Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

А. Н. Бородин

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В работе рассматривается специальный класс сложных пуассоновских процессов с переключениями. Имеются два набора (последовательности) независимых случайных величин, каждый из которых состоит из одинаково распределенных величин. В моменты скачков процесса Пуассона эти величины задают значения скачков сложного процесса Пуассона. Переключения с одного набора случайных величин на другой происходят в моменты, определяемые независимыми бернуллиевскими величинами, независящими от исходных величин и пуассоновского процесса. При этом, если выпадает единица, то переключение не происходит, а осуществляется переключение, если выпадает минус единица. Таким образом, процесс с переключениями начинается как классический сложный пуассоновский процесс с первым набором случайных слагаемых. Затем в распределенный по геометрическому распределению момент времени слагаемые заменяются на величины из другого набора независимых одинаково распределенных величин, и уже в соответствии с этими величинами происходит дальнейшее развитие процесса. Через независимый геометрически распределенный момент времени слагаемые заменяются на величины из исходного набора и так далее.

В работе изучается предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями. При подходящей нормировке предельным процессом является броуновское движение с переключающейся дисперсией.

Можно рассматривать и более сложные пуассоновские процессы с переключениями, когда выбор слагаемых осуществляются из трех и более наборов одинаково распределенных в каждом наборе величин.

Ключевые слова: телеграфный процесс, сложный пуассоновский процесс с переключениями, предельное распределение.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01) и частично грантом РФФИ 16-01-00367 и грантом СПбГУ-DFG 6.65.37.2017.

Однако общий подход к изучению предельного поведения распределений сложных пуассоновских процессов с переключениями, предложенный в настоящей работе не меняется, хотя приводит к значительным усложнениям.

1. Сложный пуассоновский процесс с переключениями. Процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ может быть представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины.

Предположим, что $(Y_k(-1), Y_k(1))$, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые случайные вектора. Пусть при одинаковых $l = 1, -1$, случайные величины $Y_k(l)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют одинаковые распределения. Пусть χ_j, $j = 1, 2, \ldots$, – независимые бернуллиевские случайные величины:

$$\mathbf{P}(\chi_1 = 1) = 1 - p \qquad \mathbf{P}(\chi_1 = -1) = p.$$

Предположим также, что они не зависят от величин $(Y_k(-1), Y_k(1))$, $k = 1, 2, \ldots$, и все эти величины не зависят от процесса Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$.

Нас интересует процесс

$$B_p(t) := \int\limits_0^t Y_{N(s)} \Big(\prod_{j=0}^{N(s-)} \chi_j \Big) \, dN(s) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \Big(\prod_{j=0}^{k-1} \chi_j \Big), \quad t \geqslant 0,$$

который будем называть *сложным пуассоновским процессом с переключениями.*

Пусть χ_0 неслучайная величина, которой придаются значения 1 или -1. Выбор $\chi_0 = 1$ означает, что суммирование начинается с величины $Y_1(1)$, а $\chi_0 = -1$ означает, что суммирование начинается с величины $Y_1(-1)$.

Обозначим $\mathbf{E}_l$ математическое ожидание при условии $\chi_0 = l$. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\chi;\, A\} := \mathbf{E}\{\chi \mathbb{1}_A\}$.

Положим

$$T_p(t) := \prod_{j=0}^{N(t)} \chi_j.$$

Этот процесс отвечает за переключения.

Теорема 1.1. *Двумерный процесс*

$$\vec{Q}_p(t) = \big(T_p(t), x + B_p(t)\big), \qquad \vec{Q}_p(0) = (\chi_0, x),$$

является однородным марковским процессом. Преобразование Лапласа по времени от характеристической функции переходной вероятности этого процесса имеет вид

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}\big\{ \exp(i\alpha T_p(t) + i\beta B_p(t)) \big| \vec{Q}_p(0) = (l, x)\big\}\, dt \tag{1.1}$$

$$= \frac{\lambda e^{i\beta x}((\lambda + \lambda_1(1 - f_{-l}(\beta)(1-p)))e^{il\alpha} + \lambda_1 p f_l(\beta) e^{-il\alpha})}{(\lambda + \lambda_1(1 - f_1(\beta)(1-p)))(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-1}(\beta)(1-p))) - \lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)},$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $f_l(\beta) := \mathbf{E} e^{i\beta Y_1(l)}$, $l = 1, -1$.

