Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

И. В. Волчёнкова, Л. Б. Клебанов

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СИММЕТРИЧНО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение

Характеризации вероятностных распределений свойствами подходящих статистик представляют собой довольно развитый раздел теории вероятностей и математической статистики. Литература, посвященная этой области, весьма обширна. Мы отметим только наиболее известную монографию [3]. Впрочем, следует заметить, что большинство характеризационных результатов, использующих несколько случайных величин или векторов, предполагает их стохастическую независимость. В связи с этим представляется интересным вопрос об отказе от предположения о независимости. Одним из наиболее простых типов стохастической зависимости является симметрическая зависимость (или, что то же, условная независимость), изучение которой может быть сведено к рассмотрению масштабных смесей распределений (см. [10] и литературу, указанную там).

Цель предлагаемой статьи состоит в попытке разработать характеризации вероятностных распределений свойствами симметрично зависимых случайных величин. При этом мы рассмотрим только простейший случай, когда зависимость получается за счет умножения последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин на одну и ту же положительную величину, не зависящую от этой последовательности.

§2. Основные результаты

2.1. О восстановлении характеристической функции масштабной смеси. В книге Ю. В. Линника [8] был, в частности, получен следующий результат.

Ключевые слова: масштабные смеси, нормальное распределение, устойчивые распределения, характеризационные свойства распределений.

Эта работа была поддержана грантом GAČR 16-03708S Чехии.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция, аналитическая в окрестности точки $t = 0$, а $f(t)$ – некоторая характеристическая функция. Допустим, что $\{t_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Если*

$$f(t_j) = \varphi(t_j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

то

$$f(t) = \varphi(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbf{R}^1.$$

Теорема 2.1 нашла существенные применения в теории характеризаций вероятностных распределений (см. [4]). Наша цель в этом разделе состоит в получении аналога теоремы 2.1 для случая, когда характеристические функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ представляют собой масштабные смеси. Нам потребуется несколько обозначений.

Пусть $\mathcal{X}_s$ – множество всех случайных величин, имеющих симметрические распределения, а Y – некоторая случайная величина, положительная с вероятностью 1. Обозначим $\mathfrak{F}_s(Y)$ класс всех случайных величин, представимых в виде $X \cdot Y$, где $X \in \mathcal{X}_s$ не зависит от Y. Через $\mathfrak{F}_{a,s}(Y)$ обозначим подкласс класса $\mathfrak{F}_s(Y)$ тех случайных величин $X \cdot Y$, для которых характеристическая функция X является аналитической в некоторой окрестности нуля.

Введем еще один класс случайных величин. Именно, обозначим $\mathfrak{Y}$ множество положительных с вероятностью 1 случайных величин, cos-преобразование которых допускает при $t \geqslant 0$ разложение вида

$$g(t) = \mathbf{E}\{\cos(t \cdot Y_o)\} \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^{2\kappa k}, \quad (\kappa > 0). \tag{1}$$

Разложение понимается в том смысле, что для любого целого $m > 0$ существует такое положительное число C_m, что

$$\left| \frac{g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\, t^{2\kappa k}}{t^{2\kappa m}} - a_m \right| \leqslant C_m \tag{2}$$

при всех вещественных $t \geqslant 0$. Кроме того, разность $g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\, t^{2\kappa k}$ сохраняет знак (т.е. является либо неположительной либо неотрицательной) на положительной полуоси при каждом $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2.2. *Предположим, что* $Y_o \in \mathfrak{Y}$. *Далее, пусть случайные величины* $Z \in \mathfrak{F}_{a,s}(Y_o)$ *и* $W \in \mathfrak{F}_s(Y_o)$ *таковы, что для их характеристических функций* $f_Z(t)$ *и* $f_W(t)$ *справедливо*

$$f_W(t_j) = f_Z(t_j), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $\{t_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ *– последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Тогда* $f_W(t) = f_Z(t)$ *при всех* $t \in \mathbf{R}^1$, *т.е. случайные величины* W *и* Z *одинаково распределены.*

