\gamma\|\xi\|} < \infty. \tag{15}$$

Далее, пусть $\eta(t), t \in [0,\infty)$, – не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с параметром единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс

$$\zeta_n(t), \quad t \in [0,T],$$

полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{16}$$

Отметим, что выбор схемы со случайным числом слагаемых (вместо более распространенного способа суммирования до $[nt]$) является вполне естественным, так как $\zeta_n(t)$ является процессом Леви и, соответственно, порождает полугруппу операторов, генератор которой легко выписывается.

Следующим шагом с помощью процесса $\zeta_n(t)$ мы построим последовательность полугрупп операторов, аппроксимирующую полугруппу $P^t = e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}$. Как и выше, для каждой (комплекснозначной) функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и числа $M > 0$ определим функцию φ_M, полагая $\varphi_M = \mathrm{P}_M\varphi$.

Отметим, что при всех $M > 0$ функция φ_M (как функция $x \in \mathbb{C}^d$) является целой аналитической функцией экспоненциального типа M. Далее число M мы будем выбирать в зависимости от n, $M = M(n)$.

Для натуральных n определим семейство операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\,\varphi_M\bigl(x + K\zeta_n(t)\bigr). \tag{17}$$

Отметим, что сужение семейства P_n^t на подпространство $\mathrm{P}_M L_2(\mathbb{R}^d)$ образует полугруппу. Нетрудно показать, что функция

$$u_n(t,x) = P_n^t\,\varphi(x)$$

решает задачу Коши $u_n(0,x) = \varphi_M(x)$ для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M u_n,$$

где оператор $\mathcal{A}_n$ действует на функцию $\psi \in \mathrm{P}_M L_2(\mathbb{R}^d)$ как

$$\mathcal{A}_n\psi(x) = n\int\limits_{\mathbb{R}^d}\biggl(\psi\Bigl(x + \frac{Ky}{\sqrt{n}}\Bigr) - \psi(x)\biggr)\,d\mathcal{P}(y). \tag{18}$$

Ясно, что для больших значений n оператор $\mathcal{A}_n$ в определенном смысле близок к оператору $\frac{1}{2}\ (S\nabla,\nabla)$. В следующем утверждении мы покажем, что при надлежащем выборе $M = M(n)$ решения соответствующих эволюционных уравнений также близки между собой.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+4}(\mathbb{R}^d)$, $l \geqslant 0$, $M(n) = (\frac{n}{t})^{1/4}$. Тогда существует такая константа $C > 0$, что при всех $n > \gamma^{-4}\|K\|^4 t$ выполнено неравенство*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+t)\,\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+4}(\mathbb{R}^d)}}{n}.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем, что для каждого p, удовлетворяющего условию $\|p\| \leqslant M(n)$,

$$h_n(p) = \mathbf{E}\,e^{-i(p,K\zeta_n(t))} = \exp\biggl(nt\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigl(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})} - 1\Bigr)d\mathcal{P}(y)\biggr). \tag{19}$$

Из (15) вытекает, что интеграл в правой части (19) конечен по крайней мере при всех достаточно больших n.

Из (17) и (19) следует, что

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} e^{-i(p,x)}\widehat{\varphi}(p)h_n(p)\,dp.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\big\|e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\varphi - e^{t\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\mathrm{P}_M\varphi\big\|_{W_2^l} \\ &\quad\leqslant \big\|e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\varphi - e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\mathrm{P}_M\varphi\big\|_{W_2^l} \\ &\quad\quad+ \big\|e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\mathrm{P}_M\varphi - e^{t\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\mathrm{P}_M\varphi\big\|_{W_2^l}. \end{aligned} \tag{20}$$

Первое слагаемое в правой части (20) легко оценивается

$$\begin{aligned} \big\|e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\varphi - e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\mathrm{P}_M\varphi\big\|_{W_2^l} &\leqslant \|\varphi - \mathrm{P}_M\varphi\|_{W_2^l} \\ &\leqslant \frac{1}{M^4}\|\varphi\|_{W_2^{l+4}} = \frac{t}{n}\,\|\varphi\|_{W_2^{l+4}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для оценки второго слагаемого в (20) воспользуемся формулой Дюамеля (см., например, [4, гл. IX, §2, п. 1]):

$$\begin{aligned} &e^{t\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\mathrm{P}_M\varphi - e^{\frac{t}{2}(S\nabla,\nabla)}\mathrm{P}_M\varphi \\ &\qquad= e^{t\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\varphi_M - e^{\frac{t}{2}\mathrm{P}_M(S\nabla,\nabla)\mathrm{P}_M}\varphi_M \\ &\qquad= \int\limits_0^t e^{(t-\tau)\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\mathrm{B}\,e^{\frac{\tau}{2}\mathrm{P}_M(S\nabla,\nabla)\mathrm{P}_M}\varphi_M\,d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M - \frac{1}{2}\mathrm{P}_M(S\nabla,\nabla)\mathrm{P}_M. \tag{23}$$

Как уже было отмечено во введении (формула (6)), для любого $\tau \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\big\|e^{\frac{\tau}{2}(S\nabla,\nabla)}\big\|_{W_2^{l+4}\to W_2^{l+4}} \leqslant 1. \tag{24}$$

