Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

РЕДКИЕ СОБЫТИЯ И ПУАССОНОВСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что полученные ранее результаты об аппроксимации распределений сумм независимых слагаемых сопровождающими безгранично делимыми законами можно интерпретировать как содержательные количественные оценки близости между выборкой, составленной из независимых редких событий, и пуассоновским точечным процессом, получаемым после пуассонизации исходной выборки.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{F}_d$ обозначает множество вероятностных распределений, определенных на борелевской σ-алгебре подмножеств евклидова пространства $\mathbf{R}^d$ и $\mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d$ – распределение d-мерного случайного вектора ξ. Для $F \in \mathfrak{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{F}_1$ функция концентрации определяется формулой

$$Q(F,\, b) = \sup_x F\big\{\,[x,\, x+b]\,\big\}, \quad b \geqslant 0.$$

Для $F \in \mathfrak{F}_d$ соответствующую функцию распределения будем обозначать $F(x) = F\{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]\}$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, а равномерное расстояние Колмогорова –

$$\rho(F, H) = \sup_x \big| F(x) - H(x) \big|.$$

Символом c мы обозначаем абсолютные положительные постоянные. Заметим, что константы c могут быть различными в разных (или даже в тех же самых) формулах. Для некоторых положительных величин a и b запись $a \asymp b$ означает, что $a \leqslant c\,b$ и $b \leqslant c\,a$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые, вообще говоря, неодинаково распределенные элементы измеримого пространства $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ и $f : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, редкие события, пуассоновские точечные процессы, функции концентрации, неравенства.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00367), гранта СПбГУ–ННИО 6.37.65.2017 и при поддержке программы Президиума РАН N 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

– борелевское отображение. Пусть $F_i = \mathcal{L}(f(X_i))$, $i = 1, \ldots, n$, – распределения векторов $f(X_i)$. Тогда сумма

$$S = f(X_1) + \cdots + f(X_n)$$

имеет распределение $\prod_{i=1}^n F_i$ (произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки: $FH = F * H$, $H^m = H^{m*}$, $H^0 = E \stackrel{\text{def}}{=} E_0$, где E_a – распределение, сосредоточенное в точке $a \in \mathbf{R}^d$). Естественным аппроксимирующим безгранично делимым распределением для $\prod_{i=1}^n F_i$ является сопровождающее обобщенное распределение Пуассона $\prod_{i=1}^n e(F_i)$, где

$$e(H) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H^m}{m!}, \quad H \in \mathfrak{F}_d,$$

и, в более общем случае,

$$e(\alpha H) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m H^m}{m!}, \quad \alpha > 0.$$

Легко видеть, что $\prod_{i=1}^n e(F_i)$ – распределение величины

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\nu_i} f(X_{i,j}), \tag{1}$$

где $X_{i,j}$ и ν_i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots$, – независимые в совокупности случайные элементы пространства $\mathfrak{X}$ и случайные величины соответственно с $\mathcal{L}(X_{i,j}) = \mathcal{L}(X_i)$ и $\mathcal{L}(\nu_i) = e(E_1)$. Ясно, что $e(E_1)$ – распределение Пуассона со средним значением 1. Таким образом, сумма T определяется аналогично S, но исходная выборка $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ заменяется своей пуассонизированной версией $\mathbf{Y} = \{X_{i,j} : i = 1, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, \nu_i\}$. Пуассонизация выборки известна как один из самых мощных инструментов изучения эмпирических процессов. Случайное множество $\mathbf{Y}$ можно рассматривать как пуассоновский точечный процесс на пространстве $\mathfrak{X}$ с мерой интенсивности $\sum_{i=1}^n \mathcal{L}(X_i)$. Основным свойством пуассоновского точечного процесса является пространственная независимость: для любых попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_m \subset \mathfrak{X}$ случайные множества $\mathbf{Y} \cap A_1, \ldots, \mathbf{Y} \cap A_m \subset \mathfrak{X}$ являются независимыми в совокупности. Поэтому пуассоновский точечный процесс $\mathbf{Y}$ исследовать легче, чем выборку $\mathbf{X}$. Можно использовать свойство независимости, так как теория независимых объектов разработана намного детальнее.