Доказательство. Имеем

$$f_Z(t) = 2\int\limits_0^\infty dG(y)\int\limits_0^\infty \cos(t\cdot x\cdot y)\,dF_U(x), \tag{4}$$

где $G(y)$ – функция распределения Y_o, а $F_U(x)$ – функция распределения случайной величины U, для которой $Z = U\cdot Y_o$. Обозначим через $F_V(x)$ функцию распределения случайной величины V, для которой $W = V\cdot Y_o$. Тогда соотношение (3) может быть переписано в виде

$$2\int\limits_0^\infty dG(y)\int\limits_0^\infty \cos(t_j\cdot x\cdot y)\,dF_U(x) = 2\int\limits_0^\infty dG(y)\int\limits_0^\infty \cos(t_j\cdot x\cdot y)\,dF_V(x)$$

или

$$\int\limits_0^\infty g(t_j\cdot x)\,dF_U(x) = \int\limits_0^\infty g(t_j\cdot x)\,dF_V(x),$$

для $j = 1, 2, \ldots$. Несколько изменим левую часть этого соотношения. Именно, запишем

$$\int\limits_0^\infty \Big(g(t_j\cdot x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\, t_j^{2\kappa k} x^{2\kappa k}\Big)\Big/ t_j^{2\kappa m}\,dF_U(x). \tag{5}$$

Прежде всего отметим, что из (1) и (2) вытекает

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\, t^{2\kappa k}}{t^{2\kappa m}} = a_m \neq 0 \quad \text{для всех } m = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Если бы было $\kappa > 1$, то при $m = 1$ мы бы получили, что $g(t)$ является cos-преобразованием величины Y_o, вырожденной в нуле, вопреки предположению о ее положительности. Таким образом, $0 < \kappa \leqslant 1$. Поскольку $Z \in \mathfrak{F}_{a,s}(Y_o)$, то U обладает конечными моментами всех положительных порядков. Соотношения (2) и (6) показывают, что к интегралу (5) можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Таким образом,

$$\int_0^\infty \Big(g(t_j \cdot x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\, t_j^{2\kappa k} x^{2\kappa k}\Big)/t_j^{2\kappa m}\, dF_U(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} a_m \int_0^\infty x^{2\kappa m}\, dF_U(x), \tag{7}$$

$m = 1, 2, \ldots$. Таким образом, мы можем вычислить моменты порядков κm распределения $F_U(x)$, зная значения $f_Z(t_j)$.

Рассмотрим теперь $f_W(t_j) = 2\int_0^\infty g(t_j \cdot x)\, dF_V(x)$. Соотношение (3) показывает, что существует предел

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1 - f_W(t_j)}{t_j^{2\kappa}} = \lim_{j\to\infty} \frac{1 - f_Z(t_j)}{t_j^{2\kappa}} = 2\, a_1 \int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_U(x). \tag{8}$$

С другой стороны, так как $a_0 = 1$, то при любом $T > 0$ имеем

$$\frac{1 - f_W(t_j)}{t_j^{2\kappa}} = 2\int_0^\infty \big(1 - g(t_j \cdot x)\big)\, dF_V(x)/t_j^{2\kappa} \geqslant 2\int_0^T \big(1 - g(t_j \cdot x)\big)\, dF_V(x)/t_j^{2\kappa}.$$

Однако,

$$\big(1 - g(t_j \cdot x)\big)/t_j^{2\kappa} \xrightarrow[j\to\infty]{} a_1\, x^{2\kappa}.$$

Поэтому

$$2a_1 \int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_U(x) = \lim_{j\to\infty} \frac{1 - f_W(t_j)}{t_j^{2\kappa}} \geqslant 2\int_0^T \big(1 - g(t_j \cdot x)\big)\, dF_V(x)/t_j^{2\kappa}$$
$$= 2a_1 \int_0^T x^{2\kappa} dF_V(x),$$

т.е., в силу произвольности $T > 0$,

$$\int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_V(x) \leqslant \int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_U(x) < \infty.$$

