Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

Е. С. Гарай

О СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ К УСТОЙЧИВОМУ ПРОЦЕССУ

1. Введение

В последнее десятилетие стало актуальным математическое моделирование работы компьютерных систем на базе высокоскоростных соединений, таких как интернет. Развиты математические модели, которые описывают динамику во времени и в пространстве различных нагрузок системы, создаваемых потоком вызовов. При описании поведения нагрузки системы в макроскопической временной шкале возникает широкий спектр аппроксимационных результатов, причем особенности предельных процессов, как правило, определяются тяжестью хвостов распределений величины нагрузки и времени обслуживания отдельных вызовов. Описанная ниже математическая модель интересна тем, что в зависимости от моментных характеристик упомянутых величин возникают самые разные предельные процессы. При сильной загруженности системы в пределе возникает дробное броуновское движение или устойчивый процесс с зависимыми приращениями, названный Telecom-процессом. При слабом режиме загруженности системы в пределе получаются устойчивые процессы с однородными независимыми приращениями (процессы Леви), в том числе броуновское движение. При переходном режиме загруженности системы в пределе имеем переходный Telecom-процесс. Основополагающей работой в этой области является статья И. Кая и М. С. Такку [1]. Подробное изложение рассматриваемой математической модели можно найти в монографии М. А. Лифшица [2].

В настоящее время существуют обобщения подобных моделей на поля (см., например, [3–5]). Подобные обобщения находят приложение во многих задачах.

Ключевые слова: модель системы обслуживания, процесс суммарной нагрузки, многомерный ресурс, многомерный устойчивый процесс, сходимость конечномерных распределений.

Особенность данной работы состоит в предположении, что в системе потребляется *многомерный* ресурс, что может пониматься как множество разных типов потребляемых системой ресурсов, при этом каждому типу ресурса сопоставляется соответствующая координата. Основной результат работы – теорема о сходимости конечномерных распределений процесса суммарной нагрузки с многомерным ресурсом к соответствующим распределениям многомерного устойчивого процесса.

§2. Описание математической модели системы обслуживания

Остановимся подробнее на математическом описании изучаемой системы обслуживания.

Предположим, что ресурс системы неограничен, то есть при функционировании системы не возникает очередей и отказов. Также полагаем, что время нахождения абонента в системе и занимаемый им ресурс независимы. Времена начальных моментов обслуживания поступающих вызовов (заявок) представляют собой моменты скачков пуассоновского случайного процесса, заданного на всей временной оси. Каждое обслуживание длится случайный отрезок времени и включается в общую нагрузку. В рассматриваемой системе обслуживание может происходить в разных скоростных режимах. Для учета этого обстоятельства вводится случайная величина, характеризующая суммарный ресурс, потребляемый в течение всего периода обслуживания.

Введем величины U_k, $k \in \mathbb{Z}$, – длительность обслуживания вызова, независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с конечными средними, и $\vec{R}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, – ресурс, потребляемый вызовом, независимые одинаково распределенные n-мерные случайные векторы с неотрицательными компонентами и конечными средними.

Вызовы происходят в точках, описываемых пуассоновской случайной мерой $N(dt)$ интенсивности $\lambda > 0$. Эти точки соответствуют моментам скачков двустороннего процесса Пуассона, который можно представить следующим образом: при $t \geqslant 0$

$$N(t) := \max\Big\{l > 0 : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\}\mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

а при $t \leqslant 0$

$$N(t) := \min\Big\{l < 0 : \sum_{k=l}^{-1} \tau_k < -t\Big\} \mathbb{1}_{[0,-t)}(\tau_{-1}),$$

где τ_k, $k = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Теперь выразим интересующие нас характеристики системы обслуживания через интеграл Стилтьеса по двустороннему пуассоновскому процессу $N(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Пусть n-мерные случайные векторы $\vec{R}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, случайные величины U_k, $k \in \mathbb{Z}$, и процесс $N(t)$, $t \in \mathbf{R}$, независимы. Мгновенная нагрузка на систему в момент времени ρ определяется следующим образом:

$$\vec{M}(\rho) := \int\limits_{\mathbf{R}} \vec{R}_{N(s)} \mathbb{1}_{[s,s+U_{N(s)}]}(\rho)\, dN(s),$$

а интегральная нагрузка на систему на интервале времени $[0, t]$ задается выражением

$$\vec{I}(t) := \int\limits_0^t \vec{M}(\rho)\, d\rho = \int\limits_{\mathbf{R}} \vec{R}_{N(s)} \ell_t(s, U_{N(s)})\, dN(s), \tag{2.1}$$

где $\ell_t(s,u) := |[s, s+u] \cap [0,t]|$, $u \geqslant 0$. Здесь $|\cdot|$ обозначает длину интервала.