В настоящей работе рассматривается задача аппроксимации выборки пуассоновским точечным процессом, получаемым после пуассонизации исходной выборки в случае, когда выборка получена при наблюдении редких событий. Множество $\mathfrak{X}$ представляется в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$, с $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{S}$, $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \varnothing$. Мы говорим, что j-ое редкое событие происходит, если $X_j \in \mathfrak{X}_2$. Соответственно, оно не происходит, если $X_j \in \mathfrak{X}_1$.

Чтобы сформулировать результаты, нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть $f : \mathfrak{X} \to \mathbf{R}^d$ – борелевское отображение, определенное выше и $F_i = \mathcal{L}(f(X_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда распределения $F_i \in \mathfrak{F}_d$ могут быть представлены в виде смесей

$$F_i = (1 - p_i)\, U_i + p_i\, V_i, \tag{2}$$

где $U_i, V_i \in \mathfrak{F}_d$ являются условными распределениями векторов $f(X_i)$ при условии $X_i \in \mathfrak{X}_1$ и $X_i \in \mathfrak{X}_2$ соответственно,

$$0 \leqslant p_i = \mathbf{P}\big\{X_i \in \mathfrak{X}_2\big\} = 1 - \mathbf{P}\big\{X_i \in \mathfrak{X}_1\big\} \leqslant 1, \tag{3}$$

а V_i – произвольные распределения. По определению мы имеем дело с редкими событиями, если величина

$$p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i \tag{4}$$

мала. Другими словами, это происходит, если наши редкие события достаточно редки. Пусть

$$a_i = \int\limits_{\mathbf{R}^d} x\, U_i\{dx\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

и, при $d = 1$,

$$|\mathbf{a}|_2^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad |\mathbf{a}|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|,$$

$$\sigma_i^2 = (1 - p_i) \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - a_i)^2\, U_i\{dx\}, \quad B^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2,$$

Обозначим

$$H_1 = \prod_{i=1}^n F_i, \quad H_2 = \prod_{i=1}^n e(F_i), \quad H_3 = \prod_{i=1}^n E_{a_i} e(F_i E_{-a_i}). \tag{6}$$

Обычно хорошее приближение распределения H_1 задается распределением H_3. Но если оценивать близость выборки $\mathbf{X}$ к пуассоновскому точечному процессу $\mathbf{Y}$, мы интересуемся близостью распределений H_1 и H_2. Мы будем оценивать расстояния между H_1 и H_2, используя, что H_2 – распределение суммы

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\nu_i} f(X_{i,j}),$$

где $f(X_{i,j})$ и ν_i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots$, являются независимыми в совокупности случайными векторами и величинами с $\mathcal{L}(f(X_{i,j})) = F_i$, $\mathcal{L}(\nu_i) = e(E_1)$. Кроме того, $H_3 = \mathcal{L}(T - \Delta)$ с $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\nu_i - 1)$.

В настоящее время существует много результатов об обобщенной пуассоновской аппроксимации распределений $\prod_{i=1}^{n} F_i$, см. [3, 20] и библиографию в этих работах. Однако в большинстве этих результатов требуется, чтобы распределения F_i были подходящим образом центрированы. В общем случае лучшее приближение может быть получено при аппроксимации распределения H_1 обобщенным распределением Пуассона H_3 с центрирующими константами a_i.

Мы будем обсуждать оценки классических расстояний между распределениями H_1 и H_2 с остаточными членами, содержащими аддитивное слагаемое вида $c\,p$ for $d = 1$ или $c(d)\,p$ при $d \geqslant 1$. Наиболее естественный и важный результат такого типа дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть перечисленные выше условия выполнены при* $d \geqslant 1$ *и* $f(x) = 0$ *при всех* $x \in \mathfrak{X}_1$. *Тогда*

$$\rho\big(H_1,\, H_2\big) \leqslant c(d)\, p. \tag{7}$$

Теорема 1 является прямым следствием одного результата работы [18], дающего неравенство (7) в случае, когда

$$U_i = E, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

и V_i – произвольные распределения. При $d = 1$ это утверждение было получено ранее в работе [16]. Оно является уточнением результата Ле Кама [12], доказавшего одномерное утверждение с $p^{1/3}$ вместо p.

Аппроксимация выборки пуассоновским точечным процессом в условиях теоремы 1 обсуждалась в работе [20].