Доказательство. Марковость процесса $\vec{Q}_p(t)$, $t \geqslant 0$, будет установлена в дальнейшем, а сначала мы рассмотрим как устроены его переходные вероятности.

В силу аддитивности второй координаты процесса, начальное значение x процесса $\vec{Q}_p(t)$ участвует в (1.1) в виде множителя $e^{i\beta x}$, поэтому значение x можно полагать равным нулю.

Применяя теорему Фубини, левую часть (1.1) при $x = 0$ можно представить выражением $\mathbf{E}_l \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_p(\tau)))$, где $\vec{\gamma} := (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, а τ – не зависящий от рассмотренных выше процессов экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Пусть

$$I_l := I_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1, p) := \mathbf{E}_l \exp(i\alpha T_p(\tau) + i\beta B_p(\tau)), \quad l = 1, -1, \tag{1.2}$$

где характеристическая функция берется при условии $\chi_0 = l$.

Обозначим через ζ случайную величину, равную количеству величин χ_j, $j = 1, 2, \dots$, принявших значение 1 до первого появления -1. Эта величина имеет геометрическое распределение:

$$\mathbf{P}(\zeta = m) = (1-p)^m p, \qquad m = 0, 1, \dots,$$

и

$$\mathbf{P}(\zeta \geqslant v) = (1-p)^v, \qquad v = 0, 1, \dots.$$

Рассмотрим для определенности начальное значение $\chi_0 = 1$. Поскольку $\chi_{\zeta+1} = -1$, то

$$I_1 = \mathbf{E}_1\Big\{ \exp\Big(i\alpha + i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)} Y_k(1)\Big); N(\tau) \leqslant \zeta\Big\} + \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{\zeta+1} Y_k(1)\Big)$$

$$\times\exp\Big(- i\alpha \prod_{j=\zeta+2}^{N(\tau)} \chi_j + i\beta \sum_{k=\zeta+2}^{N(\tau)} Y_k\Big(- \prod_{j=\zeta+2}^{k-1} \chi_j\Big)\Big); \zeta < N(\tau)\Big\} =: L_1 + L_2.$$

Здесь и далее полагаем произведение равным 1, когда верхний индекс меньше нижнего. Поскольку при $|s| \leqslant 1$

$$\mathbf{E}s^{N(\tau)} = \mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{(\lambda_1\tau)^k}{k!}\, e^{-\lambda_1\tau} = \mathbf{E}e^{\lambda_1(s-1)\tau} = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1(1-s)},$$

то

$$L_1 = e^{i\alpha}\mathbf{E}\Big\{\big(f_1(\beta)\,(1-p)\big)^{N(\tau)}\Big\} = \frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))}.$$

Для L_2 получаем

$$L_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big\{\mathbb{1}_{\{\zeta=m\}} \exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{m+1} Y_k(1)\Big)\Big\}\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- i\alpha \prod_{k=m+2}^{N(\tau)} \chi_k\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=m+2}^{N(\tau)} Y_k\Big(- \prod_{j=m+2}^{k-1} \chi_j\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^m p f_1^{m+1}(\beta)\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- i\alpha \prod_{k=1}^{N(\tau)-m-1} \chi_{k+m+1}\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} Y_{k+m+1}\Big(- \prod_{j=1}^{k-1} \chi_{j+m+1}\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}$$

$$= p\sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^m f_1^{m+1}(\beta)\mathbf{E}_{-1}\Big\{ \exp\Big(i\alpha \prod_{k=0}^{N(\tau)-m-1} \chi_k\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1} \chi_j\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}.$$

Индекс -1 у математического ожидания означает, что выполняется условие $\chi_0 = -1$. В последнем равенстве использовалась теорема Фубини и тот факт, что при любом фиксированном m случайные последовательности χ_j, $j = 1,2,\dots$, и χ_{j+m}, $j = 1,2,\dots$, одинаково распределены, а также, что для произвольной последовательности l_k, $k = 1,2,\dots$, составленной из -1 и 1, случайные последовательности $Y_j(l_j)$, $j = 1,2,\dots$, и $Y_{j+m}(l_j)$, $j = 1,2,\dots$, одинаково распределены.