В силу формулы

$$\mathbf{E}\int\limits_{-q}^t f(s, \vec{Y}_{N(s)})\, dN(s) = \lambda \int\limits_{-q}^t \mathbf{E} f(s, \vec{Y}_1)\, ds, \tag{2.2}$$

где $\vec{Y}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса N, среднее мгновенной нагрузки имеет вид:

$$\mathbf{E}\vec{M}(\rho) = \lambda \int\limits_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbb{1}_{[s,s+U_1]}(\rho)\, ds = \lambda \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbf{E} U_1.$$

Здесь мы применяем (2.2) и используем предел при $q \to \infty$ и $t \to \infty$. Поэтому

$$\mathbf{E}\vec{I}(t) = \lambda t \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbf{E} U_1.$$

Работа посвящена изучению предельного поведения центрированного и нормированного процесса интегральной нагрузки

$$\vec{Z}_a(t) := a^{-1/\delta}\Big(\vec{I}(at) - \lambda at\mathbf{E}\vec{R}_1\mathbf{E}U_1\Big) \tag{2.3}$$

при $a \to \infty$. Показатель $\delta \in (1,2]$ выбирается в зависимости от условий, накладываемых на распределения величин $\vec{R}_1$ и U_1.

§3. Сходимость к устойчивому процессу

Пусть S_1^+ – область единичной сферы в $\mathbf{R}^n$ с неотрицательными координатами. Пусть $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}([0,\infty))$, – распределение случайной величины $|\vec{R}_1|$ и D – носитель этого распределения. Будем предполагать, что при $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}$-почти всех $r \in D$ определено (см. [6, §7]) условное распределение

$$\mathcal{P}_r(\Theta) := \mathbf{P}\Big(\frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|} \in \Theta\Big| |\vec{R}_1| = r\Big), \qquad \Theta \in \mathcal{B}(S_1^+), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{B}(S_1^+)$ – борелевская σ-алгебра на S_1^+.

Теорема 3.1. *Предположим, что при $r \to \infty$ и $u \to \infty$*

$$\mathbf{P}(|\vec{R}_1| \geqslant r) \sim \frac{c_r}{r^\delta}, \qquad \mathbf{P}(U_1 \geqslant u) \sim \frac{c_u}{u^\gamma}, \tag{3.2}$$

где $1 < \delta < \gamma \leqslant 2$. Пусть при $r \to \infty$ распределения $\mathcal{P}_r$ слабо сходятся к некоторому распределению Λ, заданному на σ-алгебре $\mathcal{B}(S_1^+)$, т.е.

$$\mathcal{P}_r(\cdot) \Rightarrow \Lambda(\cdot). \tag{3.3}$$

Тогда конечномерные распределения процесса $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, сходятся при $a \to \infty$ к конечномерным распределениям многомерного устойчивого процесса, логарифм характеристической функции которого имеет вид

$$\ln(\varphi(\vec{\beta})) = -t\lambda c_r\mathbf{E}U_1^\delta\frac{\Gamma(2-\delta)}{(\delta-1)}\Big|\cos\big(\tfrac{\pi\delta}{2}\big)\Big|\int\limits_{\vec{s}\in S_1^+}|(\vec{\beta},\vec{s})|^\delta\big(1+i\,\mathrm{sign}(\vec{\beta},\vec{s})\,\mathrm{tg}\,\big(\tfrac{\pi\delta}{2}\big)\big)\Lambda(d\vec{s}).$$

Замечание 3.1 В данной теореме рассматривается область параметров $1 < \delta < \gamma \leqslant 2$, при которых хвосты распределения величины $\vec{R}_1$ тяжелее аналогичных хвостов распределения величины U_1. Такая ситуация приводит к появлению процессов обслуживания, требующих большого количества ресурсов, т.е. ресурсы доминируют и определяют предельное поведение нагрузки.