Неравенство (7) показывает, что разные выборки, содержащие редкие события с равномерно малыми p_i, близки друг к другу, если они имеют одинаковые (или близкие) меры $\sum_{i=1}^{n} p_i V_i$. Действительно, в этом случае они имеют одинаковые (или близкие) аппроксимирующие пуассоновские точечные процессы $\mathbf{Y}$. В случае одинаковых распределений V_i неравенство (7) может быть существенно уточнено и улучшено. Даже расстояние по вариации $d_{TV}\bigl(H_1, H_2\bigr)$ может быть оценено через $c\,p$ (Ю. В. Прохоров [15] в случае одинаковых p_i и Ле Кам [11] в случае произвольных p_i) и, более того, через $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \Big/ \max\{1, \sum_{i=1}^{n} p_i\}$ (Барбу и Холл [4]). Таким образом, при одинаковых V_i утверждение о близости наших процессов может быть существенно усилено. Однако редкие события далеко не всегда оказываются одинаково распределенными. Они подобны чрезвычайным происшествиям. Каждое из них уникально и имеет свое собственное индивидуальное распределение. Таким образом, неравенство (7) может быть полезным, например, в теории страхования для оценки вероятности того, что совокупное влияние факторов риска $f(X_j)$ не будет превышать фиксированные критические значения $x_1, \ldots, x_d$.

В следующих ниже теоремах 2–9 остаточные члены $c\,p$ или $c(d)\,p$ связаны с использованием в доказательствах теоремы 1.

Важность центрирования при приближении сопровождающими законами была открыта Ле Камом [12]. Он показал, что сопровождающие законы с центрированием (распределения H_3) обеспечивают точность приближения вида $c\,n^{-1/3}$ для распределений сумм n независимых одинаково распределенных случайных величин с абсолютной константой c без каких-либо предположений о распределении слагаемых. Та же точность была получена ранее А. Н. Колмогоровым [10] для приближения безгранично делимыми распределениями. Результаты Ле Кама показали, что сопровождающие законы достаточны для такой точности. Позднее Арак [1] получил оптимальную точность $c\,n^{-2/3}$ для безгранично делимой аппроксимации (историю проблемы можно найти в [2]). Безгранично делимая аппроксимация Арака гораздо сложнее, чем приближение сопровождающими законами. И. А. Ибрагимов и Э. Л. Пресман [8] показали, что оценка $c\,n^{-1/3}$ оптимальна при аппроксимации сопровождающими законами (см. [2], неравенство (1.3), с. 181)).

Ле Кам [12] рассматривал не только случай одинаково распределенных слагаемых, он получил оценки для точности приближения сопровождающими законами распределений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин – с центрированием и без него.

В примере 1 работы [7] рассмотрен случай, когда $F_1 = \cdots = F_n = F$, $\int |x|^3 \, F\{dx\} < \infty$, $a = \int x \, F\{dx\} \neq 0$ и $\sigma^2 = \int (x-a)^2 \, F\{dx\} > 0$. С помощью неравенства Берри–Эссеена в центральной предельной теореме было показано, что $\rho\big(H_1, \, H_2\big) \geqslant c \, \min\{1, \, a^2/\sigma^2\}$ для достаточно больших $n \geqslant n_0$. В примере 2 работы [7] было показано, что в вырожденном случае, например, если $F = E_1$, мы имеем $H_1 = E_n$ и $H_2 = e(nE_1)$, закон Пуассона с параметром n. Очевидно, что $\rho(E_n, e(nE_1)) \geqslant c$.

Таким образом, аппроксимация без центрирования не всегда приводит к успеху. Чтобы обеспечить качество такого приближения, нужны дополнительные предположения, такие как нулевое среднее, симметрия или наличие большого атома в нуле, см. работу [20] и библиографию в ней.

Однако следует отметить, что эти примеры вряд ли могут появиться в нашей схеме редких событий. Гораздо правдоподобнее то, что значения интересующей нас функции $f(x)$ окажутся намного больше при $x \in \mathfrak{X}_2$, чем при $x \in \mathfrak{X}_1$. Кроме того, хвосты распределений V_i обычно будут тяжелее, чем хвосты распределений U_i. Хорошо известно, что функции концентрации сверток распределений с тяжелыми хвостами убывают быстрее, чем у распределений с легкими хвостами. Это дает нам возможность ожидать, что функции концентрации распределений H_1, H_2, H_3 допускают хорошие оценки для остаточных членов в следующих ниже теоремах 3–6.