Таким образом, функция $x^{2\kappa}$ интегрируема по $F_U(x)$ и мы можем перейти к пределу под интегралом в выражении

$$\frac{1 - f_W(t_j)}{t_j^{2\kappa}} = 2 \int_0^\infty \big(1 - g(t_j \cdot x)\big)\, dF_V(x)/t_j^{2\kappa},$$

что дает нам

$$\frac{1 - f_W(t_j)}{t_j^{2\kappa}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 2\, a_1 \int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_V(x).$$

Из (8) теперь получаем

$$\int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_V(x) = \int_0^\infty x^{2\kappa}\, dF_U(x).$$

Индукция по m, проведенная с помощью сходных рассуждений и использованием соотношений

$$\int_0^\infty \Big(g(t_j \cdot x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\, t_j^{2\kappa k} x^{2\kappa k}\Big)/t_j^{2\kappa m}\, dF_U(x)$$
$$= \int_0^\infty \Big(g(t_j \cdot x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\, t_j^{2\kappa k} x^{2\kappa k}\Big)/t_j^{2\kappa m}\, dF_V(x),$$

приводит нас к заключению, что

$$\int_0^\infty x^{2m\kappa}\, dF_V(x) = \int_0^\infty x^{2m\kappa}\, dF_U(x)$$

при всех $m = 1, 2, \ldots$. Ввиду симметричности распределений F_U и F_V все целые моменты случайных величин $\operatorname{sign}(U)\,|U|^\kappa$ и $\operatorname{sign}(V)\,|V|^\kappa$ совпадают. Однако, характеристическая функция случайной величины U аналитична в некотором круге с центром в начале координат. Отсюда следует, что моменты величины $\operatorname{sign}(U)\,|U|^\kappa$ удовлетворяют условию Карлемана (см., например, [1]), обеспечивающему единственность решения проблемы моментов. Таким образом, распределения величин U и V, а, следовательно, и распределения Z и W совпадают. $\square$

Отметим, что теорема 2.1 для случая симметричных распределений может быть получена из теоремы 2.5 выбором в качестве Y_o тождественной единицы.

Приведем некоторые примеры применимости теоремы 2.5. При этом мы сосредоточимся на примерах, связанных с устойчивыми распределениями (по поводу определений и нужных фактов см. [2]).

Пример 2.1. Пусть случайная величина Y имеет распределение Леви с преобразованием Лапласа $\mathbf{E}\exp(-sY) = \exp(-\sqrt{2s})$, $s \geqslant 0$. В качестве Y_o выберем $Y_o = Y^{1/2}$. Тогда cos-преобразование Y_o раскладывается в ряд по степеням абсолютной величины аргумента t. Именно, при положительных значениях t имеем

$$\mathbf{E}\cos(t \cdot Y_o) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k\kappa}}{2^{3k/2}\,\Gamma(1+k/2)\,\Gamma^2((1+k)/2)}$$

при $\kappa = 1/2$. Нетрудно проверить, что $Y_o \in \mathfrak{Y}$. Поэтому для $Z \in \mathfrak{F}_{a,s}(Y_o)$ и $W \in \mathfrak{F}_s(Y_o)$ справедлива теорема 2.5. В частности, если U – стандартная нормальная случайная величина, то $Z = U \cdot Y_o$ имеет симметричное устойчивое распределение с параметром $\alpha = 1/2$. Таким образом, если $W \in \mathfrak{F}_s(Y_o)$ и характеристические функции W и Z совпадают на некоторой последовательности точек, сгущающейся к нулю, то W и Z одинаково распределены. Отметим, что без условия $W \in \mathfrak{F}_s(Y_o)$ подобный факт уже не будет иметь места. В самом деле, достаточно в качестве примера взять случайную величину W, имеющую полу-устойчивое распределение с $\alpha = 1/2$.

Следующий пример также будет связан с устойчивыми законами.