Доказательство теоремы 3.1. В силу (3.2) справедливы соотношения (см. [2, с. 230])

$$\mathbf{E}U_1^{\gamma'} < \infty, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{P}(|\vec{R}_1| \geqslant v) \leqslant \frac{C}{v^\delta} \tag{3.5}$$

при всех всех $\delta < \gamma' < \gamma$, $v > 0$ и некотором $C > 0$. Положим $V_1 := |\vec{R}_1|U_1$. Тогда при предположении (3.2)

$$\mathbf{P}(V_1 \geqslant v) \leqslant \frac{C}{v^\delta} \quad \text{при} \quad v > 0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{P}(V_1 \geqslant v) \sim \frac{c_r \mathbf{E}U_1^\delta}{v^\delta} \quad \text{при} \quad v \to \infty. \tag{3.7}$$

Для доказательства сходимости конечномерных распределений преобразуем интегральную нагрузку. Разложим процесс $\vec{I}(t)$ на составляющие, выделив главную часть и части, вклад которых в предельное поведение после нормировки будет пренебрежимо мал. При этом учтем, что (3.4) влечет выполнение условия $\mathbf{E}U_1^\delta < \infty$. Функцию $\ell_t(s,u)$ запишем в виде суммы

$$\ell_t(s,u) = \ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) + \ell_t(s,u)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u). \tag{3.8}$$

Второе слагаемое в (3.8) обозначим $\ell_t^{(4)}(s,u)$.

Первое из этих слагаемых можно представить в следующем виде:

$$\ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) = u\mathbb{1}_{[0,t]}(s) - u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u) + \mathbb{1}_{[-u,0]}(s)(s+u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)$$
$$- \mathbb{1}_{[t-u,t]}(s)(s+u-t)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) =: \sum_{j=0}^{3} \ell_t^{(j)}(s,u). \tag{3.9}$$

При фиксированных u и t график первого слагаемого в (3.8) представляет собой трапецию высоты u, нижнее основание которой является отрезком $[-u,t]$, а верхнее – отрезком $[0, t-u]$. Основная цель разбиения (3.9) состоит в выделении первых двух слагаемых, которые являются ступенчатыми функциями от s. Это делается с помощью трансформации трапеции в прямоугольник. При этом главное значение в (3.9) будет иметь первое слагаемое $u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$, в котором нет ограничения на значение параметра u.

Сходимость одномерных распределений векторного процесса $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, будет следовать из сходимости характеристических функций

$$\varphi_a(\vec{\beta}) := \mathbf{E} \exp\big(i(\vec{\beta}, \vec{Z}_a(t))\big), \qquad \vec{\beta} \in \mathbf{R}^n.$$

Обозначим $\widetilde{R}_k := (\vec{\beta}, \vec{R}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(\vec{\beta}, \vec{I}(t)) = \sum_{j=0}^{4} \int\limits_{\mathbf{R}} \widetilde{R}_{N(s)} \ell_t^{(j)}(s, U_{N(s)})\, dN(s) =: \sum_{j=0}^{4} I_j(t).$$

Слагаемое

$$I_0(t) = \int\limits_0^t \widetilde{R}_{N(s)} U_{N(s)}\, dN(s) = \sum_{k=1}^{N(t)} \widetilde{R}_k U_k, \quad t \geqslant 0,$$

является сложным процессом Пуассона, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mathbf{E} \exp\big(i\beta I_0(t)\big) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{E} \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{l} \widetilde{R}_k U_k\Big) \frac{(\lambda t)^l}{l!}\, e^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \big(\mathbf{E} e^{i\beta \widetilde{R}_1 U_1}\big)^l \frac{(\lambda t)^l}{l!}\, e^{-\lambda t} = \exp\Big(\lambda t \big(\mathbf{E} e^{i\beta \widetilde{R}_1 U_1} - 1\big)\Big), \quad \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

Именно слагаемое $I_0(t)$, $t \geqslant 0$, будет при $a \to \infty$ давать основной вклад в асимптотическое поведение процесса $\vec{Z}_a(t)$. Для того, чтобы убедиться в этом, оценим абсолютные моменты величин $I_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, принимая во внимание (3.4). Имеем в силу (2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|I_1(t)| &\leqslant |\vec{\beta}| \mathbf{E} \int\limits_0^t |\vec{R}_{N(s)}| U_{N(s)} \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_{N(s)})\, dN(s) \\ &= |\vec{\beta}| \lambda \int\limits_0^t \mathbf{E}(|\vec{R}_1| U_1 \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1))\, ds = |\vec{\beta}| \lambda t\, \mathbf{E}|\vec{R}_1|\, \mathbf{E}(U_1 \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)) \\ &\leqslant |\vec{\beta}| \lambda t^{2-\delta}\, \mathbf{E}|\vec{R}_1|\, \mathbf{E} U_1^{\delta}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathbf{E}|I_2(t)| \leqslant |\vec{\beta}| \mathbf{E}|\vec{R}_1| \lambda \int\limits_{\mathbf{R}} \mathbf{E}((s + U_1) \mathbb{1}_{[0,t]}(U_1) \mathbb{1}_{[-U_1,0]}(s))\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |\vec\beta|\lambda\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}(U_1^2\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)) \leqslant |\vec\beta|\lambda t^{2-\delta}\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}U_1^\delta,\\
\mathbf{E}|I_3(t)| &\leqslant |\vec\beta|\mathbf{E}|\vec R_1|\lambda\int_{\mathbf{R}}\mathbf{E}((s+U_1-t)\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)\mathbb{1}_{[t-U_1,t]}(s))\,ds\\
&\leqslant |\vec\beta|\lambda\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}(U_1^2\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)) \leqslant |\vec\beta|\lambda t^{2-\delta}\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}U_1^\delta,\\
\mathbf{E}|I_4(t)| &\leqslant |\vec\beta|\mathbf{E}|\vec R_1|\lambda t\int_{\mathbf{R}}\mathbf{E}(\mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)\mathbb{1}_{[-U_1,t]}(s))\,ds\\
&= |\vec\beta|\lambda\,\mathbf{E}|\vec R_1|t\,\mathbf{E}((t+U_1)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)) \leqslant 2|\vec\beta|\lambda t^{2-\delta}\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}U_1^\delta.
\end{aligned}
$$

В результате получаем, что при $j=1,\dots,4$

$$
a^{-1/\delta}\mathbf{E}|I_j(at)| \leqslant 2|\vec\beta|\lambda t^{2-\delta}\,\mathbf{E}|\vec R_1|\,\mathbf{E}U_1^\delta\,a^{-(\delta-1)^2/\delta}.
$$

Поэтому при $a\to\infty$ величины $a^{-1/\delta}I_j(at)$ стремятся в среднем к нулю и не влияют на предельное поведение характеристической функции $\varphi_a(\vec\beta)$. Следовательно, они не влияют на сходимость конечномерных распределений процесса $\vec Z_a(t)$, $t\geqslant 0$.

Таким образом, наша задача сводится к изучению предельного поведения процесса

$$
\widetilde Z_a^\circ(t) := a^{-1/\delta}\big(I_0(at)-\lambda at\,\mathbf{E}\widetilde R_1\,\mathbf{E}U_1\big).
$$

Поскольку сложный процесс Пуассона $I_0(at)$ является однородным процессом с независимыми приращениями, то для сходимости конечномерных распределений процесса $\widetilde Z_a^\circ(t)$, $t\geqslant 0$, достаточно установить (см., например, [7, стр. 36]) сходимость одномерных распределений. В результате, наша задача трансформируется в задачу изучения предельного поведения характеристической функции

$$
\begin{aligned}
\widetilde\varphi_a(\vec\beta) &:= \mathbf{E}\exp\big(ia^{-1/\delta}\big(I_0(at)-\lambda at\,\mathbf{E}\widetilde R_1\,\mathbf{E}U_1\big)\big)\\
&= \mathbf{E}\exp\Bigg(ia^{-1/\delta}\Bigg(\sum_{k=1}^{N(at)}\widetilde R_kU_k-\lambda at\,\mathbf{E}\widetilde R_1\,\mathbf{E}U_1\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Согласно (3.10)

$$
\widetilde\varphi_a(\vec\beta) = \exp\Big(\lambda at\,\mathbf{E}\big(e^{ia^{-1/\delta}\widetilde R_1U_1}-1-ia^{-1/\delta}\widetilde R_1U_1\big)\Big). \tag{3.11}
$$

Формула (3.11) является основной для дальнейшего изучения предельного поведения интегральной нагрузки.

