Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ТЕЛЕГРАФНОГО ПРОЦЕССА И ДИФФУЗИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Это исследование продолжает работу начатую в [1]. Рассматривается специальный класс диффузий с переключениями. Имеются два набора диффузионных коэффициентов, отвечающих двум классическим диффузиям. Переключения с одного набора диффузионных коэффициентов на другой наступают в случайные моменты времени, соответствующие моментам скачков процесса Пуассона, независящего от исходных диффузий. Можно считать, что переключения задаются телеграфным процессом.

Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от телеграфного процесса и диффузии с переключениями. Для диффузий, в частности для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределений интегральных функционалов имеет работа М. Каца [2].

Можно рассматривать и более сложные диффузии с переключениями, когда выбор осуществляются из трех и более наборов диффузионных коэффициентов, при этом общий подход не меняется.

1. Телеграфный процесс и диффузии с переключениями. Отвечающий за переключения процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ определяется формулой

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\}\, \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

Ключевые слова: телеграфный процесс, диффузионные процессы, диффузии с переключениями, распределения функционалов.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН №01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01) и частично грантом РФФИ 16-01-00367 и грантом СПбГУ-DFG 6.65.37.2017.

где τ_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса Пуассона N.

Пусть $\mu(l,x)$ и $\sigma(l,x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, -1$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию ограниченности на линейный рост:

$$|\mu(l,x)| + |\sigma(l,x)| \leqslant C(1 + |x|) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sigma(l,x) > 0$ и что производная $\left(\frac{\mu(l,x)}{\sigma^2(l,x)}\right)'$ ограничена.

При каждом $l = 1, -1$, рассмотрим однородный диффузионный процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$X_l(t) = x + \int\limits_0^t \mu(l, X_l(u))\, du + \int\limits_0^t \sigma(l, X_l(u))\, dW(u), \quad t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Однородный диффузионный процесс с переключениями является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} S_l(t) = x &+ \int\limits_0^t \mu\big(l(-1)^{N(u)}, S_l(u)\big)\, du \\ &+ \int\limits_0^t \sigma\big(l(-1)^{N(u)}, S_l(u)\big)\, dW(u). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Поскольку пуассоновский процесс N не зависит от броуновского движения W, то вопрос о существовании и единственности сильного решения уравнения (1.2) решается в рамках классической теории стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [3, теорема 7.1 гл. II]).

Отличие этих процессов состоит в том, что первый начинает развиваться согласно диффузионным коэффициентам $\mu(1,x)$ и $\sigma(1,x)$, а второй – согласно $\mu(-1,x)$ и $\sigma(-1,x)$. После момента времени τ_1 эти процессы преобразуются друг в друга, хотя и со случайным начальным значением. На примере преобразования процесса S_l после момента τ_1 в процесс S_{-l} это означает следующее. При фиксированном l существует такое семейство процессов $\{S_x^{(-l)}(s)\}_{x\in\mathbf{R}}$, $s\geqslant 0$, которое не зависит от σ-алгебры событий $\mathcal{G}_{l,0}^{\tau_1}$, порожденных процессом X_l до момента остановки τ_1 (см. определение в [3] § 4 гл. I), что при каждом x конечномерные распределения у $S_x^{(-l)}$ и диффузии S_{-l} совпадают и выполняется равенство

$$S_l(s+\tau_1)=S^{(-l)}_{X_l(\tau_1)}(s), \qquad s\geqslant 0. \tag{1.3}$$

При определении σ-алгебры $\mathcal{G}_{l,0}^{\tau_1}$ естественную фильтрацию

$$\mathcal{G}_{l,0}^{t}:=\sigma(X_l(s),0\leqslant s\leqslant t)$$

процесса X_l нужно пополнить событиями, порожденными самой случайной величиной τ_1.