Пример 2.2. Пусть случайная величина Y_o имеет одностороннее устойчивое распределение с параметром $\alpha \in (0, 1/2)$ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\Big\{|t|^\alpha \big(1 - i\,\mathrm{sign}(t)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}\big)\Big\}.$$

Тогда cos-преобразование Y_o имеет вид $\exp(-|t|^\alpha)\cos(|t|^\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2})$. Без труда проверяется, что $Y_o \in \mathfrak{Y}$. Поэтому для $Z \in \mathfrak{F}_{a,s}(Y_o)$ и $W \in \mathfrak{F}_s(Y_o)$ справедлива теорема 2.5. Отметим, что если U – стандартная нормальная случайная величина, то $Z = U \cdot Y_o$ имеет тяжелый (степенной) хвост.

2.2. Об одном аналоге теоремы Пойа. Одним из первых характеризационных результатов является хорошо известная теорема Пойа [9]. Она гласит следующее.

Теорема 2.3. *Пусть X_1, X_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины. Равенство по распределению*

$$X_1 \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда X_1 имеет нормальное (возможно вырожденное) распределение с нулевым средним.

Отметим, что больше никаких (в том числе и моментных) ограничений на рассматриваемые случайные величины не налагается. Однако, весьма существенным ограничением является условие независимости этих случайных величин. Ниже мы попробуем заменить его на предположение о симметричной зависимости этих величин. Более точно, пусть U_1, U_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины, а Y – не зависящая от них положительная случайная величина. Положим $X_j = U_j \cdot Y$, $j = 1, 2$. Что в этом случае определяет соотношение (9)? К сожалению, мы не можем дать такой же полный ответ, как предлагает теорема Пойа. Нам потребуются некоторые моментные условия.

Рассмотрим соотношение (9) для только что определенных случайных величин $X_1 = U_1 \cdot Y$ и $X_2 = U_2 \cdot Y$. Обозначим $f(t)$ характеристическую функцию X_1, а $G(u)$ – функцию распределения Y. Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$\int_0^\infty f(tu)\, dG(u) = \int_0^\infty f^2(tu/\sqrt{2})\, dG(u). \tag{10}$$

Так как для любой характеристической функции φ имеем свойство эрмитовости, т.е. $\varphi(t) = \bar{\varphi}(-t)$ при всех $t \in \mathbf{R}^1$ и $f(0) = 1$, то уравнение (10) достаточно рассматривать только при $t > 0$.

Умножим обе части уравнения (10) на $t^{-\varepsilon}$ и проинтегрируем по t в пределах от нуля до бесконечности (предполагается, что $\varepsilon > 0$). Получим

$$\int_0^\infty t^{-\varepsilon}\, dt \int_0^\infty f(tu)\, dG(u) = \int_0^\infty t^{-\varepsilon}\, dt \int_0^\infty f^2(tu/\sqrt{2})\, dG(u). \tag{11}$$

Преобразуем сначала левую часть (11). Имеем

$$\int_0^\infty t^{-\varepsilon} dt \int_0^\infty f(tu)\, dG(u) = \int_0^\infty dG(u) \int_0^\infty t^{-\varepsilon} f(tu)\, dt = \int_0^\infty \frac{dG(u)}{u^{1-\varepsilon}} \int_0^\infty v^{-\varepsilon} f(v)\, dv.$$

Мы выполнили замену $v = tu$ в предпоследнем интеграле. Нетрудно понять что интеграл $\int_0^\infty u^{-1+\varepsilon}\, dG(u)$ сходится при условии

$$\limsup_{u\to 0} \frac{G(u)}{u^{1-\varepsilon}} < \infty. \tag{12}$$

Сходимость интеграла $\int_0^\infty v^{-\varepsilon} f(v)\, dv$ эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_1^\infty v^{-\varepsilon}\, f(v)\, dv, \tag{13}$$

которая означает некоторую скорость убывания характеристической функции $f(t)$ на бесконечности. Это убывание означает наличие небольшой гладкости соответствующего распределения.