Пусть $\{\vec{\theta}_r\}_{r\geqslant 0}$ – такое семейство случайных величин, зависящее от параметра $r\in D$, где D – носитель распределения $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}$, что при любом r случайная величина $\vec{\theta}_r$ имеет распределение $\mathcal{P}_r$.

Применяя (3.11), получим

$$\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}) = \exp\Bigg(\lambda a t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big\{\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{R}_1)u}-1$$
$$-\,i\frac{(\vec{\beta},\vec{R}_1)u}{a^{1/\delta}}\Big)\Big||\vec{R}_1|=r\Big\}dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)\Bigg) \tag{3.12}$$
$$=\exp\Bigg(\lambda a t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}_r)ru}-1-i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}_r)ru}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)\Bigg).$$

Здесь и далее $F_X(x)$, $x\geqslant 0$, – функция распределения неотрицательной случайной величины X.

Пусть $\vec{\theta}$ – случайная величина с распределением $\Lambda(\cdot)$. По условию теоремы (см. (3.3))распределения величин $\vec{\theta}_r$ сходятся при $r\to\infty$ к распределению величины $\vec{\theta}$. По лемме Скорохода (см. [8, стр. 14]) отсюда следует, что на некотором новом вероятностном пространстве можно построить такие случайные величины $\vec{\theta}'_r$, $\vec{\theta}'$, которые имеют такие же распределения, как у величин $\vec{\theta}_r$, $\vec{\theta}$ соответственно, и $\vec{\theta}'_r\to\vec{\theta}'$ при $r\to\infty$ по вероятности. Так как норма этих величин равна единице, то это влечет, что

$$\mathbf{E}|\vec{\theta}'_r-\vec{\theta}'|\to 0 \qquad \text{при } r\to\infty. \tag{3.13}$$

Выберем сколь угодно малое $\varepsilon>0$, и для логарифма характеристической функции $\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta})$ напишем разложение

$$\frac{\ln(\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}))}{\lambda t} = a\int\limits_0^{a^{1/\delta}\varepsilon}\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru}-1-i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$
$$+a\int\limits_{a^{1/\delta}\varepsilon}^\infty\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru}-e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}-i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r-\vec{\theta}')ru}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$
$$+a\int\limits_{a^{1/\delta}\varepsilon}^\infty\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}-1-i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)=:J_1+J_2+J_3.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в этом разложении.

Применяя неравенство $|e^{ix}-1-ix|\leqslant 2|x|^{\gamma'}$, при $\delta<\gamma'<\gamma$ получим, что для величины J_1 справедлива оценка:

$$|J_1|\leqslant 2a\int\limits_0^{a^{1/\delta}\varepsilon}\int\limits_0^{\infty}\mathbf{E}(a^{-1/\delta}|(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)|ru)^{\gamma'}\,dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$\leqslant 2|\vec{\beta}|^{\gamma'}\mathbf{E}U_1^{\gamma'}a\int\limits_0^{a^{1/\delta}\varepsilon}(a^{-1/\delta}r)^{\gamma'}\,dF_{|\vec{R}_1|}(r).$$

Делая замену переменной $a^{-1/\delta}r=z$, используя формулу интегрирования по частям и (3.5), получим

$$|J_1|\leqslant -2|\vec{\beta}|^{\gamma'}\mathbf{E}U_1^{\gamma'}a\int\limits_0^{\varepsilon}z^{\gamma'}d\big(1-F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z)\big)$$

$$=-2|\vec{\beta}|^{\gamma'}\mathbf{E}U_1^{\gamma'}a\bigg(\varepsilon^{\gamma'}\big(1-F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}\varepsilon)\big)-\gamma'\int\limits_0^{\varepsilon}z^{\gamma'-1}\big(1-F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z)\big)\,dz\bigg)$$

$$\leqslant 2C|\vec{\beta}|^{\gamma'}\mathbf{E}U_1^{\gamma'}\gamma'\int\limits_0^{\varepsilon}z^{\gamma'-\delta-1}\,dz=C|\vec{\beta}|^{\gamma'}\mathbf{E}U_1^{\gamma'}\varepsilon^{\gamma'-\delta}\frac{2\gamma'}{\gamma'-\delta},$$

где константа C взята из оценки (3.5). В силу выбора ε величина J_1 является сколь угодно малой.