Ле Кам [12] исследовал точность аппроксимации сопровождающими законами без центрирования, доказав следующий результат (см. работу Ле Кама [13], теорема 2, с. 431).

Теорема 2. *Пусть перечисленные выше условия выполнены при $d = 1$ и, для некоторого $\tau > 0$,*

$$U_i\big\{\,[-\tau, \, \tau]\,\big\} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда

$$\rho\big(H_1, \, H_2\big) \leqslant c\,\big(p^{1/3} + \big(\big(1 + \tau^{-2}|\mathbf{a}|_2^2\big) D^{-2}(\tau)\big)^{1/3}\big),$$

где

$$D^2(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\big\{\,1, x^2\tau^{-2}\,\big\} F_i\{dx\}.$$

Применяя теорему 2 в случае $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мы получаем еще один результат Ле Кама [12], который содержит оценку точности приближения сопровождающими законами с центрированием, см. [13], теорема 1, с. 429.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *с* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. *Тогда*

$$\rho\bigl(H_1,\, H_2\bigr) \leqslant c\,\bigl(p^{1/3} + D^{-2/3}(\tau)\bigr).$$

Для доказательства достаточно заметить, что распределения $F_i E_{-a_i}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 с $a_i = 0$ и с заменой τ на 2τ.

Утверждение следствия 1 было уточнено И. А. Ибрагимовым и Э. Л. Пресманом [8]. А. Ю. Зайцев [17, 19] доказал следующую ниже теорему 3, которая уточняет и обобщает утверждение следствия 1. Для формулировки этой теоремы нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Следуя работам [9] и [14], введем класс $\mathcal{G}$ вещественнозначных функций $g(\cdot)$ на $\mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям

а) $g(\cdot)$ – неотрицательная четная функция, которая строго положительна при $x \neq 0$ и не убывает при $x \geqslant 0$.

б) функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

Теорема 3 ([19]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *без условия* (9). *Пусть* $g \in \mathcal{G}$. *Обозначим*

$$\beta_i = \beta_i(g) = (1-p_i)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a_i)^2\, g(x-a_i)\, U_i\{dx\} < \infty,$$

$$\beta = \beta(g) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i(g).$$

Определим $\lambda = \lambda(g) = \min\bigl\{B, \frac{\beta(g)}{B\,g(B)}\bigr\}$, *если* $B^2 > 0$, *и* $\lambda = 0$ *в противном случае. Пусть* $B^2 > 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\rho\bigl(H_1,\, H_3\bigr) &\leqslant c\,\bigl(p + \min\bigl\{Q(H_1,\lambda), Q(H_3,\lambda)\bigr\}\bigr)\\ &\asymp p + \frac{\lambda}{B}\,Q\Bigl(\prod_{i=1}^{n} e\bigl(p_i\,V_i\,E_{-a_i}\bigr), B\Bigr).\end{aligned} \tag{10}$$

Если $B^2 = 0$, *то* $\rho\bigl(H_1,\, H_3\bigr) \leqslant cp$.

Можно показать, что при условии (9) $Q(H_3, \lambda) \leqslant c\,(p + D^{-1}(\tau))$, см. [7]. Поэтому теорема 3 лучше по порядку оценки, чем следствие 1. Основной результат работы [17] является частным случаем теоремы 3 с $g(x) \equiv |x|$. Оптимальность утверждения теоремы 3 была проанализирована в работе [7, примеры 3 и 4].

Теорема 3 является основным инструментом при доказательстве основных результатов статьи [7], теорем 4–7, которые уточняют утверждение теоремы 2, см. обсуждение в работе [7].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда*

$$\rho\big(H_1,\, H_2\big) \leqslant c\,\big(p + \mathbf{P}\big\{\,|\Delta| > \gamma\big\} + \min_{1\leqslant k\leqslant 3} Q(H_k, \gamma)\big),$$

for any $\gamma \geqslant \lambda$, *где* $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\nu_i - 1)$ *и* ν_i *являются независимыми в совокупности пуассоновскими случайными величинами с параметром* 1.