Сходным образом может быть преобразована правая часть (11). Она будет приведена к виду

$$\int_0^\infty \frac{dG(u)}{u^{1-\varepsilon}} \cdot \int_0^\infty v^{-\varepsilon} f^2(v/\sqrt{2})\, dv.$$

Теперь мы видим, что при условиях (12) и (13) уравнение (10) эквивалентно уравнению

$$\int_0^\infty \frac{dG(u)}{u^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty v^{-\alpha}\, f(v)\, dv = \int_0^\infty \frac{dG(u)}{u^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty v^{-\alpha}\, f^2(v/\sqrt{2})\, dv \tag{14}$$

при всех $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Однако, $\int_0^\infty \frac{dG(u)}{u^{1-\alpha}}$ не обращается в нуль и предыдущее уравнение сводится к

$$\int_0^\infty v^{-\alpha} f(v)\, dv = \int_0^\infty v^{-\alpha} f^2(v/\sqrt{2})\, dv,$$

которое вообще не зависит от функции G и эквивалентно условию теоремы Пойа для f.

Легко проверить, что если величина U_1 имеет стандартное нормальное распределение, то величины $X_j = U_j \cdot Y$ удовлетворяют (9) при любой функции распределения G.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть U_1, U_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией f, а Y – независимая от них положительная случайная величина, имеющая функцию распределения G. Положим $X_j = U_j \cdot Y$, $j = 1, 2$. Допустим, что f и G удовлетворяют условиям* (12) *и* (13). *Тогда соотношение* (9) *справедливо в том и только в том случае, когда X_1 является масштабной смесью нормальных законов с нулевым средним.*

Заметим, что доказательство теоремы 2.4 может быть получено и из более общих соображений. Именно, соотношение (10) можно рассматривать как мультипликативную свертку. Применяя преобразование Меллина, придем к уравнению (14). Однако, строгое обоснование применения преобразования приведет к тем же рассуждениям, которые и были применены.

2.3. Об единственности представления симметрично зависимых величин в виде смеси. Обозначим $\mathfrak{F}$ класс всех случайных величин X, представимых в виде

$$X \stackrel{d}{=} U \cdot Y, \tag{15}$$

где U не зависит от положительной случайной величины Y (символ $\stackrel{d}{=}$ используется для обозначения равенства по распределению). Ясно, что если для случайной величины X представление (15) существует, то оно не обязано быть единственным. В самом деле, для положительных случайных величин X, U, Y это представление означает разложимость $\log X$ на независимые компоненты, которые могут быть определены, вообще говоря, многими способами (см., например, [8]).

Однако, пусть $n \geqslant 2$, а $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ – случайный вектор[1], для которого существует представление

$$(X_1, \ldots, X_n)^T \stackrel{d}{=} (U_1, \ldots, U_n)^T \cdot Y, \tag{16}$$

[1]Здесь и ниже T – знак транспонирования

такое что величины $U_1, U_2, \dots, U_n, Y$ независимы в совокупности, причем $Y > 0$ с вероятностью единица. В этом случае ситуация меняется радикально. Ниже мы и изучим, какая имеется "свобода" в выборе величин $U_1, U_2, \dots, U_n, Y$.

Рассмотрим сначала вопрос о том, насколько условие (16) является ограничительным для абсолютных величин входящих в него переменных. При этом наиболее простым случаем является $n = 2$. Как мы увидим ниже, это представляет собой наиболее общий случай.

Итак, пусть $n = 2$. Допустим, что помимо представления (16) при $n = 2$ имеется еще представление

$$(X_1, X_2)^T \stackrel{d}{=} (V_1, V_2)^T \cdot Z, \tag{17}$$

такое что величины V_1, V_2, Z независимы в совокупности, причем $Z > 0$ с вероятностью единица. Пусть s и t – произвольные чисто мнимые числа. Из (16) и (17) вытекает, что

$$\mathbf{E}(X_1^{(\pm)s} \cdot X_2^{(\pm)t}) = \mathbf{E}(U_1^{(\pm)s} \cdot U_2^{(\pm)t} \cdot Y^{s+t}) = \mathbf{E}(V_1^{(\pm)s} \cdot V_2^{(\pm)t} \cdot Z^{s+t}),$$

где для любой случайной величины W через $W^{(+)} = \max(W, 0)$ обозначена ее положительная часть, а через $W^{(-)} = \max(-W, 0)$ – ее отрицательная часть. Знаки плюс и минус должны быть выбраны согласованным образом. Из предыдущего соотношения (точнее, системы, так как имеются два случая – "плюс" и "минус") следует

$$\mathbf{E}(U_1^{(\pm)s})\,\mathbf{E}(U_2^{(\pm)t})\,\mathbf{E}(Y^{s+t}) = \mathbf{E}(V_1^{(\pm)s})\,\mathbf{E}(V_2^{(\pm)t})\,\mathbf{E}(Z^{s+t}). \tag{18}$$

Обозначим

$$\psi(s) = \mathbf{E}Y^s,\ \zeta(s) = \mathbf{E}Z^s,\ \varphi_j^{(\pm)}(s) = \mathbf{E}U_j^{(\pm)s},\ \xi_j^{(\pm)}(s) = \mathbf{E}V_j^{(\pm)s},\ j = 1, 2.$$

Тогда система (18) может быть переписана как

$$\psi(s+t)\,\varphi_1^{(\pm)}(s)\,\varphi_2^{(\pm)}(t) = \zeta(s+t)\,\xi_1^{(\pm)}(s)\,\xi_2^{(\pm)}(t) \tag{19}$$

для всех чисто мнимых s, t. При этом ясно, что все входящие в (19) функции непрерывны и равны единице при нулевом значении своего аргумента.

Допустим сначала, что функции $\psi(s)$, $\varphi_1^{(\pm)}(s)$, $\varphi_2^{(\pm)}(s)$ не имеют нулей на мнимой оси. Тогда и функции $\zeta(s)$, $\xi_1^{(\pm)}(s)$, $\xi_2^{(\pm)}(s)$ также не имеют там нулей. Уравнения (19) могут быть записаны в виде

$$\eta(s+t) + \theta_1^{(\pm)}(s) + \theta_2^{(\pm)}(t) = 0 \tag{20}$$

при всех чисто мнимых s, t. Здесь

$$\eta(s) = \log\big(\zeta(s)/\psi(s)\big), \quad \theta_j^{(\pm)}(s) = \log\big(\xi_j^{(\pm)}(s)/\varphi_j^{(\pm)}(s)\big), \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\omega_\varepsilon(z)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на мнимой оси, такая что $\omega_\varepsilon(z) = 0$ при $|z| \geqslant \varepsilon$ и интеграл от нее, вычисленный по всей мнимой оси, равен единице. Умножим обе части (20) на $\omega_\varepsilon(s+\tau)$ и проинтегрируем по s вдоль мнимой оси. Получим

$$\eta_\varepsilon(\tau - t) + \theta_{1,\varepsilon}^{(\pm)}(\tau) + \theta_2^{(\pm)}(t) = 0, \tag{21}$$

где функции $\eta_\varepsilon(\tau)$ и $\theta_{1,\varepsilon}^{(\pm)}(\tau)$ представляют собой свертки с бесконечно дифференцируемой финитной функцией. Они сами являются бесконечно дифференцируемыми. Отсюда следует, что функция $\theta_2^{(\pm)}(t)$ также бесконечно дифференцируема.

Точно так же доказывается, что $\eta(t)$ и $\theta_1^{(\pm)}(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми. Это значит, что можно продифференцировать обе части (20) по s (соответственно, по t). Получим

$$\eta'(s+t) + \theta_1^{(\pm)\prime}(s) = 0, \tag{22}$$

и, соответственно,

$$\eta'(s+t) + \theta_2^{(\pm)\prime}(t) = 0. \tag{23}$$

Из соотношений (22) и (23) следует, что при всех s и t выполнено $\theta_1^{(\pm)\prime}(s) = \theta_2^{(\pm)\prime}(t) = c$, а $\eta'(s) = -c$, где c – некоторая постоянная. Учитывая, что все входящие в (19) функции непрерывны и равны единице при нулевом значении своего аргумента, получаем $\theta_1^{(\pm)}(s) = \theta_2^{(\pm)}(s) = c \cdot s$, а $\eta(s) = -c \cdot s$.

Теперь надо вернуться к функциям $\zeta(s)$, $\psi(s)$, $\xi_j^{(\pm)}(s)$, $\varphi_j^{(\pm)}(s)$. Из сказанного выше мы видим, что

$$\zeta(s) = \exp(-c \cdot s)\,\psi(s), \tag{24}$$

$$\xi_j^{(\pm)}(s) = \exp(-c \cdot s)\,\varphi_j^{(\pm)(s)}, \quad j = 1, 2. \tag{25}$$

Соотношения (24), (25) показывают, что случайные величины U_j и V_j $(j = 1, 2)$ из соотношений (16) и (17) могут отличаться по распределению только постоянным множителем. Величины же Y и Z отличаются также постоянным множителем, но обратным по величине.

Итак, нами доказан следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$, $(n \geqslant 2)$ *– случайный вектор, для которого существует представление* (16), *такое что величины* $U_1, U_2, \ldots, U_n, Y$ *независимы в совокупности, причем* $Y > 0$ *с вероятностью единица. Допустим, что функции*

$$\psi(s) = \mathbf{E}Y^s, \quad \varphi_j^{(\pm)}(s) = \mathbf{E}U_j^{(\pm)s}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

определены на мнимой оси и не имеют там нулей. Тогда распределение вектора $\mathbf{X}$ *восстанавливает распределения величин* U_j, $(j = 1, \ldots, n)$ *и* Y *с точностью до параметра масштаба.*

Разумеется, все выкладки, приведенные выше при доказательстве теоремы 2.5, остаются справедливыми в некоторой окрестности нулевой точки $s = 0$, $t = 0$. Исходя из этого можно сделать следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Утверждение теоремы* 2.5 *остается справедливым, если условие отсутствия нулей у функций* (26) *заменить условием однозначности их продолжения из сколь угодно малой окрестности нуля на всю мнимую ось.*

Заметим, что условия однозначной продолжимости функций (26) могли бы быть получены из результатов М. Г. Крейна (см. [5–7]), однако последние выражены в довольно тяжело проверяемых терминах. Поэтому мы укажем только одно простое условие такой продолжимости.

Замечание 2.1. Утверждение теоремы 2.5 остается справедливым если условие отсутствия нулей у функций (26) заменить условием аналитичности каждой из этих функций в некоторой окрестности начала координат.

Доказательство. Заметим, что функции (26) могут рассматриваться как характеристические функции логарифмов фигурирующих там случайных величин. Поэтому для доказательства единственности их продолжения достаточно применить уже упоминавшуюся в секции 2.2 теорему Линника [8]. □

Условие аналитичности указанных функций может быть обеспечено наличием экспоненциального момента логарифмов соответствующих случайных величин или, что то же самое, наличием абсолютного момента положительного порядка самой случайной величины. Легко также видеть, что требование аналитичности в утверждении 2.1 может быть заменено предположением об однозначности восстановления распределений логарифмов случайных величин по их моментам.

Приведем теперь пример, показывающий, что условия отсутствия нулей или единственности продолжения являются существенными. Для построения примера нам достаточно рассмотреть случайный вектор $\mathbf{X}$ с неотрицательными координатами. В этом случае нет необходимости рассматривать отрицательную часть случайных величин, а их положительная часть совпадает с самой величиной. Поэтому знак $\pm$ мы здесь опускаем. Как уже было отмечено, замена величин U_j, $j = 1, \ldots, n$, и Y их логарифмами позволяет рассматривать функции ψ и φ_j как характеристические. Таким образом, нам достаточно указать существенно различные[2] характеристические функции $\psi, \varphi_j, \zeta, \xi_j$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие соотношению

$$\psi(s+t)\,\varphi_1(s)\,\varphi_2(t) = \zeta(s+t)\,\xi_1(s)\,\xi_2(t). \tag{27}$$

При этом достаточно построить пример для случая $\psi = \varphi_1 = \varphi_2$ и $\zeta = \xi_1 = \xi_2$. Иными словами, достаточно построить "существенно различные" характеристические функции ψ и ζ, для которых

$$\psi(s+t)\,\psi(s)\,\psi(t) = \zeta(s+t)\,\zeta(s)\,\zeta(t) \tag{28}$$

при всех s, t (поскольку мы рассматриваем уже характеристические функции, следует считать переменные s, t вещественными).