Поскольку

$$\mathbf{P}(N(\tau) = k) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t}\, dt$$

$$= \frac{\lambda\lambda_1^k}{k!(\lambda+\lambda_1)^{k+1}} \int\limits_0^\infty u^k e^{-u}\, du = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^k, \quad k = 0,1,2\dots,$$

то

$$\mathbf{E}_{-1}\Big\{ \exp\Big(i\alpha \prod_{k=0}^{N(\tau)-m-1} \chi_k\Big) \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big) \mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}$$

$$= \sum_{v=m+1}^{\infty} \mathbf{E}_{-1}\Big\{\exp\Big(i\alpha \prod_{k=0}^{v-m-1} \chi_k\Big) \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{v-m-1} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)\Big\} \frac{\lambda\lambda_1^v}{(\lambda+\lambda_1)^{v+1}}$$

$$= \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1} \mathbf{E}_{-1}\Big\{ \exp\Big(i\alpha \prod_{k=0}^{N(\tau)} \chi_k\Big) \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)\Big\}$$

$$= \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1} I_{-1}.$$

Напомним, что I_{-1} определено в (1.2).

В результате имеем

$$I_1 = \frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))} + p\sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^m f_1^{m+1}(\beta)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1} I_{-1}$$

$$= \frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))} + \frac{p\lambda_1 f_1(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))} I_{-1}.$$

Выполняя аналогичные вычисления при начальном условии $\chi_0 = -1$, получим

$$I_{-1} = \frac{\lambda e^{-i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p))} + \frac{p\lambda_1 f_{-1}(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p))} I_1.$$

Выражая из этих равенств I_1, находим

$$I_1(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))}\Big\{e^{i\alpha} + \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha} p f_1(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p))}\Big\}$$

$$+\frac{\lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}{(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))} I_1.$$

Отсюда выводим

$$I_1 = \frac{\lambda(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))e^{i\alpha}+\lambda\lambda_1 p f_1(\beta) e^{-i\alpha}}{(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))-\lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}. \tag{1.3}$$

Аналогично получаем

$$I_{-1} = \frac{\lambda(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))e^{-i\alpha}+\lambda\lambda_1 p f_{-1}(\beta) e^{i\alpha}}{(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))-\lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}. \tag{1.4}$$

Это доказывает (1.1).

Нам понадобятся еще дополнительные выражения, которые следуют из (1.1). Положим при $l = 1, -1$ и $r = 1, -1$

$$I_{l,r} := I_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1, p) := \mathbf{E}_l\Big\{e^{i\beta B_p(\tau)}; \prod_{j=0}^{N(\tau)} \chi_j = r\Big\}. \tag{1.5}$$

Тогда из (1.1) выводим, что

$$I_{l,l} = \frac{\lambda(\lambda+\lambda_1(1-f_{-l}(\beta)(1-p)))}{(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))-\lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}, \tag{1.6}$$

$$I_{l,-l} = \frac{\lambda\lambda_1 p f_l(\beta)}{(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{-1}(\beta)(1-p)))-\lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}. \tag{1.7}$$

Перейдем к доказательству марковости процесса $\vec{Q}_p(t)$. Рассмотрим произвольный набор векторов $\vec{\gamma}_v \in \mathbf{R}^2$, $v = 1, 2, \dots, k$, и вектор $\vec{\gamma} = (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. В силу предложений 6.3 и 6.4 гл. I из [1] нам достаточно доказать, что для произвольных $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k = s < t$, $x \in \mathbf{R}$ и $l = 1, -1$ выполняется следующее равенство

$$L(k, \vec{\gamma}) := \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v)) + i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_p(t))\Big)\Big|\vec{Q}_p(s) = (l, x)\Big\} \tag{1.8}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v))\Big)\Big|\vec{Q}_p(s) = (l, x)\Big\}\mathbf{E}\Big\{e^{i\left(\vec{\gamma}, \vec{Q}_p(t)\right)}\Big|\vec{Q}_p(s) = (l, x)\Big\}.$$

Это равенство как раз и характеризует марковское свойство, состоящее в том, что при фиксированном значении процесса в настоящий момент времени (момент s) прошлое процесса до этого момента не зависит от значения в любой будущий момент времени (момент t).

Равенство (1.8) можно переписать в виде

$$L(k,\vec{\gamma}) = L(k,\vec{0})L(0,\vec{\gamma}), \tag{1.9}$$

где $\vec{0} = (0,0)$ – вектор с нулевыми координатами. Имеем

$$L(k,\vec{\gamma}) = e^{i\beta x} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big\{ \mathbb{1}_{\{N(s)=m\}} \mathbb{1}_{\{N(t)-N(s)=n\}} \exp\Big(i \sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v))\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\alpha l \prod_{j=m+1}^{m+n} \chi_j\Big) \exp\Big(i\beta \sum_{k=m+1}^{m+n} Y_k \Big(l \prod_{j=m+1}^{k-1} \chi_j\Big)\Big) \Big| \vec{Q}_p(s) = (l,x) \Big\}$$

$$= e^{i\beta x} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big\{ \mathbb{1}_{\{N(s)=m\}} \exp\Big(i \sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v))\Big) \Big| \vec{Q}_p(s) = (l,x) \Big\}$$

$$\times \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\alpha l \prod_{j=1}^{N(t)-N(s)} \chi_j\Big) \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(t)-N(s)} Y_k \Big(l \prod_{j=1}^{k-1} \chi_j\Big)\Big) \Big\}.$$

В последнем равенстве использовалась теорема Фубини, тот факт, что приращение $N(t) - N(s)$ не зависит от процесса $\vec{Q}_p(v)$, $v \in [0,s]$, а также вышеприведенный факт, что любой фиксированный сдвиг m у индексов соответствующих последовательностей величин не меняет их распределения.

Обозначим при $x = 0$

$$\rho_l(t,\vec{\gamma}) := \mathbf{E}_l \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_p(t))).$$

В силу (1.2)

$$\rho_l(t,\vec{\gamma}) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}(\lambda^{-1} I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p)),$$

где $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по λ.

Тогда имеем следующее равенство

$$L(k,\vec{\gamma}) = L(k,\vec{0}) e^{i\beta x} \rho_l(t-s,\vec{\gamma}). \tag{1.10}$$

Поскольку $L(0,\vec{0}) = 1$, то (1.10) влечет, что $L(0,\vec{\gamma}) = e^{i\beta x}\rho_l(t-s,\vec{\gamma})$, и, следовательно, выполняется (1.9). Отсюда вытекает марковость процесса $\vec{Q}_p(t)$, а поскольку характеристическая функция $L(0,\vec{\gamma})$ переходной вероятности зависит только от разности $t-s$, то этот процесс является однородным. Теорема доказана. $\square$

2. Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями. Рассмотрим предельное поведение при $a \to \infty$ процесса

$$\vec{Z}_a(t) := \Big(T_{\frac{1}{a}}(at), x + \frac{1}{\sqrt{a}} B_{\frac{1}{a}}(at)\Big), \quad t \geqslant 0.$$

При малой вероятности переключений $1/a$, мы в a раз увеличиваем время, при котором рассматривается процесс и в $\sqrt{a}$ уменьшаем значения сложного пуассоновского процесса с переключениями.

В качестве предельного процесса выступает процесс

$$\vec{V}_l(t) := \big(l(-1)^{N(t)}, S_l(t)\big), \qquad t \geqslant 0, \quad l = -1, 1,$$

где

$$S_l(t) := x + \sqrt{\lambda_1} \int\limits_0^t \sigma_{l(-1)^{N(s)}}\, dW(s), \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

– процесс броуновского движения с переключающейся дисперсией.

Теорема 2.1. *Предположим, что* $\mathbf{E}Y_1(l) = 0$ *и* $\mathbf{E}Y_1^2(l) = \sigma_l^2$, $l = -1, 1$. *Тогда, в предположении что* $\chi_0 = l$, *конечномерные распределения процесса* $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, *сходятся при* $a \to \infty$ *к конечномерным распределениям процесса* $\vec{V}_l(t)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала предельное поведение величин

$$\vec{Z}_a(\tau) := \Big(T_{\frac{1}{a}}(a\tau), x + \frac{1}{\sqrt{a}} B_{\frac{1}{a}}(a\tau)\Big), \quad \text{при} \qquad a \to \infty.$$

Поскольку начальное значение x второй компоненты этого вектора аддитивно входит в выражение, то можно рассматривать предельное поведение лишь при $x = 0$. Для сходимости совместных распределений двумерных векторов достаточно изучить предельное поведение при $a \to \infty$ их характеристических функций:

$$\mathbf{E}\exp\big(i\big(\vec{\gamma}, \vec{Z}_a(\tau)\big)\big) = I_l(\alpha, \beta/\sqrt{a}, a\lambda_1, 1/a), \quad \vec{\gamma} = (\alpha, \beta).$$

Используя асимптотическое разложение характеристической функции $f_l(\beta)$, при малых β, имеем

$$\begin{aligned} a\lambda_1\Big(1 - f_l(\beta/\sqrt{a})\big(1 - \tfrac{1}{a}\big)\Big) &= a\lambda_1\Big(1 - \big(1 - \frac{\beta^2\sigma_l^2}{2a} + o\big(\tfrac{1}{a}\big)\big)\big(1 - \tfrac{1}{a}\big)\Big) \\ &= \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_l^2/2 + o(1). \end{aligned}$$

Тогда в соотношениях (1.3)–(1.7) можно перейти к пределу. Обозначим

$$J_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1) := \lim_{a\to\infty} I_l(\lambda,\alpha,\beta/\sqrt{a},a\lambda_1,1/a). \tag{2.2}$$

и

$$J_{l,r}(\lambda,\beta,\lambda_1) := \lim_{a\to\infty} I_{l,r}(\lambda,\beta/\sqrt{a},a\lambda_1,1/a). \tag{2.3}$$

В результате, при $l=1,-1$ получим соотношения

$$J_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1) = \frac{\lambda(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_{-l}^2/2)e^{il\alpha}+\lambda\lambda_1 e^{-il\alpha}}{(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_1^2/2)(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_{-1}^2/2)-\lambda_1^2}. \tag{2.4}$$

$$J_{l,l}(\lambda,\beta,\lambda_1) = \frac{\lambda(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_{-l}^2/2)}{(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_1^2/2)(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_{-1}^2/2)-\lambda_1^2}. \tag{2.5}$$

и

$$J_{l.-l}(\lambda,\beta,\lambda_1) = \frac{\lambda\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_1^2/2)(\lambda+\lambda_1+\lambda_1\beta^2\sigma_{-1}^2/2)-\lambda_1^2}. \tag{2.6}$$

Знаменатель в этих формулах преобразуется к виду

$$\lambda^2+2\lambda\bigl(\lambda_1+\lambda_1\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)/4\bigr)+\lambda_1^2\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)/2+\lambda_1^2\beta^4\sigma_1^2\sigma_{-1}^2/4.$$

Сравнивая теперь выражение (2.4) с формулой (2.21) работы [2], и используя (2.17) из [2], а также соответствие $\sigma_l \longleftrightarrow \sqrt{\lambda_1}\sigma_l/2$, мы видим, что функция $J_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1)$ является преобразованием Фурье случайного вектора $\vec{V}_l(\tau)$. Таким образом, при $x=0$ имеем

$$J_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1) = \mathbf{E}\exp\bigl(i\alpha l(-1)^{N(\tau)}+i\beta S_l(\tau)\bigr),$$

и, аналогично,

$$J_{l,r}(\lambda,\beta,\lambda_1) = \mathbf{E}\bigl\{\exp\bigl(i\beta S_l(\tau)\bigr); l(-1)^{N(\tau)}=r\bigr\}.$$

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа по λ, из (2.2) выводим, что при $a\to\infty$

$$\mathbf{E}_l\exp\Bigl(\alpha T_{\frac{1}{a}}(at)+\frac{\beta}{\sqrt{a}}B_{\frac{1}{a}}(at)\Bigr)\to\mathbf{E}\exp\bigl(i\alpha l(-1)^{N(t)}+i\beta S_l(t)\bigr).$$

Это влечет сходимость переходных вероятностей марковского процесса $\Bigl(T_{\frac{1}{a}}(at), x+\frac{1}{\sqrt{a}}B_{\frac{1}{a}}(at)\Bigr)$ к переходным вероятностям марковского процесса $\bigl(l(-1)^{N(t)}, x+S_l(t)\bigr)$, $t\geqslant 0$, $l=-1,1$.

Следующие рассуждения, по сути дела, устанавливают сходимость конечномерных распределений рассматриваемого процесса к конечномерным распределениям предельного, основываясь на сходимости переходных вероятностей.

Не умаляя общности можно рассмотреть случай $\chi_0 = 1$ и $B_p(0) = 0$. Для произвольных $0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} = s < s_k = t$, и $r = 1, -1$, рассмотрим следующее выражение:

$$L_r(k, \vec{s}_k, \vec{\beta}_k, \lambda_1, p) := \mathbf{E}_1 \Big\{ \exp \Big(i \sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v)) \Big); \prod_{j=1}^{N(s_k)} \chi_j = r \Big\},$$

где $\vec{s}_k := (s_1, \dots, s_k)$, $\vec{\beta}_k := (\beta_1, \dots, \beta_k)$ и $\vec{\gamma}_v := (\alpha_v, \beta_v)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&L_r(k, \vec{s}_k, \vec{\beta}_k, \lambda_1, p)\\
&= \sum_{l=-1,1} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}_1 \Big\{ \exp \Big(i \sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v)) \Big); \prod_{j=1}^{N(s)} \chi_j = l, B_p(s) \in dx, \prod_{j=1}^{N(t)} \chi_j = r \Big\}\\
&= \sum_{l=-1,1} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}_1 \Big\{ \exp \Big(i \sum_{v=1}^{k-1} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_p(s_v)) + i\beta_k x \Big); \prod_{j=1}^{N(s)} \chi_j = l, B_p(s) \in \, dx \Big\}\\
&\times e^{i\alpha_k r} \mathbf{E} \Big\{ \exp \Big(i\beta_k \sum_{m=1}^{N(t)-N(s)} Y_m \Big(l \prod_{j=1}^{m-1} \chi_j \Big) \Big); l \prod_{j=1}^{N(t)-N(s)} \chi_j = r \Big\}\\
&= e^{i\alpha_k r} \sum_{l=-1,1} L_l(k, \vec{s}_{k-1}, \vec{\beta}^{\star}_{k-1}, \lambda_1, p) \, \rho_{l,r}(t - s, \beta_k, \lambda_1, p). \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Здесь $\vec{\beta}^{\star}_{k-1} = (\beta_1, \dots, \beta_{k-2}, \beta_{k-1} + \beta_k)$, и

$$\rho_{l,r}(t, \beta, \lambda_1, p)) := \mathbf{E}_l \Big\{ e^{i\beta B_p(t))}; \prod_{j=0}^{N(t)} \chi_j = r \Big\}.$$

В силу (1.5)

$$\rho_{l,r}(t, \beta, \lambda_1, p)) = \mathcal{L}^{-1}_{\lambda} (\lambda^{-1} I_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1, p)). \qquad (2.8)$$

Мы хотим для любого целого k доказать при $a \to \infty$ сходимость

$$\mathbf{E}_1 \exp \Big(i \sum_{v=1}^{k} \big(\alpha_v T_{\frac{1}{a}}(as_v) + \frac{\beta_v}{\sqrt{a}} B_{\frac{1}{a}}(as_v) \big) \Big) \to \mathbf{E} \exp \Big(i \sum_{v=1}^{k} \big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v) \big) \Big),$$

что соответствует сходимости конечномерных распределений. В силу принятых обозначений, для этого нам достаточно при $r=-1,1$ доказать сходимость

$$L_r(k, a\vec{s}_k, \vec{\beta}_k/\sqrt{a}, \lambda_1, 1/a) \to \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}\big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\big)\Big); (-1)^{N(s_k)} = r\Big\}. \tag{2.9}$$

Докажем это по индукции. При $k=1$

$$L_r(1, a\vec{s}_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, 1/a) = \rho_{1,r}(as_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, 1/a)).$$

Тогда из (2.3) и (2.8) вытекает, что при $a\to\infty$

$$\begin{aligned}\rho_{l,r}(as_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, 1/a)) &= \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\lambda^{-1} I_{l,r}(\lambda, \beta/\sqrt{a}, a\lambda_1, 1/a)\big)\\ &\to \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\lambda^{-1} J_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1)\big) = \mathbf{E}\big\{e^{i\beta S_l(t)}; l(-1)^{N(t)} = r\big\}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Предположим теперь, что сходимость (2.9) имеет место при $k-1$ и докажем ее при k. Из сделанного предположения и формул (2.7), (2.10) следует, что

$$\begin{aligned}&L_r(k, a\vec{s}_k, \vec{\beta}_k/\sqrt{a}, \lambda_1, 1/a)\\ &\to e^{i\alpha_k r}\sum_{l=-1,1}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k-1}\big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\big)\Big); (-1)^{N(s_{k-1})} = l\Big\}\\ &\times \mathbf{E}\big\{e^{i\beta_k S_l(t-s)}; l(-1)^{N(t-s)} = r\big\} =: L,\end{aligned}$$

где $\vec{\gamma}_v = (\alpha_v, \beta_v)$, $v = 1, \dots, k-2$, и $\vec{\gamma}_{k-1} = (\alpha_{k-1}, \beta_{k-1} + \beta_k)$. Убедимся теперь, что L совпадает с выражением, стоящим в правой части (2.9). Тем самым (2.9) будет доказано по индукции.

Мы преобразуем правую часть (2.9) в выражение для L. Рассмотрим процесс определенный в (2.1). Как и ранее полагаем $S_1(0)=0$. При $s<t$ на множестве $\{(-1)^{N(s)} = l\}$ справедливо следующее представление

$$S_1(t) := S_1(s) + \sqrt{\lambda_1}\int_0^{t-s} \sigma_{l(-1)^{\widetilde{N}(v)}}\, d\widetilde{W}(v), \qquad t \geqslant 0, \tag{2.11}$$

где $\widetilde{N}(v) := N(v+s) - N(s)$, $\widetilde{W}(v) = W(v+s) - W(s)$. Важно, что при фиксированном s процессы $\widetilde{N}(v)$ и $\widetilde{W}(v)$, $v\geqslant 0$, распределены так же как исходные процессы Пуассона и броуновского движения, и, кроме того, они не зависят от процесса $\vec{V}_1(q)$, $0\leqslant q\leqslant s$.

Тогда в силу (2.11) для $0 < s_1 < \dots < s_{k-1} = s < s_k = t$ имеем

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v))\Big); (-1)^{N(t)} = r\Big\}$$

$$= \sum_{l=-1,1}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\Big\{ e^{i\sum\limits_{v=1}^{k}\left(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\right)}; (-1)^{N(s)} = l, S_1(s) \in dx, (-1)^{N(t)} = r\Big\}$$

$$= e^{i\alpha_k r}\sum_{l=-1,1}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\Big\{ e^{i\sum\limits_{v=1}^{k-1}\left(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\right)+i\beta_k x}; (-1)^{N(s)} = l, S_1(s) \in\, dx\Big\}$$

$$\times\, \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\beta_k\sqrt{\lambda_1}\int_0^{t-s}\sigma_{l(-1)^{\widetilde{N}(v)}}\, d\widetilde{W}(v)\Big); l(-1)^{\widetilde{N}(t-s)} = r\Big\}.$$

Ясно, что полученное в правой части выражение совпадает с L. Теорема доказана. □

Рассмотрим процесс $L_a(t) := \dfrac{1}{\sqrt{a}}B_{\frac{1}{a}}(at)$, $t \in [0,T]$, который является второй компонентой двумерного процесса $\vec{Z}_a(t)$ на интервале $[0,T]$. Наряду со сходимостью конечномерных распределений процесса $L_a(t)$, $t \in [0,T]$, что следует из теоремы 2.1, можно установить слабую сходимость этих процессов в пространстве Скорохода $D[0,T]$ к процессу броуновского движения с переключающейся дисперсией.

Теорема 2.2. *Процессы $L_a(t)$, $t \in [0,T]$, слабо сходятся при $a \to \infty$ в пространстве $D[0,T]$ к процессу $S_l(t)$.*

Доказательство. Нам достаточно установить относительную компактность семейства процессов $L_a(t)$, $t \in [0,T]$. Для этого, согласно теореме 15.6 из [3], достаточно проверить следующее условие: при любых $s < v < t$

$$\mathbf{E}\big((L_a(t) - L_a(v))^2(L_a(v) - L_a(s))^2\big) \leqslant C(t-s)^2,$$

где C – некоторая константа. Левая часть этого соотношения имеет вид

$$D_a := \tfrac{1}{a^2}\mathbf{E}\Big\{\Big(\sum_{k=N(av)+1}^{N(at)} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)^2\Big(\sum_{m=N(as)+1}^{N(av)} Y_m\Big(\prod_{j=0}^{m-1}\chi_j\Big)\Big)^2\Big\}.$$

Для вычисления и оценки этого выражения воспользуемся независимостью величин $(Y_k(1), Y_k(-1))$, $k = 1, 2, \dots, \chi_j$, $j = 1, 2, \dots$, и процесса Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$. Применим теорему Фубини. Фиксируем значения величин $N(as)$, $N(av)$, $N(at)$, χ_j, $j = 1, 2, \dots$, и вычислим сначала математическое ожидание по величинам $Y_k(l)$, $l = -1, 1$, $k = 1, 2, \dots$, принимая во внимание их независимость при разных k. В результате имеем

$$\begin{aligned} D_a &\leqslant \frac{1}{a^2} \max_{l=-1,1} \sigma_l^4 \mathbf{E}\{(N(at) - N(av))(N(av) - N(as))\} \\ &= \frac{1}{a^2} \max_{l=-1,1} \sigma_l^4 \mathbf{E}(N(at) - N(av))\mathbf{E}(N(av) - N(as)) \\ &= \lambda_1^2 \max_{l=-1,1} \sigma_l^4 (t-v)(v-s) \leqslant \frac{\lambda_1^2}{4} \max_{l=-1,1} \sigma_l^4 (t-s)^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что процесс Пуассона является процессом с независимыми однородными приращениями и $\mathbf{E}N(t) = \lambda_1 t$. Теорема доказана. □

Литература

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* — Лань, Санкт-Петербург, 2013.
2. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
3. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М., 1977.

Borodin A. N. Limit behaviour of a compound Poisson process with switching.

The paper deals with the limit behaviour of a compound Poisson process with switching. The switching is provided with Bernulli's random variables. Under suitable normalization the limit process is a Brownian motion with switching variance.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 23 октября 2017 г.