Для J_2, ввиду неравенства $|e^{iy}-e^{ix}|\leqslant|y-x|$, очевидна следующая оценка:

$$|J_2|\leqslant 2a\int\limits_{a^{1/\delta}\varepsilon}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}a^{-1/\delta}\mathbf{E}|(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)-(\vec{\beta},\vec{\theta}')|ru\,dF_{U_1}(u)\,dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$\leqslant 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1a\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathbf{E}|\vec{\theta}'_{a^{1/\delta}z}-\vec{\theta}'|z\,dF_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z).$$

В силу (3.13) для любого сколь угодно малого $\eta>0$ существует такое $r_0>0$, что для всех $r\geqslant r_0$ выполняется оценка $\mathbf{E}|\vec{\theta}'_r-\vec{\theta}'|<\eta$. Тогда для всех $z\geqslant\varepsilon$ и $a\geqslant(r_0/\varepsilon)^{\delta}$ имеем $a^{1/\delta}z\geqslant r_0$. При таких a и z выполняется оценка $\mathbf{E}|\vec{\theta}'_{a^{1/\delta}z} - \vec{\theta}'| < \eta$, применяя которую, получаем

$$|J_2| \leqslant 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta a\int_\varepsilon^\infty z\,dF_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z) = -2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta a\int_\varepsilon^\infty z\,d\big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z)\big)$$

$$= 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta\bigg(a\varepsilon\big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}\varepsilon)\big) + a\int_\varepsilon^\infty \big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\delta}z)\big)\,dz\bigg)$$

$$\leqslant 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta\bigg(C\varepsilon^{1-\delta} + C\int_\varepsilon^\infty \frac{dz}{z^\delta}\bigg) = 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1 C\eta\varepsilon^{1-\delta}\frac{\delta}{\delta - 1},$$

где константа C взята из оценки (3.5). По заданному ε мы выберем η так, чтобы $\eta\varepsilon^{1-\delta}$ было сколь угодно малым.

Рассмотрим последнее слагаемое J_3. Воспользуемся следующим представлением:

$$J_3 = -a\int_0^{a^{1/\delta}\varepsilon}\int_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$+ a\int_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\delta}(\vec{\beta},\vec{\theta}')v} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')v}{a^{1/\delta}}\Big)dF_{V_1}(v) =: -J_3^1 + J_3^2.$$

Слагаемое J_3^1 оценивается точно так же, как J_1, и эта оценка является сколь угодно малой величиной. Для J_3^2 после замены переменной $a^{-1/\delta}v = z$ напишем представление

$$J_3^2 = a\int_0^\varepsilon \mathbf{E}\big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)dF_{V_1}(a^{1/\delta}z)$$

$$+ a\int_\varepsilon^\infty \mathbf{E}\big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)dF_{V_1}(a^{1/\delta}z) =: J_3' + J_3''.$$

С учетом неравенства (3.6) слагаемое J_3' оценивается точно так же, как J_1. При этом можно взять $\gamma' = 2$, так как не требуется наличия соответствующего момента у величины U_1. К интегралу

$$J_3'' = -\mathbf{E}\int_\varepsilon^\infty \big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)\,a\,d\big(1 - F_{V_1}(a^{1/\delta}z)\big)$$

можно применить вторую теорему Хелли (см. [9, стр. 211]) , так как согласно (3.7)

$$a(1 - F_{V_1}(a^{1/\delta} z)) \sim \frac{c_r \mathbf{E} U_1^\delta}{z^\delta} \quad \text{при} \quad a \to \infty.$$

В результате получим, что

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} J_3'' &= c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \mathbf{E} \int\limits_\varepsilon^\infty \left(e^{i(\vec\beta, \vec\theta')z} - 1 - i(\vec\beta, \vec\theta')z\right) \frac{dz}{z^{\delta+1}} \\
&= c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \int\limits_{\vec s \in S_1^+} \int\limits_0^\infty \left(e^{i(\vec\beta, \vec s)z} - 1 - i(\vec\beta, \vec s)z\right) \frac{dz}{z^{\delta+1}} \Lambda(d\vec s) \\
&- c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \mathbf{E} \int\limits_0^\varepsilon \left(e^{i(\vec\beta, \vec\theta')z} - 1 - i(\vec\beta, \vec\theta')z\right) \frac{dz}{z^{\delta+1}}.
\end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое оценивается величиной

$$|\vec\beta|^2 c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \int\limits_0^\varepsilon z^2 \frac{dz}{z^{\delta+1}} = |\vec\beta|^2 c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \frac{\varepsilon^{2-\delta}}{2-\delta}.$$

За счет выбора ε это слагаемое может быть сделано сколь угодно малым.