Пусть

$$\chi(s) = 1 - |s| \quad \text{при} \quad |s| < 1 \quad \text{и} \quad \chi(s) = 0 \quad \text{при} \quad |s| \geqslant 1.$$

Хорошо известно, что χ представляет собой характеристическую функцию некоторой случайной величины. Ее плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}.$$

Положим

$$\psi(t) = \chi(t) + \frac{1}{2}\bigl(\chi(t+3) + \chi(t-3)\bigr),$$
$$\zeta(t) = \chi(t) - \frac{1}{2}\bigl(\chi(t+3) + \chi(t-3)\bigr).$$

[2] т.е. не приводящие к только масштабному различию между случайными величинами

Каждая из этих функций является характеристической, так как

$$\chi(t) \pm \frac{1}{2}\big(\chi(t+3)+\chi(t-3)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\big(1 \pm \cos(3x)\big)\, p(x)\, dx.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (28) справедливо.

Разумеется, построенные функции не могут быть получены одна из другой путем умножения на $\exp\{ita\}$ при некотором вещественном a, т.е. являются существенно различными. *Итак, мы видим, что случайные величины U_j в представлении* (16) *могут быть, вообще говоря, выбраны несколькими, существенно разными, способами.*

В приведенной конструкции логарифмы соответствующих случайных величин не имеют конечного абсолютного первого момента. Представляется интересным построить сходный пример (если это возможно) для случая существования всех моментов. При этом из сказанного выше ясно, что в таком примере единственность восстановления распределения по моментам должна отсутствовать.

Перейдем к построению примера. Определим функцию

$$R(t) = \frac{\exp\big(-1/(1-t^2)\big)}{2\,\pi\,(1-t^2)^{3/2}} \quad \text{при} \quad |t|<1, \quad R(t)=0 \quad \text{при} \quad |t| \geqslant 1.$$

Легко убедиться, что обратное преобразование Фурье интегрируемо на всей вещественной оси, однако не является неотрицательным. Поэтому положим

$$\chi_o(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(s-2\,t)\, R(s)\, ds.$$

Ясно, что $\chi_o(t)=0$ при $|t| \geqslant 1$. Обратное преобразование Фурье функции $\chi_o(t)$ с точностью до множителя равно квадрату обратного преобразования Фурье функции $R(t)$ и, следовательно, представляет собой вероятностную плотность. Обозначим ее через $q(x)$. Две функции

$$\chi_o(t) \pm \frac{1}{2}\big(\chi_o(t+3)+\chi_o(t-3)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\big(1 \pm \cos(3x)\big)\, q(x)\, dx$$

и дают требуемый пример.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.
2. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва, 1983.
3. А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, *Характеризационные задачи математической статистики*, Наука, Москва, 1972.
4. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, I. A. Melamed, *Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
5. М. Г. Крейн, *О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций.* — Докл. АН СССР, **XXVI**, No. 1 (1940).
6. М. Г. Крейн, *О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции.* — Докл. АН СССР **XLV**, No. 3 (1944).
7. М. Г. Крейн, *О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве.* — Докл. АН СССР, **XLV**, No. 4 (1944).
8. Ю. В. Линник, *Разложения вероятностных законов*, ЛГУ, Ленинград, 1960.
9. G. Polya, *Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung,* — Math. Zeitschrift **18**, 96–108.
10. Л. Такач, *Комбинаторные методы в теории случайных процессов*, Мир, Москва, 1971.

Volchenkova I. V., Klebanov L. B. On the characterization of distributions of symmetric dependent random variables.

Characterizations of scale mixtures of normal, stable and some other laws are obtained in the case of symmetrically dependent random variables. Symmetrically dependent random variables are studied for a special case of scale dependence. Conditions of unique (and nonunique) representation of a sequence of random variables as that of symmetrically dependent are given. Some variants of Linnik and Polya Theorems are given.

Department of Probability
and Mathematical Statistics,
Charles University, Prague,
Czech Republic
E-mail: levbkl@gmail.com

Поступило 9 октября 2017 г.