Частный случай теоремы 4, возникающий при $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, влечет неравенство (10). Следующие ниже теоремы 5–7 являются простыми последовательными следствиями теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любого* $\varkappa \geqslant \lambda$,

$$\rho\big(H_1,\, H_2\big) \leqslant c\,\big(p + (1 + |\mathbf{a}|_2\,\varkappa^{-1}\sqrt{\delta} + |\mathbf{a}|_\infty\,\varkappa^{-1}\delta)\,q\big),$$

где $q = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant 3} Q(H_k, \varkappa)$ *и* $\delta = \log\big(1 + \varkappa\, q^{-1} {|\mathbf{a}|_2}^{-1}\big)$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\rho\big(H_1,\, H_2\big) \leqslant c\,\big(p + (1 + |\mathbf{a}|_2\,\tau^{-1}\sqrt{s} + |\mathbf{a}|_\infty\,\tau^{-1}s)\,Q\,\big),$$

где $Q = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant 3} Q(H_k, \tau)$ *и* $s = \log\big(1 + \tau\, Q^{-1} {|\mathbf{a}|_2}^{-1}\big)$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\rho\big(H_1,\, H_2\big) \leqslant c\,\big(p + (1 + |\mathbf{a}|_2\,\tau^{-1}\sqrt{r} + |\mathbf{a}|_\infty\,\tau^{-1}r)\,D^{-1}(\tau)\big),$$

где $r = \log\big(1 + \tau\, D(\tau)\, {|\mathbf{a}|_2}^{-1}\big)$.

Теорема 7 лучше по порядку, чем теорема 2 (ясно, что $|\mathbf{a}|_\infty \leqslant |\mathbf{a}|_2$). Теоремы 4–6 дают более точные оценки.

Обратимся, наконец, к результату о сильной аппроксимации сумм независимых случайных векторов векторами с безгранично делимыми распределениями. Следующая ниже теорема 8 является следствием основного результата работы [18], леммы A из работы Беркеша и Филиппа [5] и теоремы Штрассена–Дадли (см. работу Р. Дадли [6]). Нормы в пространстве $\mathbf{R}^d$ обозначаются $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (2)–(6) *при* $d \geqslant 1$, *и пусть, для некоторого* $\tau \geqslant 0$,

$$U_i\left\{\left\{x \in \mathbf{R}^d : \|x\|_2 \leqslant \tau\right\}\right\} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а $V_i \in \mathfrak{F}_d$ *– произвольные распределения. Тогда, для каждого фиксированного* $\lambda > 0$, *случайные векторы* S, T *и* Δ *могут быть построены на одном и том же вероятностном пространстве таким образом, что*

$$\mathcal{L}(S) = H_1, \qquad \mathcal{L}(T) = H_2, \qquad \mathcal{L}(T - \Delta) = H_3,$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n (\nu_i - 1)\, a_i$, *а* ν_i *являются независимыми в совокупности пуассоновскими случайными величинами с параметром* 1, *и*

$$\mathbf{P}\bigl\{\|S - T + \Delta\|_2 > \lambda\bigr\} \leqslant c(d)\,\Bigl(p + \exp\Bigl(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Bigr)\Bigr) + \sum_{i=1}^n p_i^2. \qquad (11)$$

Более того, при всех $x \in \mathbf{R}^d$ *и* $\lambda > 0$,

$$H_1(x) \leqslant H_3(x + \lambda \cdot \mathbf{1}) + c(d)\,\Bigl(p + \exp\Bigl(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Bigr)\Bigr), \qquad (12)$$

$$H_3(x) \leqslant H_1(x + \lambda \cdot \mathbf{1}) + c(d)\,\Bigl(p + \exp\Bigl(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Bigr)\Bigr), \qquad (13)$$

где $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^d$ *и* $c(d)$ *зависит только от* d. *Если распределения* V_i *одинаковы, то слагаемое* $\sum_{i=1}^n p_i^2$ *в* (11) *можно отбросить.*

Теорема 8 влечет следующие утверждения о близости распределений H_1 и H_2.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8. *Тогда*

$$\mathbf{P}\bigl\{\|S - T\|_2 > 2\,\lambda\bigr\} \leqslant c(d)\,\Bigl(p + \exp\Bigl(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Bigr)\Bigr) + \sum_{i=1}^n p_i^2 + \mathbf{P}\bigl\{\|\Delta\|_2 \geqslant \lambda\bigr\}. \qquad (14)$$