В результате проведенных вычислений мы получили, что

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\ln(\widetilde\varphi_a(\vec\beta))}{\lambda t} = c_r \mathbf{E} U_1^\delta \delta \int\limits_{\vec s \in S_1^+} \int\limits_0^\infty \left(e^{i(\vec\beta, \vec s)z} - 1 - i(\vec\beta, \vec s)z\right) \frac{dz}{z^{\delta+1}} \Lambda(d\vec s). \quad (3.14)$$

Рассматривая отдельно области $(\vec\beta, \vec s) > 0$ и $(\vec\beta, \vec s) < 0$ и принимая во внимание хорошо известные формулы (см., например, [10, стр. 46])

$$\int\limits_0^\infty (e^{ix} - 1 - ix) \frac{dx}{x^{1+\delta}} = e^{i\pi\delta/2} \frac{\Gamma(2-\delta)}{\delta(\delta-1)},$$

$$\int\limits_0^\infty (e^{-ix} - 1 + ix) \frac{dx}{x^{1+\delta}} = e^{-i\pi\delta/2} \frac{\Gamma(2-\delta)}{\delta(\delta-1)},$$

получим, что

$$\int_0^\infty \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{s})z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{s})z\right)\frac{dz}{z^{\delta+1}}$$
$$= \frac{\Gamma(2-\delta)}{\delta(\delta-1)}|(\vec{\beta},\vec{s})|^\delta\Big(\cos\left(\frac{\pi\delta}{2}\right) + i\,\mathrm{sign}(\vec{\beta},\vec{s})\sin\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)\Big).$$

При $1 < \delta < 2$ косинус в этой формуле принимает отрицательные значения. В связи с этим окончательный ответ для предельного выражения в (3.14) естественно записать в следующем виде:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\ln(\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}))}{\lambda t}$$
$$= -c_r\mathbf{E}U_1^\delta\frac{\Gamma(2-\delta)}{(\delta-1)}\left|\cos\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)\right|\int\limits_{\vec{s}\in S_1^+}|(\vec{\beta},\vec{s})|^\delta\left(1 + i\,\mathrm{sign}(\vec{\beta},\vec{s})\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)\right)\Lambda(d\vec{s}).$$

Эта формула соответствует логарифму характеристической функции многомерного устойчивого процесса с показателем $1 < \delta < 2$. Теорема доказана. $\square$

Автор благодарна М. А. Лифшицу за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Литература

1. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* — in “In and Out of Equilibtium. II”, ser.: Progress in Probability **60**, Birkhäuser, Basel, 2008, 383–427.
2. М. А. Лифшиц, *Случайные процессы – от теории к практике.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.
3. H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj, *Self–similar random fields and rescaled random balls models.* — J. Theor. Probab. **23**, No. 4 (2010), 1110–1141.
4. J.-C. Breton, C. Dombry, *Self–similar random fields and rescaled random balls models.* — Stoch. Proc. Appl. **119**, No. 10 (2009), 3633–3652.
5. I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, V. Schmidt, *Scaling limits for random fields with long-range dependence.* — Ann. Probab. **35**, No. 2 (2007), 528–550.
6. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* Наука, М., 1980.
7. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М., 1964.
8. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Киев, изд-во КГУ, 1961.
9. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей.* УРСС, М., 2004.
10. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* Наука, М., 1965.

Garai E. S. On the convergence of multidimensional workload in a service system to a stable process.

A service system model introduced by I. Kaj and M. S. Taqqu is considered. We prove a limit theorem on the convergence of finite-dimensional distributions of the integral workload process with a multidimensional resource to the corresponding distributions of a multidimensional stable process.

ГБНОУ СПбГДТЮ Аничков лицей,
Невский пр., 39, литер А,
Санкт-Петербург 198 504, Россия
E-mail: elena12578@mail.ru

Поступило 15 октября 2017 г.