Рассмотрим семейство $S_{l,s,x}(t)$, $0\leqslant s\leqslant t$, $x\in\mathbf{R}$, $l=-1,1$, решений следующего стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} S_{l,s,x}(t)=x+\int_s^t \mu\big(l(-1)^{N(u)-N(s)},S_{l,s,x}(u)\big)\,du \\ +\int_s^t \sigma\big(l(-1)^{N(u)-N(s)},S_{l,s,x}(u)\big)\,dW(u). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Этот процесс не зависит от σ-алгебры

$$\mathcal{F}_0^s:=\sigma(N(v),W(v),0\leqslant v\leqslant s),$$

порожденной процессами $N(v)$ и $W(v)$ до момента времени s, поскольку пуассоновский процесс и броуновское движение являются процессами с независимыми приращениями. Делая в уравнении (1.4) замену переменных $h=t-s$ и обозначая $\widetilde{N}(v):=N(v+s)-N(s)$, $\widetilde{W}(v)=W(v+s)-W(s)$, получаем, что процесс $\widetilde{S}_{l,x}(h):=S_{l,s,x}(h+s)$,

$h \geqslant 0$, является решением уравнения

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{l,x}(h) = x &+ \int_0^h \mu\bigl(l(-1)^{\widetilde{N}(v)}, \widetilde{S}_{l,x}(v)\bigr)\,dv \\ &+ \int_0^h \sigma\bigl(l(-1)^{\widetilde{N}(v)}, \widetilde{S}_{l,x}(v)\bigr)\,d\widetilde{W}(v).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Распределения этого решения не зависят от s так как это верно для процессов $\widetilde{N}(v)$ и $\widetilde{W}(v)$. При каждом l процесс $S_{l,s,x}(t)$, можно выбрать так, чтобы он был почти наверное непрерывным по переменным $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbf{R}$, и

$$S_l(t) = S_{l(-1)^{N(s)},s,S_l(s)}(t) \qquad \text{п.н.} \tag{1.6}$$

Положим при $l = -1, 1$

$$\overrightarrow{V}_l(t) := \bigl(l(-1)^{N(t)}, S_l(t)\bigr), \qquad t \geqslant 0.$$

Заметим, что $\overrightarrow{V}_l(0) = (l, x)$. Докажем, что $\overrightarrow{V}_l(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным марковским процессом. Не умаляя общности считаем $l = 1$. Положим $\mathcal{G}_v^s := \sigma(\overrightarrow{V}_1(u), v \leqslant u \leqslant s)$. Поскольку $\mathcal{G}_0^s \subseteq \mathcal{F}_0^s$ и $\mathcal{G}_s^s \subseteq \mathcal{F}_0^s$, то процесс $S_{l,s,x}(t)$ не зависит от σ-алгебр $\mathcal{G}_0^s$ и $\mathcal{G}_s^s$.

Для доказательства марковости процесса $\overrightarrow{V}_l(t)$, $t \geqslant 0$, достаточно доказать, что для любых $0 < s < t$ и произвольного $\vec{\gamma} = (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{E}\bigl\{\exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{V}_1(t)))\bigl|\mathcal{G}_0^s\bigr\} = \mathbf{E}\bigl\{\exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{V}_1(t)))\bigl|\mathcal{G}_s^s\bigr\}. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\varphi_{l,x}(t, \vec{\gamma}) := \mathbf{E}\bigl\{\exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{V}_l(t)))\bigl|\overrightarrow{V}_l(0) = (l, x)\bigr\}.$$

В силу (1.5) справедливо равенство

$$\varphi_{l,x}(t, \vec{\gamma}) = \mathbf{E}\exp\bigl(i\alpha l(-1)^{N(t)} + i\beta\widetilde{S}_{l,x}(t)\bigr).$$

Применяя (1.6), получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\bigl\{\exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{V}_1(t)))\bigl|\mathcal{G}_0^s\bigr\} \\ &\quad= \mathbf{E}\bigl\{\exp\bigl(i\alpha(-1)^{N(t)-N(s)}(-1)^{N(s)} + i\beta\widetilde{S}_{(-1)^{N(s)},S_1(s)}(t-s)\bigr)\bigl|\mathcal{G}_0^s\bigr\} \\ &\quad= \varphi_{(-1)^{N(s)},S_1(s)}(t-s, \vec{\gamma}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

В последнем равенстве использовалась обобщенная лемма Фубини (см. [3, лемма 2.1 гл. I]). В нашем случае этот результат применим и для условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_s^s$. Аналогично имеем

$$\{\exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{V}_1(t)))\big|\, \mathcal{G}_s^s\} = \varphi_{(-1)^{N(s)}, S_1(s)}(t-s, \vec{\gamma}).$$

Тем самым равенство (1.7) доказано. Однородность марковского процесса следует из (1.8), поскольку аргумент функции $\varphi_{(-1)^{N(s)}, S_1(s)}$ зависит от разности моментов времени.

Отметим, что $\varphi_{l,x}(t, \vec{\gamma})$ является характеристической функцией переходной функции процесса $\overrightarrow{V}_l(t)$.

2. Распределение интегральных функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями. Рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A_l(t) := \int_0^t f(l(-1)^{N(s)}, S_l(s))\, ds, \quad f \geqslant 0, \quad l = 1, -1$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_l(s)$, $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_l(s)$.

Общий подход к вычислению распределений интегральных функционалов от броуновского движения был описан в [3, § 1 гл. III]. Этот подход применим к широкому классу процессов, в частности к диффузиям с переключениями. Поэтому мы будем рассматривать лишь основные результаты, которые позволяют вычислять искомые совместные распределения в рамках этого общего подхода.

Пусть τ – не зависящий от процессов Пуассона $\{N(s),\ s \geqslant 0\}$ и броуновского движения $\{W(s),\ s \geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Этот момент соответствует преобразованию Лапласа по времени t. Для того чтобы получить распределение функционала в момент t, следует обратить преобразование Лапласа по λ в распределении соответствующего функционала в момент τ.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессам S_l, $l = 1, -1$, при условии $S_l(0) = x$. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(l, x)$ и $f(l, x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, -1$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$ и Φ ограничена. Тогда* *функция*

$$Q_l(x) := \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi\bigl(l(-1)^{N(\tau)}, S_l(\tau)\bigr) \times \exp\biggl(-\int\limits_0^\tau f\bigl(l(-1)^{N(s)}, S_l(s)\bigr)\,ds\biggr)\biggr\} \tag{2.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_l(x) = \widetilde{M}_l(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y^{(l)}(x)\,Q_l(y)\,dy, \tag{2.2}$$

где

$$\widetilde{M}_l(x) := M_l(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{-l}(z)G_z^{(l)}(x)\,dz, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{G}_y^{(l)}(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_y^{(-l)}(z)G_z^{(l)}(x)\,dz, \tag{2.4}$$

и при каждом $l = -1, 1$ *функция* $M_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным ограниченным решением уравнения*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)M''(x) + \mu(l,x)M'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(l,x))M(x) = -\lambda\varPhi(l,x), \tag{2.5}$$

а $G_z^{(l)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)G''(x) + \mu(l,x)G'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(l,x))G(x) = 0,\ x \neq z, \tag{2.6}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(l,z). \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывных функций f и $\varPhi$ уравнение (2.5) при каждом l надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций f и $\varPhi$, а в точках разрыва f и $\varPhi$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

Аналогичное замечание касается всех уравнений с кусочно непрерывными коэффициентами.

Доказательство теоремы 2.1. Положим

$$M_l(x) := \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(l, X_l(\tau)) \exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau}(\lambda_1 + f(l, X_l(s)))\,ds\biggr)\biggr\}. \tag{2.8}$$

Тогда M_l – единственное ограниченное решение уравнения (2.5) (см. [3] гл. IV, теорема 4.2, $a=-\infty$, $b=\infty$).

Положим

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\biggr); X_l(\tau_1) < z\biggr\}. \tag{2.9}$$

Эта функция – решение задачи (2.6), (2.7) (см. [3], гл. IV, теорема 6.2, $a=-\infty$, $b=\infty$).

Для всех x имеем оценку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz = \mathbf{E}_x \exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\biggr) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\widetilde{M}_l(x)| &\leqslant |M_l(x)| + \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-l}(x)|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_l(x)| + \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-l}(x)|, \end{aligned} \tag{2.10}$$

и, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}_y^{(l)}(x)\,dy \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz \leqslant \Bigl(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Bigr)^2. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.2) имеет единственное ограниченное решение. В силу (2.11) это доказывается аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1]. Из этого доказательства также следует, что для неотрицательных $\widetilde{M}_l$ и $\widetilde{G}_z^{(l)}$, решение уравнения (2.2) неотрицательно.

Для доказательства того, что Q_l является решением уравнения (2.2), достаточно доказать, что функция Q_l удовлетворяет соотношению

$$Q_l(x) = M_l(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, Q_{-l}(z)\, dz. \tag{2.12}$$

Подставляя в правую часть (2.12) аналогичное выражение для Q_{-l}, получаем

$$\begin{aligned} Q_l(x) = M_l(x) &+ \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, M_{-l}(z)\, dz \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x) G_y^{(-l)}(z)\, dz\, Q_l(y)\, dy. \end{aligned}$$

Это и есть уравнение (2.2).

Докажем (2.12). Имеем

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(l, X_l(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(l, X_l(s))\, ds\Big); \tau < \tau_1\Big\} \\ &+ \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi\big(l(-1)^{N(\tau)}, S_l(\tau)\big) \exp\Big(-\int_0^{\tau_1} f(l, X_l(s))\, ds\Big) \\ &\times \exp\Big(-\int_{\tau_1}^{\tau} f\big(l(-1)^{N(s)}, S_l(s)\big)\, ds\Big); \tau_1 \leqslant \tau\Big\} \\ &=: V_1(x) + V_2(x), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые. Поскольку τ_1 не зависит от τ и процесса X_l, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\big(\tau < \tau_1 \big| \sigma(X_l(\cdot), \tau)\big) = e^{-\lambda_1 \tau},$$

где $\sigma(X_l(\cdot), \tau)$ – σ-алгебра событий, порожденная процессом X_l и моментом τ. Тогда, применяя теорему Фубини, и сначала вычисляя математическое ожидание по τ_1, а затем по процессу X_l и моменту τ, получим, что

$$V_1(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\Phi(l,X_l(\tau))\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau}(\lambda_1+f(l,X_l(s)))\,ds\biggr)\biggr\}=M_l(x). \quad (2.14)$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое $V_2(x)$, воспользуемся независимостью момента τ от процесса S_l и момента τ_1. По теореме Фубини имеем

$$V_2(x)=\lambda\mathbf{E}_x\int\limits_{\tau_1}^{\infty}e^{-\lambda t}\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}f(l,X_l(s))\,ds\biggr)$$

$$\times\,\Phi\bigl(l(-1)^{N(t)},S_l(t)\bigr)\exp\biggl(-\int\limits_{\tau_1}^{t}f\bigl(l(-1)^{N(s)},S_l(s)\bigr)\,ds\biggr)dt.$$

Воспользуемся представлением (1.3) и в выражении для $V_2(x)$ сделаем замену переменной $t=u+\tau_1$. Положим $\widetilde N(u):=N(u+\tau_1)-N(\tau_1)$. Поскольку $(-1)^{N(\tau_1)}=-1$, то

$$V_2(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda+f(l,X_l(s)))\,ds\biggr)$$

$$\times\,\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}\Phi\bigl(-l(-1)^{\widetilde N(u)},\widetilde S_{-l,X_1(\tau_1)}(u)\bigr)$$

$$\times\exp\biggl(-\int\limits_0^{u}f\bigl(-l(-1)^{\widetilde N(v)},\widetilde S_{-l,X_l(\tau_1)}(v)\bigr)\,dv\biggr)du\biggr\}.$$

По теореме Фубини интеграл по параметру u с весом $\lambda e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde\tau$ вместо u, где $\widetilde\tau$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым, для $V_2(x)$ получим следующее выражение:

$$V_2(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda+f(l,X_l(s)))\,ds\biggr)$$

$$\times \mathbf{E}\Big\{\varPhi\big(-l(-1)^{\widetilde{N}(\widetilde{\tau})}, \widetilde{S}_{-l,X_l(\tau_1)}(\widetilde{\tau})\big)$$

$$\times \exp\bigg(-\int_0^{\widetilde{\tau}} f\big(-l(-1)^{\widetilde{N}(s)}, \widetilde{S}_{-l,X_l(\tau_1)}(s)\big)\,ds\bigg)\bigg|\mathcal{G}_{l,0}^{\tau_1}\Big\}\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1 гл. I из [3], получим

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\bigg\{\exp\bigg(-\int_0^{\tau_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\bigg)Q_{-l}(X_l(\tau_1))\bigg\}.$$

Это выражение преобразуется к следующему виду:

$$V_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\bigg\{\exp\bigg(-\int_0^{\tau_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\bigg); X_l(\tau_1) \in dz\bigg\}Q_{-l}(z)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,Q_{-l}(z)\,dz.$$

Теперь из (2.13) и (2.14) следует (2.12). Теорема доказана. □

Сформулируем результат, позволяющий вычислять совместное распределение интегрального функционала от телеграфного процесса, диффузии с переключениями и функционалов инфимума и супремума. Доказательство этого результата аналогично приведенному при доказательстве теоремы 2.1, нужно только воспользоваться теоремами 4.2 и 6.2 гл. IV из [3] при $a \neq -\infty$ либо $b \neq \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $\varPhi(l,x)$ и $f(l,x)$, $x \in [a,b]$, $l = 1,-1$, – кусочно непрерывные функции по $x \in [a,b]$. Предположим, что $f \geqslant 0$ и $\varPhi$ ограничена, когда либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$. Тогда функция*

$$Q_l(x) := \mathbf{E}_x\bigg\{\varPhi(l(-1)^{N(\tau)}, S_l(\tau))\exp\bigg(-\int_0^{\tau} f(l(-1)^{N(s)}, S_l(s))\,ds\bigg);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_l(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_l(s) \leqslant b\bigg\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения (2.2), *для которого выполняются* (2.3), (2.4), *и при каждом $l = -1,1$ функция*

$M_l(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным решением уравнения (2.5) с граничными условиями

$$M(a)=0,\qquad M(b)=0, \tag{2.15}$$

а при $z\in[a,b]$ функция $G_z^{(l)}(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным непрерывным решением задачи (2.6), (2.7), дополненной граничными условиями

$$G(a)=0,\qquad G(b)=0. \tag{2.16}$$

Полагаем $M_l(x)=0$, $G_z^{(l)}(x)=0$ при $x,z\notin(a,b)$.

Пример 2.1. Вычислим совместную характеристическую функцию процесса $(-1)^{N(t)}$ и броуновского движения с переключающейся дисперсией, который имеет следующий вид:

$$S_l(t):=x+2\int\limits_0^t \sigma_{l(-1)^{N(s)}}\,dW(s), \tag{2.17}$$

где σ_1, σ_{-1} – два произвольных коэффициента. Коэффициент 2 перед интегралом выбран для упрощения формул.

Вычислим

$$Q_1(x)=\mathbf{E}_x\exp\Bigl(i\alpha(-1)^{N(\tau)}+i\beta S_1(\tau)\Bigr).$$

Здесь $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$, $t\geqslant 0$, и $x\in\mathbf{R}$ обозначает начальное состояние процесса S_1. В силу (2.17),

$$\mathbf{E}_x e^{i\beta S_1(t)}=e^{i\beta x}\mathbf{E}_0 e^{i\beta S_1(t)}. \tag{2.18}$$

Для вычисления $Q_1(x)$ применим теорему 2.1 при $\varPhi(l,x)=e^{i\alpha l+i\beta x}$, $f(x)\equiv 0$ и $\sigma(l,x)=2\sigma_l$, $\mu(x)\equiv 0$. В данном случае ограниченное решение уравнения

$$2\sigma_l^2M_l''(x)-(\lambda+\lambda_l)M_l(x)=-\lambda e^{i\alpha l}e^{i\beta x}$$

имеет вид

$$M_l(x)=\frac{\lambda e^{i\alpha l}e^{i\beta x}}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_l^2\beta^2}.$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (2.6), (2.7) имеет вид

$$G_z^{(l)}(x)=\frac{\lambda_1}{2\sigma_l\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}}e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/2\sigma_l}.$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x-z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}}{\delta} e^{-|x-z|\delta}\,dx = \frac{2e^{i\beta z}}{\delta^2+\beta^2}. \tag{2.19}$$

Нетрудно убедится, что

$$\widetilde{M}_l(x) = \frac{\lambda e^{i\alpha} e^{i\beta x}}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_l^2\beta^2} + \frac{\lambda e^{-i\alpha} e^{i\beta x}\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_l^2\beta^2)(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-l}^2\beta^2)}.$$

Поскольку преобразование Фурье свертки функций равно произведению преобразований Фурье, то с учетом (2.19) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y} G_y^{(l)}(x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y} \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(-l)}(z-y) G_0^{(l)}(x-z)\,dz\,dy$$
$$= \frac{\lambda_1^2 e^{i\beta x}}{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_l^2\beta^2)(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-l}^2\beta^2)}.$$

Обозначим

$$Q_1 := \mathbf{E}_0 e^{i\alpha(-1)^{N(\tau)}+i\beta S_1(\tau)}. \tag{2.20}$$

Тогда, в силу (2.17), $Q_1(x) = e^{i\beta x} Q_1$. В результате, уравнение (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$e^{i\beta x} Q_1 = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_1^2\beta^2}\left\{e^{i\alpha} + \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha}}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\beta^2}\right\}$$
$$+ \frac{\lambda_1^2 e^{i\beta x} Q_1}{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_1^2\beta^2)(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\beta^2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda} Q_1 = \frac{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\beta^2)e^{i\alpha} + \lambda_1 e^{-i\alpha}}{\lambda^2 + 2\lambda(\lambda_1+\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)) + 2\lambda_1\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2) + 4\beta^4\sigma_1^2\sigma_{-1}^2}.$$

Вычисляя аналогичное выражение для $\frac{1}{\lambda} Q_{-1}$, получим, что при $x = 0$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_0 \exp\Big(i\alpha l(-1)^{N(\tau)} + i\beta S_l(\tau)\Big)$$
$$= \frac{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-l}^2\beta^2)e^{il\alpha} + \lambda_1 e^{-il\alpha}}{\lambda^2 + 2\lambda(\lambda_1+\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)) + 2\lambda_1\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2) + 4\beta^4\sigma_1^2\sigma_{-1}^2}. \tag{2.21}$$

Обозначим

$$r_1 = \lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) - \sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2},$$

$$r_2 = \lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + \sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}.$$

Тогда с учетом (2.20) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_0 e^{i\alpha(-1)^{N(\tau)}+i\beta S_1(\tau)} &= \frac{i\lambda_1 \sin\alpha}{\sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\Big(\frac{1}{\lambda + r_2} - \frac{1}{\lambda + r_1}\Big) \\ &+ \Big(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\Big)\frac{e^{i\alpha}}{\lambda + r_1} \\ &+ \Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1 - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\Big)\frac{e^{-i\alpha}}{\lambda + r_2}.\end{aligned}$$

Обращая преобразование Лапласа по λ, получаем

$$\begin{aligned}&e^{t(\lambda_1+\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2))}\,\mathbf{E}_0 e^{i\alpha(-1)^{N(t)}+i\beta S_1(t)} \\ &= \Big(\frac{e^{i\alpha}}{2} + \frac{(\lambda_1 - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2))e^{i\alpha} - 2i\lambda_1\sin\alpha}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\Big)e^{t\sqrt{\lambda_1^2+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}} \\ &+ \Big(\frac{e^{-i\alpha}}{2} - \frac{(\lambda_1 - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2))e^{-i\alpha} - 2i\lambda_1\sin\alpha}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \beta^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\Big)e^{-t\sqrt{\lambda_1^2+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}}.\end{aligned}$$

При $\beta = 0$ имеем

$$\mathbf{E}e^{i\alpha(-1)^{N(\tau)}} = e^{i\alpha} - \frac{2\lambda_1 i \sin\alpha}{\lambda + 2\lambda_1},$$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha(-1)^{N(t)}} = e^{i\alpha} - i\sin\alpha\big(1 - e^{-2\lambda_1 t}\big),$$

что нетрудно проверить и прямыми вычислениями.

Пример 2.2. Вычислим совместную характеристическую функцию телеграфного процесса

$$T(t) := \int_0^t (-1)^{N(s)}\,ds$$

и броуновского движения с переключающейся дисперсией из примера 2.1.

Вычислим сначала функцию

$$Q_1(x) := \mathbf{E}_x \exp\Big(-\alpha T(\tau) - \gamma\tau + i\beta S_1(\tau)\Big). \tag{2.22}$$

Здесь $\alpha \in [0,\infty)$, $\beta \in \mathbf{R}$, $t \geqslant 0$, $\gamma \geqslant \alpha$ и $x \in \mathbf{R}$ обозначает начальное состояние процесса $S_1(t)$. В (2.23) присутствует множитель $\gamma\tau$ для того, чтобы получился неотрицательный интегральный функционал от $(-1)^{N(s)}$, $s \in [0,t]$. Для вычисления $Q_1(x)$ применим теорему 2.1 при $\Phi(l,x) = e^{i\beta x}$, $f(l,x) = \alpha l + \gamma \geqslant 0$ и $\sigma(l,x) = 2\sigma_l$, $\mu(x) \equiv 0$, $l = 1,-1$. В данном случае ограниченное решение уравнения

$$2\sigma_l^2 M_l''(x) - (\lambda + \lambda_l + \alpha l + \gamma))M_l(x) = -\lambda e^{i\beta x}$$

имеет вид

$$M_l(x) = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + \lambda_1 + \alpha l + \gamma + 2\sigma_l^2\beta^2}.$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (2.6), (2.7) имеет вид

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{\lambda_1}{2\sigma_l\sqrt{2\lambda + 2\lambda_1 + 2\alpha l + 2\gamma}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+2\alpha l+2\gamma}/2\sigma_l}.$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x-z)$. Применяя (2.19), нетрудно убедится, что

$$\widetilde{M}_l(x) = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + \lambda_1 + \alpha l + \gamma + 2\sigma_l^2\beta^2} + \frac{\lambda e^{i\beta x}\lambda_1}{(\lambda + \lambda_1 + \alpha l + \gamma + 2\sigma_l^2\beta^2)(\lambda + \lambda_1 + \alpha l + \gamma + 2\sigma_{-l}^2\beta^2)}.$$

Поскольку преобразование Фурье свертки функций равно произведению преобразований Фурье, то с учетом (2.19) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y} G_y^{(l)}(x)\,dy = \frac{\lambda_1^2 e^{i\beta x}}{(\lambda + \lambda_1 + \alpha l + \gamma + 2\sigma_l^2\beta^2)(\lambda + \lambda_1 - \alpha l + \gamma + 2\sigma_{-l}^2\beta^2)}.$$

Обозначим

$$Q_1 := \mathbf{E}_0 \exp\Big(-\alpha T(\tau) - \gamma\tau + i\beta S_l(\tau)\Big). \tag{2.23}$$

Тогда, в силу (2.17), $Q_1(x) = e^{i\beta x}Q_1$. В результате уравнение (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$e^{i\beta x}Q_1 = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + \lambda_1 + \alpha + \gamma + 2\sigma_1^2\beta^2}\Big\{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1 - \alpha + \gamma + 2\sigma_{-1}^2\beta^2}\Big\} + \frac{\lambda_1^2 e^{i\beta x}Q_1}{(\lambda + \lambda_1 + \alpha + \gamma + 2\sigma_1^2\beta^2)(\lambda + \lambda_1 - \alpha + \gamma + 2\sigma_{-1}^2\beta^2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda}Q_1 = \frac{\lambda + 2\lambda_1 - \alpha + \gamma + 2\sigma_{-1}^2\beta^2}{(\lambda + r_1)(\lambda + r_2)},$$

где

$$r_1 = \lambda_1 + \gamma + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) - \sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2},$$

$$r_2 = \lambda_1 + \gamma + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + \sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2}.$$

Тогда с учетом (2.23) имеем

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_0 e^{-\alpha T(\tau) - \gamma\tau + i\beta S_1(\tau)} = \Big(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 - \alpha - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2}}\Big)\frac{1}{\lambda + r_1}$$
$$+ \Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1 - \alpha - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2}}\Big)\frac{1}{\lambda + r_2}.$$

Обращая преобразование Лапласа по λ и сокращая обе части равенства на $e^{-\gamma t}$, получаем

$$\mathbf{E}_0 e^{-\alpha T(t) + i\beta S_1(t)} = \Big(\frac{1}{2} + \frac{(\lambda_1 - \alpha - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2))}{2\sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2}}\Big)$$
$$\times e^{-t(\lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) - \sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2})}$$
$$+ \Big(\frac{1}{2} - \frac{(\lambda_1 - \alpha - \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2))}{2\sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2}}\Big)$$
$$\times e^{-t(\lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + \sqrt{\lambda_1^2 + (\beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2) + \alpha)^2})}.$$

При $\sigma_1 = \sigma_{-1}$ процесс $S_1(t)$ имеет вид $S_1(t) = x + 2\sigma_1 W(t)$, процессы $T(t)$ и $S_1(t)$ независимы и

$$\mathbf{E} e^{-\alpha T(t)} = \Big(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 - \alpha}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \alpha^2}}\Big)e^{-t(\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 + \alpha^2})}$$
$$+ \Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1 - \alpha}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \alpha^2}}\Big)e^{-t(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + \alpha^2})}.$$

Литература

1. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **454** (2016), 52–81.
2. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.

3. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Санкт-Петербург, Лань, 2013
4. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований.* т. I, Москва, Наука, 1969

Borodin A. N. Joint distributions of functionals of telegraph process and switching diffusions.

The paper deals with the methods for computing joint distributions of functionals of telegraph process and switching diffusions. The switching between two sets of diffusion coefficients comes at the Poisson time moments independent of the initial diffusions. It is also possible to consider the more general switching diffusions when the choice is taken from three and more sets of diffusion coefficients.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2017 г.