Оценим теперь операторную норму $\big\|\mathrm{B}\big\|_{W_2^{l+4}\to W_2^l}$. В силу (18) имеем

$$\begin{aligned} \big\|\mathrm{B}\psi\big\|_{W_2^l}^2 = &\int\limits_{[-M,M]^d} |\widehat{\psi}(p)|^2(1+\|p\|^{2l}) \\ &\times \left| n\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})} - 1\big)d\mathcal{P}(y) + \frac{1}{2}(Sp,p)\right|^2 dp. \end{aligned} \tag{25}$$

Напомним, что по условию распределение $\mathcal{P}$ симметрично и имеет единичную матрицу ковариаций. Это влечет справедливость соотношений

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(p,Ky)d\mathcal{P}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}(p,Ky)^3d\mathcal{P}(y)=0 \tag{26}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(p,Ky)^2d\mathcal{P}(y)=(Sp,p). \tag{27}$$

Пользуясь (26) и (27), при $\|p\|\leqslant M=t^{-1/4}n^{1/4}$ получаем

$$\begin{aligned}
&\Big|n\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1\big)d\mathcal{P}(y)+\frac{1}{2}(Sp,p)\Big| \\
&=\Big|n\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1+i\Big(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}}\Big)+\frac{1}{2}\Big(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}}\Big)^2+\frac{i}{6}\Big(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}}\Big)^3\Big)\,d\mathcal{P}(y)\Big| \\
&\leqslant\frac{n}{24}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{|(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})|}\Big|(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})\Big|^4\,d\mathcal{P}(y) \\
&\leqslant\frac{\|p\|^4\|K\|^4}{24n}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\|K\|\cdot\|y\|\cdot\|p\|}\|y\|^4\,d\mathcal{P}(y) \\
&\leqslant\frac{\|p\|^4\|K\|^4}{24n}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{\|K\|\cdot\|y\|t^{1/4}n^{-1/4}}\|y\|^4\,d\mathcal{P}(y).
\end{aligned} \tag{28}$$

По условию теоремы число n в (28) удовлетворяет неравенству

$$\|K\|t^{1/4}n^{-1/4}<\gamma.$$

В этом случае из (25) и (28) следует неравенство

$$\big\|\mathrm{B}\big\|_{W_2^{l+4}\to W_2^l}\leqslant\frac{C}{n}\,, \tag{29}$$

где константа C зависит только от распределения $\mathcal{P}$ и $\|K\|$.

Наконец, оценим операторную норму

$$\|e^{(t-\tau)\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}\|_{W_2^l\to W_2^l}. \tag{30}$$

Прежде всего заметим, что оператор $e^{(t-\tau)\mathrm{P}_M\mathcal{A}_n\mathrm{P}_M}$ – псевдодифференциальный оператор с символом

$$\exp\left(n(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1\right)d\mathcal{P}(y)\right)\cdot\mathbf{1}_{[-M,M]^d}(p). \tag{31}$$

Используя (28), получим

$$\begin{aligned}
&\left|\exp\left(n(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1\right)d\mathcal{P}(y)\right)\right| \\
&\quad=\left|\exp(-\frac{(t-\tau)}{2}(Sp,p))\right| \\
&\qquad\times\left|\exp\left(n(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1\right)d\mathcal{P}(y)+\frac{(t-\tau)}{2}(Sp,p)\right)\right| \\
&\quad\leqslant\left|\exp\left(n(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(e^{-i(p,\frac{Ky}{\sqrt{n}})}-1\right)d\mathcal{P}(y)+\frac{(t-\tau)}{2}(Sp,p)\right)\right| \\
&\quad\leqslant\exp\left(\frac{t\|p\|^4\|K\|^4}{24n}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{\|K\|\cdot\|y\|t^{1/4}n^{-1/4}}\|y\|^4\,d\mathcal{P}(y)\right)\leqslant C.
\end{aligned} \tag{32}$$

Утверждение теоремы следует из (22), (24), (29), (32). □

Следствие. *Для любой функции $\varphi\in L_2(\mathbb{R}^d)$ имеет место сходимость*

$$\|P_n^t\varphi-P^t\varphi\|_{L_2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Доказательство. В силу того, что нормы операторов $\|P^t\|_{L_2\to L_2}$ и $\|P_n^t\|_{L_2\to L_2}$ равномерно ограничены, а класс Соболева $W_2^4(\mathbb{R}^d)$ плотен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, утверждение следствия немедленно вытекает из утверждения теоремы 2 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [5, II.1.18]). □

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельные теоремы о сходимости функционалов от случайных блужданий к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ с комплексным параметром σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.

2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Докл. РАН **459**, No. 3 (2014), 400–402.
3. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М. 1974.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
5. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Издательство иностранной литературы, М., 1962.
6. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих , Н. Н. Уральцева и др. *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Издательство Ленинградского университета, 1981.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. A probabilistic approximation of the evolution operator $\exp(t(S\nabla, \nabla))$ with a complex matrix S.

We consider some problems concerning a probabilistic interpretation of the Cauchy problem solution for the equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,(S\nabla, \nabla)u$, where S is a symmetric complex matrix such that $\operatorname{Re} S \geqslant 0$.

Поступило 18 октября 2017 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9
199034, С.-Петербург, Россия

E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

E-mail: m.faddeev@spbu.ru