Если распределения V_i одинаковы, то слагаемое $\sum_{i=1}^n p_i^2$ в (14) *можно отбросить. Кроме того, при всех $x \in \mathbf{R}^d$ и $\lambda > 0$,*

$$H_1(x) \leqslant H_2(x+2\,\lambda\cdot\mathbf{1})+c(d)\,\Big(p+\exp\Big(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Big)\Big)+\mathbf{P}\big\{\|\Delta\|_\infty \geqslant \lambda\big\}, \quad (15)$$

$$H_2(x) \leqslant H_1(x+2\,\lambda\cdot\mathbf{1})+c(d)\,\Big(p+\exp\Big(-\frac{\lambda}{c(d)\,\tau}\Big)\Big)+\mathbf{P}\big\{\|\Delta\|_\infty \geqslant \lambda\big\}. \quad (16)$$

Используя неравенство Бернштейна, мы доказали в [7], что при $d=1$

$$\mathbf{P}\big\{\,|\Delta| \geqslant \gamma\,\big\} \leqslant 2\,\max\big\{e^{-\gamma^2/4|\mathbf{a}|_2^2},\ e^{-\gamma/4|\mathbf{a}|_\infty}\big\}, \quad (17)$$

для любого $\gamma \geqslant 0$. Это неравенство можно использовать для оценки правых частей неравенств (14)–(16). При $d > 1$ мы можем применять неравенство (17) покоординатно.

Литература

1. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 2 (1981), 225–245.
2. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 214 с.
3. A. D. Barbour, O. Chryssaphinou, *Compound Poisson approximation: a user's guide.* — Ann. Appl. Probab. **33** (2001), 727–750.
4. A. D. Barbour, P. Hall, *On the rate of Poisson convergence.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95** (1984), 473–480.
5. I. Berkes, W. Philipp, *Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.* — Ann. Probab. **7** (1979), 29–54.
6. R. M. Dudley, *Distances of probability measures and random variables.* — Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1563–1572.
7. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Approximation of convolutions by accompanying laws without centering.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **320** (2004), 44–53.
8. И. А. Ибрагимов, Э. Л. Пресман, *О скорости сближения распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 753–766.
9. M. Katz, *Note on the Berry–Esseen theorem.* — Ann. Math. Statist. **34**, No. 4 (1963), 1107–1108.
10. А. Н. Колмогоров, *О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями.* — Труды Московск. матем. об-ва **12** (1963), 437–451.
11. L. Le Cam, *An approximation theorem for Poisson binomial distribution.* — Pacific J. Math. **10** (1960), 1181–1197.
12. L. Le Cam, *On the distribution of sums of independent random variables.* — In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume), pp. 179–202, Berlin, Springer, 1965.

13. L. Le Cam, *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory.* Springer, Berlin, 1986.
14. В. В. Петров, *Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона.* — Докл. АН СССР **160**, No. 5 (1965), 1013–1015.
15. Ю. В. Прохоров, *Асимптотическое поведение биномиального распределения.* — Успехи матем. наук **8** (1953), 135–142.
16. А. Ю. Зайцев, *О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов.* — Теория вероятн. и ее примен. **28** (1983), 625–636.
17. А. Ю. Зайцев, *О равномерной аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **32** (1987), 45–52.
18. А. Ю. Зайцев, *Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **34** (1989) 128–151.
19. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток вероятностных распределений безгранично делимыми законами при ослабленных моментных ограничениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **194** (1992), 79–90.
20. А. Ю. Зайцев, *Об аппроксимации выборки пуассоновским точечным процессом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 111–125.

Götze F., Zaitsev A. Yu. Rare events and Poisson point processes.

The aim of the present work is to show that the results obtained earlier on the approximation of distributions of sums of independent terms by the accompanying compound Poisson laws may be interpreted as substantial quantitative estimates for the closeness between the sample containing independent observations of rare events and the Poisson point process which is obtained after a Poissonization of the initial sample.

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld, Germany
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

Поступило 5 декабря 2017 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023;
Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru