Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

Я. И. Белопольская, А. О. Степанова

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИСТЕМЫ МГД–БЮРГЕРС

§1. Введение

Целью этой работы является построение стохастических моделей для пространственно-временной динамики систем нелинейных параболических уравнений следующего вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{mk}(u)\nabla_i u_m = \frac{\sigma_k^2}{2}\Delta u_k, \quad u_k(0,x) = u_k(x), \tag{1.1}$$
$$k = 1,\dots,d_1.$$

Системы уравнений такого вида популярны как в теории уравнений в частных производных, так и в прикладных областях, и их называют системами диффузии-конвекции. В частности, такой вид имеют параболические законы сохранения,

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \operatorname{div}[F_k(u)] = \frac{\sigma_k^2}{2}\Delta u_k, \quad u_k(0,x) = u_k(x), \quad k = 1,\dots,d_1. \tag{1.2}$$

Действительно, уравнения (1.1) и (1.2) совпадают, если положить

$$B^i_{mk}(u) = \frac{\partial F_{ki}(u)}{\partial u_m}.$$

Известно ([1–5]), что задача Коши для некоторых классов систем нелинейных (семилинейных, квазилинейных) параболических уравнений допускает редукцию к соответствующей стохастической системе. В частности, такую редукцию допускает обратная задача Коши для системы вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial s} + \mathcal{L}^u u_k + \sum_{l=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{lk}(x,u)\nabla_i u_l + \sum_{l=1}^{d_1} c_{lk}(x,u)u_l = 0, \tag{1.3}$$
$$u_k(T,x) = u_{0k}(x), \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \quad k = 1,\dots,d_1,$$

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, марковские цепи системы квазилинейных параболических уравнений, классические решения задачи Коши.

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01136.

[1], где

$$\mathcal{L}^u u_k = a(x,u)\cdot\nabla u_k + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A(x,u)\nabla^2 u_k A^*(x,u)$$

и задача Коши для системы без конвективных членов, но с различными коэффициентами диффузии

$$\frac{\partial u_m}{\partial s} + \mathcal{L}^u_m u_m + [Q^u u]_m = 0, \quad u_m(T,x) = u_{0m}(x), \quad m = 1,\dots,M, \tag{1.4}$$

[3, 5], где

$$[\mathcal{L}^u_m u]_m = a_m(x,u)\cdot\nabla u_m + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A_m(x,u)\nabla^2 u_m A^*_m(x,u),$$

и $[Q^v u]_m = \sum\limits_{l=1}^{M} q_{lm}(x,v)u_l$.

Вероятностные представления классических решений задачи Коши (1.3) и (1.4) можно построить следующим образом.

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – заданное вероятностное пространство, $w(t)\in R^d$ – определенный на нем стандартный винеровский процесс, и приняты обозначения вида $a^u(x) = a(x,u(x))$.

Для того, чтобы редуцировать задачу Коши (1.3) к соответствующей стохастической системе, рассмотрим стохастические уравнения относительно случайных процессов $\xi(\theta),\eta(\theta)$,

$$d\xi_{s,x}(\theta) = a^u(\xi_{s,x}(\theta))d\theta + A^u(\xi_{s,x}(\theta))dw(\theta), \tag{1.5}$$

$$d\eta(\theta) = c^u(\xi_{s,x}(\theta))\eta(\theta)d\theta + C^u(\xi_{s,x}(\theta))(\eta(\theta),dw(\theta)), \tag{1.6}$$

$$\xi(s) = x\in R^d, \quad \eta(s) = h\in R^{d_1},$$

и замкнем полученную систему, добавив к ней соотношение

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle], \tag{1.7}$$

где $\langle h,u\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d_1} h_k u_k$.

Как показано в работах [1, 2], если коэффициенты $a^u(x)$, $A^u(x)$, $c^u(x)$, $B^u(x) = C^u(x)A^u(x)$ сублинейны и липшицевы по x и полилинейны по u, а начальная функция $u_0(x)$ ограничена и липшицева, то существует единственное решение системы (1.5)–(1.7), а, при дополнительных условиях гладкости коэффициентов и начальных данных, функция $u(s,x)$ вида (1.7) задает классическое решение задачи Коши (1.3).

Линейные и нелинейные системы второго типа изучались рядом авторов [3–6]. Для того, чтобы построить вероятностное представление решения задачи Коши (1.4) для систем второго типа, наряду с винеровским процессом $w(t)$ рассмотрим марковскую цепь $\gamma(t)$ с непрерывным временем и дискретным множеством состояний $V = \{1, 2, \dots, M\}$, имеющую переходную вероятность

$$\mathbf{P}(\gamma(t + \Delta t) = m | \gamma(t) = l) = q^u_{lm} \Delta t + o(\Delta t).$$

Эту марковскую цепь можно интерпретировать как скачкообразный процесс, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\gamma(t) = \int_0^\infty g^v(\xi(t), \gamma(t-), z)\, p(dt, dz), \tag{1.8}$$

где $p(dt, dz)$ – пуассоновская случайная мера с интенсивностью

$$\mathbf{E}\, p(dt, dz) = dzdt,$$

$$g^v(x, l, z) = \sum_{m=1}^{M} (m - l)\, I_{\{z \in \Delta_{lm}(x,v)\}},$$

а $\Delta_{lm}(x, v)$ – семейство полузамкнутых слева интервалов, покрывающих положительную вещественную полуось и имеющих длину $q_{lm}(x, v)$.

Предполагая, что процессы $p([0, t), dz)$ и $w(t)$ независимы, обозначим $\mathcal{F}_t = \sigma\{(\xi(s), \gamma(s)), s \leqslant t\}$ – поток σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденный этими случайными процессами, и рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi(\theta) = a^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))\, d\theta + A^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))\, dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \tag{1.9}$$

$$d\gamma(\theta) = \int_0^\infty g^v(\xi(\theta), \gamma(\theta), z)\, p(d\theta, dz), \quad \gamma(s) = l, \tag{1.10}$$

с замыкающим соотношением

$$v(s, x, m) = \mathbf{E}[v_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))]. \tag{1.11}$$

Как следует из [5], если существует единственное классическое решение $u(s, x, m)$ задачи Коши (1.4), то оно допускает представление вида (1.11). Справедливы и обратные утверждения.

Пусть коэффициенты $a^v(x), A^v(x)$ в (1.9) имеют рост не выше линейного по x и полилинейны по v, коэффициенты $c^v(x), C^v(x)$ в (1.10) ограничены по x и полилинейны по v, и все они дважды дифференцируемы. Пусть, кроме того, начальная функция $u_0(x,m)$ ограничена и дважды дифференцируема, тогда система (1.9)–(1.11) эквивалентна задаче Коши (1.3). Аналогичный результат справедлив и для систем (1.6)–(1.8) и (1.4).

Отметим два важных общих свойства систем типа (1.3) и (1.4). Оба типа систем можно рассматривать как скалярные уравнения в соответствующем расширенном фазовом пространстве. При этом систему (1.3) можно рассматривать как уравнение относительно скалярной функции $\Phi(s,x,h) = \langle h, u(s,x)\rangle$, заданной на множестве $[0,T]\times R^d\times R^{d_1}$, а систему (1.4) можно рассматривать как уравнение относительно скалярной функции $u(s,x,m)\equiv u_m(s,x)$, заданной на множестве $[0,T]\times R^d\times V$. Еще одно важное свойство этих систем связано с возможностью свести соответствующие прямые задачи Коши

$$\frac{\partial v_k}{\partial s} = \mathcal{L}^v v_k + \sum_{l=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{lk}(x,v)\nabla_i v_l + \sum_{l=1}^{d_1} c_{lk}(x,v)v_l, \tag{1.12}$$

$$v_k(0,x) = v_{0k}(x), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad k=1,\dots,d_1,$$

и

$$\frac{\partial v_m}{\partial s} = \mathcal{L}^v_m v_v + [Q^v v]_m, \quad v_m(0,x) = v_{0m}(x), \quad m=1,\dots M, \tag{1.13}$$

к обратным задачам Коши (1.3) и (1.4) с помощью формальной замены $v(s,x) = u(T-s,x)$.

В ряде случаев в физических и биологических задачах возникают системы более общие по сравнению с описанными выше, например, системы с недиагональным вхождением членов первого порядка, как в системе (1.3), и диагональным вхождением членов второго порядка с различными коэффициентами диффузии, как в системе (1.4), а также системы с полностью недиагональным вхождением членов второго порядка [7,8].

В качестве примера таких систем рассмотрим простейшую систему уравнений магнитогидродинамики (система МГД–Бюргерса) [9,10],

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \langle v,\nabla\rangle v = \frac{1}{2}\nu^2\Delta v + (\nabla\times B)\times B, \quad v(0,x) = v_0(x), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\sigma^2}\Delta B + \nabla\times(v\times B), \quad B(0,x) = B_0(x), \tag{1.15}$$

где $\times$ – векторное произведение, $v \in R^3$ – скорость течения жидкости, $B \in R^3$ – магнитное поле, μ и σ – коэффициенты вязкости и проводимости жидкости. Говорят, что уравнение (1.14) – это уравнение Бюргерса с давлением, порожденным магнитным полем, удовлетворяющим (1.15).

Заметим, что, на первый взгляд, система (1.14)–(1.15) представляет собой обобщение систем вида (1.3) и (1.4), однако вероятностное представление решения задачи Коши показывает, что они существенно отличаются друг от друга. При этом для построения вероятностного представления решения задачи Коши для систем типа (1.13)–(1.15) мы используем подход, развитый нами недавно для того, чтобы построить вероятностное представление решения задачи Коши для систем параболических уравнений с кросс-диффузией [11,12]. Естественную общность системы (1.14)–(1.15) и системы с кросс-диффузией мы продемонстрируем ниже на примере одномерной системы МГД–Бюргерса.

Как и в случае систем параболических уравнений с кросс-диффузией, принципиальное отличие (1.3) и (1.4) от систем вида (1.1) состоит в том, что (1.3) и (1.4) – это системы обратных уравнений Колмогорова, тогда как системы вида (1.1) и, в частности, (1.13)–(1.14) – это системы прямых уравнений Колмогорова. При этом формальное преобразование, которое позволяет свести прямые уравнения к обратным, в отличие от описанных выше двух классов систем, в этом случае не помогает.

Анализируя приведенные выше рассуждения, мы видим, что, если мы исходно имеем дело с линейным прямым уравнением Колмогорова, то для того, чтобы найти генератор марковского процесса, порождающего соответствующий пропагатор, т.е. эволюционное семейство $\widehat{U}(s,t)$, определяющее решение рассматриваемого уравнения, нужно перейти к соответствующему обратному уравнению, сопряженному с исходным (в описанном выше смысле), или, эквивалентно, рассмотреть сопряженный пропагатор $U(s,t)$. Это позволит найти генератор марковского процесса, связанного с рассматриваемой задачей. При переходе к нелинейным задачам ситуация осложняется, поскольку обратное уравнение Колмогорова, сопряженное к нелинейному прямому уравнению, оказывается не замкнутым, в силу того, что его коэффициенты зависят от искомого решения прямого уравнения. Тем не менее, рассмотрение соответствующего обратного уравнения позволяет найти выражение для генератора интересующего нас процесса, а также найти вид стохастического уравнения, которому удовлетворяет этот процесс. Аналогичные рассуждения справедливы и для рассматриваемых систем параболических уравнений.

Таким образом, процедура построения вероятностного представления решения системы типа (1.1) состоит из нескольких этапов. Прежде всего, нужно рассмотреть марковский процесс, генератором которого является оператор $\mathcal{L}^*$, формально сопряженный к исходному эллиптическому оператору $\mathcal{L}$. Далее, ввести стохастическую тестовую функцию так, чтобы, после замены переменной интегрирования в интегральном тождестве, на классическую тестовую функцию действовал оператор $\mathcal{L}^*$ и построить редукцию исходной задачи к соответствующей стохастической системе. Наконец, нужно исследовать полученную стохастическую задачу, доказать ее разрешимость и показать, что в результате мы получили искомое решение исходной задачи.

Ниже мы проиллюстрируем эти этапы на примере построения вероятностного представления решения задачи Коши для системы, описывающей движение жидкости в магнитном поле, а именно системы МГД–Бюргерса.

Развиваемый в этой работе подход к рассматриваемому классу нелинейных параболических систем тесно связан с подходом, развитым в работах [11, 12], в основе которого лежат идеи теории стохастических потоков Куниты [13,14]. Однако, ввиду относительной простоты рассматриваемой системы, мы не ссылаемся на общие результаты, а проводим непосредственное исследование рассматриваемой системы.

Далее статья организована следующим образом. В параграфе 2 мы приводим ряд результатов теории стохастических потоков, адаптируя их к рассматриваемой ситуации. В параграфе 3 мы проводим редукцию системы МГД–Бюргерса к соответствующей стохастической системе и выводим вероятностное представление решения системы МГД–Бюргерса. В последнем параграфе мы доказываем существование и единственность решения стохастической задачи, полученной в параграфе 3, и проверяем, что это приводит к построению обобщенного решения системы МГД–Бюргерса.

§2. Стохастические потоки

Напомним несколько полезных для дальнейшего результатов теории стохастических потоков Куниты, позволяющих строить вероятностное представление обобщенного решения прямой задачи Коши для линейного параболического уравнения [14].

Мы напомним соответствующую конструкцию, поскольку ряд ее деталей понадобится нам в дальнейшем. В частности, нам понадобится описание как диффузионного процесса $\xi(t)$, так и соответствующего обращенного по времени процесса $\widehat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta)$.

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\xi(\theta) = a(\xi(\theta))\,d\theta + A(\xi(\theta))\,dw(\theta), \quad \xi(s) = y \in R^d, \tag{2.1}$$

с неслучайными коэффициентами $a(y), A(y)$, удовлетворяющими условиям классической теоремы существования и единственности решения СДУ. Если коэффициенты $a(y), A(y)$ дифференцируемы k раз, то решение $\xi_{s,y}(t)$ уравнения (2.1) порождает стохастический поток C^k-диффеоморфизмов по формуле $\xi_{s,y}(t) = \phi_{s,t}(y)$. Обозначим $\psi_{s,t} : x \to \psi_{s,t}(x)$ обращенный по времени стохастический поток, удовлетворяющий соотношению $\phi_{s,t}(\psi_{s,t}(x)) = x$. При этом случайный процесс $\widehat{\xi}(t) = \psi_{s,t}(x)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{s,x}(t) = x - \int_s^t a(\widehat{\xi}_{\theta,x}(\theta))\,d\theta + \int_s^t A^*\nabla A(\widehat{\xi}_{\theta,x}(\theta))\,d\theta \\ - \int_s^t A(\widehat{\xi}_{\theta,x}(\theta))\,d\widetilde{w}(\theta), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\widetilde{w}(\theta) = w(t-\theta) - w(t)$.

Обозначим $\mathbf{J}_{s,t}$, $\widehat{\mathbf{J}}_{s,t}$, соответственно, якобиевы матрицы преобразований $\phi_{s,t} : y \to \xi_{s,y}(t)$, $\psi_{s,t}x \to \widehat{\xi}_{s,x}(t)$. При этом $\mathbf{J}_{s,t}$ удовлетворяет СДУ

$$d\mathbf{J}_{s,y}(\theta) = \nabla a(\xi_{s,y}(\theta))\,\mathbf{J}_{s,y}(\theta)\,d\theta + \nabla A(\xi_{s,y}(\theta))\,\mathbf{J}_{s,y}(\theta)\,dw(\theta), \tag{2.3}$$

$$\mathbf{J}_{s,s} = I,$$

где I – единичная матрица.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^d)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, снабженное топологией Шварца и $\mathcal{D}'$ – пространство, топологически двойственное к $\mathcal{D}$, – пространство обобщенных функций (пространство распределений Шварца). Пусть задана обобщенная функция u. Композицию u со стохастическим потоком $\psi_{s,t}$ можно определить как обобщенную функцию, заданную соотношением

$$\int_{R^d} u(\psi_{s,t}(x))\, h(x)\, dx = \int_{R^d} u(y)\, h(\phi_{s,t}(y))\, J_{s,t}(y)\, dy, \tag{2.4}$$

где $J_{s,t}(y) = \det \mathbf{J}_{s,t}(y)$ – якобиан преобразования $\phi_{s,t}$.

Интегрируемость функции $u \circ \psi_{s,t}$ вытекает из следующих соображений. Пусть H^k – соболевское пространство, т.е. множество вещественных функций f, определенных на R^d, таких что f вместе с производными до порядка k принадлежит пространству $L^2(R^d)$ и пусть $H_0^k \subset H^k$ – подпространство функций из H^k с компактными носителями. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\langle\langle u, h\rangle\rangle = \int_{R^d} u(x)\, h(x)\, dx$. Как показано в работе Куниты [14], если $u \in H^k$, то и $u \circ \psi_{s,t} \in H^k$, где k – целое число.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial s} = a(x) \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, A(x) \nabla^2 v A^*(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \tag{2.5}$$

и напомним определение ее обобщенного решения.

Пусть $h \in H_0^2(R^d)$ – произвольная тестовая функция и $F(x) = A(x)\, A^*(x)$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_{R^d} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + a(y) \cdot \nabla v) + \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr} F(y)\, \nabla^2 v\right](t,y)\, h(y)\, dy \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial t} \int_{R^d} v(t,x)\, h(x)\, dx - \int_{R^d} v(t,x)\, \nabla \cdot [a(x)\, h(x)]\, dx \\ &\qquad\quad + \int_{R^d} v(t,x)\, \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr} \nabla^2 [F(x)\, h(x)]\, dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Функция $v(t) \in \mathcal{D}'$ ($v(t) \in H^{-k}$) называется обобщенным решением задачи (2.4), если для любой тестовой функции $h \in \mathcal{D}$ ($h \in H^2$) функция $\langle\langle u(t), h\rangle\rangle$ дифференцируема по t и справедливо соотношение (2.6).

Для того, чтобы построить вероятностное представление обобщенного решения прямой задачи Коши (2.5), рассмотрим СДУ

$$\begin{aligned} d\xi_j(t) = -a_j(\xi(t))\,dt + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{d} A_{ik}(\xi(t))\nabla_i A_{jk}(\xi(t))\,dt \\ - \sum_{k=1}^{d} A_{jk}(\xi(t))\,dw_k(t), \quad \xi_j(s) = y_j, \quad j = 1,\dots,d. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть $a(y) \in R^d$, $A(y) \in R^d \otimes R^d$ – дважды дифференцируемые функции, имеющие рост не выше линейного. Тогда существует единственное решение $\xi_{s,y}(t)$ этого уравнения, которое порождает стохастический поток $\phi_{s,t} : y \to \xi_{s,y}(t)$. В рассматриваемых условиях решение $\xi_{s,y}(t)$ СДУ (2.7) дифференцируемо по начальным данным. Для того, чтобы определить обобщенный случайный процесс $v(\xi_{s,x}(t))$, как и выше, воспользуемся интегральным соотношением

$$\int_{R^d} v(\widehat{\xi}_{s,x}(t))\,h(x)\,dx = \int_{R^d} v(y)\,h(\xi_{s,y}(t))\,J_{s,t}(y)\,dy$$

и потребуем, чтобы оно выполнялось для любой тестовой функции h. Как показано в работе [14], в рассматриваемой ситуации можно вывести обобщенную формулу Ито.

Если $\xi(t)$ удовлетворяет СДУ (2.6) и $v(t) \in \mathcal{D}'$ ($v(t) \in H^{-2}$), то случайный процесс $v(\widehat{\xi}_{s,x}(t))$, определенный соотношением (2.4), имеет стохастический дифференциал вида

$$\begin{aligned} dv(\widehat{\xi}_{s,x}(t)) = \left[\frac{\partial v(\widehat{\xi}_{s,x}(t))}{\partial t} + \mathcal{A}[v(\widehat{\xi}_{s,x}(t))]\right] dt \\ + \nabla[v(\widehat{\xi}_{s,x}(t))]\,A(v(\widehat{\xi}_{s,x}(t)))\,dw(t), \end{aligned}$$

где $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} F(x)\nabla^2 + \langle a(x), \nabla\rangle$.

Как и в классическом случае, обобщенная формула Ито позволяет доказать, что обобщенное решение задачи (2.5) допускает представление вида $v(t,x) = \mathbf{E}[v_0(\widehat{\xi}_{0,x}(t))]$. В работе [15] обобщенная формула Ито была использована для того, чтобы показать, что на этом пути можно построить вероятностное представление решения задачи (2.1) и для семилинейного случая полагая $a(x) \equiv a(x,v)$, $A(x) \equiv A(x,v)$.

Аналогичный подход применим также и к системам семилинейных параболических уравнений вида (1.3) [16]. При этом произведение скалярных функций $u(x) \in R$ и $h(x) \in R$ в соотношении (2.6) заменяется скалярным произведением векторных функций $u(x) \in R^d$, $h(x) \in R^d$.

Однако, к системе вида (1.12), (1.13) этот подход непосредственно не применим, и нам понадобятся дополнительные конструкции.

§3. Редукция системы МГД–Бюргерса к стохастической задаче

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений, описывающей течение жидкости в магнитном поле, ограничившись для простоты одномерным случаем. Обозначим $B(t,x) = u_1(t,x)$ – магнитное поле, $v(t,x) = u_2(t,x)$ – скорость течения жидкости, $x \in R$, $t \in [0,T]$, и рассмотрим простейшую систему, описывающую гидродинамику в магнитном поле, состоящую из МГД уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad u_1(0,x) = u_{10}(x), \tag{3.1}$$

и уравнения Бюргерса, в котором давление определяется магнитным полем,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1^2 + u_2^2)}{\partial x} = \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad u_2(0,x) = u_{20}(x). \tag{3.2}$$

Заметим, что в терминах так называемых переменных Эльсесера $e^{\pm} = u_1 \pm u_2$ система (3.1), (3.2) приобретает вид

$$\frac{\partial e^{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial(e^{\pm})^2}{\partial x} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{4}\frac{\partial^2 e^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\mu^2 - \sigma^2}{4}\frac{\partial^2 e^{\mp}}{\partial x^2},$$

т.е. является системой с кросс-диффузией. Вероятностные представления обобщенного решения задачи Коши для систем с кросс-диффузией были построены в наших работах [11, 12].

При построении вероятностного представления решения задачи (3.1), (3.2) нужно иметь в виду, что мы имеем дело с системой прямых уравнений Колмогорова. Для того, чтобы понять, какие марковские процессы могут быть с ней ассоциированы, нужно найти их генераторы, что можно сделать, рассмотрев соответствующие интегральные тождества.

Обозначим $v^{(m)}$ производную m-го порядка функции $v(x)$, и пусть

$$\mathcal{W} = \{v \in L^2([0,T], \mathcal{H}^2(R)\},$$

$$\|v\|^2_{\mathcal{W}} = \int\limits_0^T \int\limits_R \left[|v(s,x)|^2 + \left| \frac{\partial v(s,x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx\, ds.$$

Наряду с приведенным в параграфе 2 определением обобщенного решения задачи Коши, нам понадобится альтернативное определение. Будем говорить, что $u(t,x) = (u_1(t,x),\, u_2(t,x))$ является обобщенным решением системы (3.1), (3.2), если

$$\sup_{t\in[0,T],x\in R} \|u(t,x)\|^2 < \infty$$

и $\forall h \in C_0^{1,\infty}[0,T) \times R, R^2)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^T \langle\langle u_m(\theta), \frac{\partial h_m(\theta)}{\partial \theta} + (\mathcal{A}^u_m + B^u_m) h_k(\theta)\rangle\rangle\, d\theta + \langle\langle u_{m0}, h_m(0)\rangle\rangle = 0, \qquad (3.3)$$

где $m = 1, 2$,

$$\mathcal{A}^u_1 h_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad B^u_1 h_1(x) = u_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}, \qquad (3.4)$$

$$\mathcal{A}^u_2 h_2 = \frac{1}{2}\,\mu^2\, \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}, \quad B^u_2(x) h_2(x) = \left[\frac{u_1^2}{2u_2} + \frac{1}{2}\, u_2 \right] \frac{\partial h_2}{\partial x}. \qquad (3.5)$$

Соотношение (3.3) подсказывает, что с рассматриваемой задачей могут быть связаны случайные процессы, генераторы которых определяются соотношениями (3.4), (3.5). Для того, чтобы построить соответствующие процессы, рассмотрим пару стохастических уравнений

$$d\xi^1(\theta) = \sigma\, dw(\theta), \quad \xi^1(s) = y, \qquad (3.6)$$

$$d\xi^2(\theta) = \mu\, dw(\theta), \quad \xi^2(s) = y, \qquad (3.7)$$

$$d\eta^1(\theta) = C^u_1(\xi^1(\theta))\, \eta^1(\theta)\, dw(\theta), \quad \eta^1(s) = 1, \qquad (3.8)$$

$$d\eta^2(\theta) = C^u_2(\xi^2(\theta))\, \eta^2(\theta)\, dw(\theta), \quad \eta^2(s) = 1, \qquad (3.9)$$

где

$$C^u_1(x) = \frac{1}{\sigma} u_2(\theta, x), \quad C^u_2(x) = \frac{1}{2\mu}\left[u_2(\theta,x) + \frac{u_1^2(\theta,x)}{u_2(\theta,x)} \right] \qquad (3.10)$$

Предположим, что существуют обобщенные решения u_1, u_2 системы (3.1), (3.2), представляющие собой ограниченные дифференцируемые функции, такие что $u_m(t,x) > \kappa > 0$, $t \in [0,T]$. Тогда, в силу классических результатов теории стохастических дифференциальных уравнений, существуют процессы $\eta^m(t)$, $m = 1,2$, удовлетворяющие СДУ (3.8), (3.9).

Рассмотрим стохастические потоки $\phi^m_{s,t}$, $m = 1,2$, порожденные процессами $\xi^1_{s,y}(t)$ и $\xi^2_{s,y}(t)$, $\phi^m_{s,t}(x) = \xi^m_{s,y}(t)$, $m = 1,2$, и заметим, что якобианы отображений $\phi^m_{s,t}$, порожденных процессами $\xi^m_{s,x}(t)$, удовлетворяющими (3.6), (3.7), равны 1.

Наряду с отображениями $\phi^m_{s,t}$, рассмотрим обратные к ним отображения $\psi^m_{s,t}$, такие что $\phi^m_{s,t}(\psi^m_{s,t}(x)) = x$. При этом стохастические дифференциалы процессов $\widehat{\xi}^m_{t,x}(\theta) = \xi^m_{0,y}(t-\theta) = \psi^m_{\theta,t}(x)$ можно записать как в виде

$$d\widehat{\xi}^m(\theta) = -\sigma_m\, d\widetilde{w}(\theta), \tag{3.11}$$

где $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \mu$, $\widetilde{w}(\theta) = w(t-\theta) - w(t)$ – винеровский процесс, так и в виде

$$d\widehat{\xi}^m(\theta) = -\sigma_m\, dw(\theta). \tag{3.12}$$

Для того, чтобы построить вероятностное представление обобщенного решения системы (3.1), (3.2), рассмотрим вспомогательные случайные процессы $\gamma^m(\theta) = \eta^m(\theta)\, h(\xi^m(\theta))$, где $\xi^m(\theta), \eta^m(\theta)$ удовлетворяют соответственно СДУ (3.6)–(3.9) и $h \in H^2$ – произвольная тестовая функция. Процессы $\gamma^m(\theta)$ мы будем называть стохастическими тестовыми функциями.

Покажем, что стохастические дифференциалы процессов $\gamma^m(\theta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} d\gamma^m(\theta) &= \eta^m(\theta)\,[\mathcal{A}^m_u + B^m_u]\, h(\xi^m(\theta))\, d\theta \\ &\quad + \eta^m(\theta)\left[C^u_m(\xi^m(\theta))\, h(\xi^m(\theta)) + \sigma_m\, \frac{\partial h(\xi^m(\theta))}{\partial y}\right] dw(\theta). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $h_m \in H^2$ – произвольные тестовые функции, $u_m \in \mathcal{W}$, $m = 1,2$, – решение системы* (3.1), (3.2) *и случайные процессы $\xi^m(\theta), \eta^m(\theta)$ удовлетворяют СДУ* (3.6)–(3.9). *Тогда случайный процесс $\gamma^m(\theta) = \eta^m(\theta)\, h(\xi^m(\theta))$ имеет стохастический дифференциал вида* (3.13).

Доказательство. Применим формулу Ито для вычисления стохастического дифференциала процесса

$$\begin{aligned} d\gamma^m(\theta) &= d[\eta^m(\theta)\, h_m(\xi^m(\theta))] \\ &= d\eta^m(\theta)\, h(\xi^m(\theta)) + \eta^m(\theta)\, dh(\xi^m(\theta)) + d\eta^m(\theta)\, dh(\xi^m(\theta)) \\ &= \eta^m(\theta)\left[\mathcal{A}^m h(\xi^m(\theta)) + C_u^m(\xi^m(\theta))\,\sigma_m\,\frac{\partial h(\xi^m(\theta))}{\partial x}\right] d\theta \\ &\quad + \eta^m(\theta)\left[C_u^m(\xi^m(\theta))\, h(\xi^m(\theta)) + \sigma_m \frac{\partial h(\xi^m(\theta))}{\partial y}\right] dw(\theta). \end{aligned}$$

Таким образом, стохастический дифференциал процесса $\gamma^m(\theta)$ имеет требуемый вид. Напомним, что в рассматриваемом случае $J_{s,t}(y) \equiv 1$. $\square$

Случайные процессы $\eta^m(\theta)$, удовлетворяющие линейным СДУ (3.8), (3.9), имеют вид

$$\eta^m(t) = \exp\left\{ \int_0^t C_m^u(\phi_{0,\theta}^m(y))\, dw(\theta) - \frac{1}{2}\int_0^t [C_m^u]^2(\phi_{0,\theta}^m(y))\, d\theta \right\}.$$

Обозначим

$$\widetilde{\eta}^m(t) = \exp\left\{ \int_0^t C_m^u(\psi_{\theta,t}(x))\, dw(\theta) - \frac{1}{2}\int_0^t [C_m^u]^2(\psi_{\theta,t}(x))\, d\theta \right\} \qquad (3.14)$$

и сформулируем первый результат о вероятностном представлении решения задачи Коши для системы (3.1), (3.2).

Теорема 3.2. *Пусть существует единственное обобщенное решение* $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ *задачи Коши для системы* (3.1), (3.2), $\psi_{0,\theta}^m(x) = \widehat{\xi}_{0,x}^m(\theta)$, *удовлетворяют* (3.11), *а процессы* $\widetilde{\eta}^m(t)$ *имеют вид* (3.14) *Тогда функции* v^m *вида*

$$v^m(t) = \mathbf{E}\,\left[\widetilde{\eta}_m(t) u_{0m} \circ \psi_{0,t}^m\right], \quad m = 1, 2, \qquad (3.15)$$

удовлетворяют интегральным тождествам

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R u_m(t,x)\, h(x)\, dx = \int_R [\mathcal{A}_m^u + \mathcal{B}_m^u]\, h(x)\, dx = 0. \qquad (3.16)$$

Доказательство. Покажем, что для любых функций $h_m \in H^2(R)$ справедливы интегральные тождества (3.16). Если $u^k(t) \in \mathcal{W}$ – обобщенное решение задачи (3.1), (3.2), то существуют случайные процессы $\widehat{\xi}_m(t), \widehat{\eta}_m(t)$, $m = 1, 2$, удовлетворяющие стохастическим соотношениям (3.6)–(3.9). При этом, с одной стороны, справедливо соотношение

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t \langle\langle u_0^m, d\gamma^m(\theta)\rangle\rangle\right] = \langle\langle \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(t) u_{m0}(\widehat{\xi}^m(t))], h_m\rangle\rangle - \langle\langle u_{m0}, h_m\rangle\rangle,$$

а с другой стороны, с учетом полученного выше выражения для дифференциала $d\gamma^m(t)$, получим соотношение

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\int_0^t \int_R \langle\langle u_0^m(y), d\gamma^m(\theta)\rangle\rangle\, dy\Big]&\\
&= \mathbf{E}\Big[\int_0^t \int_R u_{m0}(y)\, \eta^m(\theta)[\mathcal{A}_u^m + B_u^m]\, h(\xi_{0,y}^m(\theta))\Big]\, dy\, d\theta\\
&= \mathbf{E}\int_0^t \int_R \widehat{\eta}^m(\theta)\, u_{m0}(\widehat{\xi}_{0,x}^m(\theta))[\mathcal{A}_u^m + B_u^m]\, h_m(x)\, dx\, d\theta\\
&= \int_0^t \int_R \mathcal{B}_u^m\, \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(\theta)\, u_{m0}(\widehat{\xi}_{0,x}^m(\theta))]\, h_m(x)\, dx\, d\theta\\
&= \int_0^t \int_R \mathcal{B}_u^m u^m(\theta, x)\, h_m(x)\, dx\, d\theta,
\end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_u^1 = [\mathcal{A}^1 + B_u^1]^+$, $\mathcal{B}_u^2 = [\mathcal{A}^2 + B_u^2]^+$. $\square$

§4. Стохастическая модель задачи Коши для системы МГД–Бюргерса

В этом параграфе мы откажемся от априорного предположения о существовании регулярного обобщенного решения системы (3.1), (3.2) и рассмотрим замкнутую систему стохастических соотношений, выведенную в предыдущем параграфе. Рассмотрим систему стохастических соотношений вида

$$d\widehat{\xi}^m(\theta) = -\sigma_m\, dw(\theta), \quad \widehat{\xi}^m(0) = x, \tag{4.1}$$

$$d\widetilde{\eta}^m(\theta) = \widetilde{\eta}^m(\theta)\, C_m^u(\theta, \widehat{\xi}^m(\theta))\, dw(\theta), \quad \widetilde{\eta}^m(0) = 1, \tag{4.2}$$

$$u_m(t,x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(t) u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))], \quad m = 1, 2. \tag{4.3}$$

Решение полученной замкнутой системы уравнений будем искать с помощью метода последовательных приближений. Положим

$$u_m^{(1)}(t,x) = u_{0m}(x),$$

$$d\widetilde{\eta}_1^m(\theta) = \widetilde{\eta}_1^m(\theta)\, C_m^{u^{(1)}}(\widehat{\xi}^m(\theta)))\, dw(\theta)], \quad \widehat{\eta}^1(0) = 1,$$

$$u_m^{(2)}(t,x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}_1^m(t)\, u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))],$$

и, итерируя эти соотношения, получим

$$d\widetilde{\eta}_n^m(\theta) = \widetilde{\eta}_n^m(\theta)\, C_m^{u^{(n)}}(\widehat{\xi}^1(\theta))\, dw(\theta), \quad \widetilde{\eta}_n^m(0) = 1, \tag{4.4}$$

$$u_m^{(n+1)}(t,x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}_n^m(t)\, u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))]. \tag{4.5}$$

Для доказательства сходимости полученных последовательных приближений нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $g_m(t,x)$ – заданные ограниченные дифференцируемые функции, интегрируемые с квадратом вместе со своими производными, т.е. функции из класса $\mathcal{W}^1$. Рассмотрим систему линеаризованных уравнений

$$d\widetilde{\eta}^m(\theta) = C_m^g(\widehat{\xi}^1(\theta))\widetilde{\eta}^m(\theta)\, dw(\theta), \quad \widetilde{\eta}^m(0) = 1, \tag{4.6}$$

$$v_m(t,x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(t)\, u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))], \quad m = 1, 2, \tag{4.7}$$

и выведем ряд оценок важных для дальнейшего. Обозначим

$$\sup_x |u(t,x)| = \|u(t)\|_\infty.$$

Лемма 4.1. *Пусть существуют положительные константы K_m^0 и ρ такие, что*

$$\inf_x |g_2(t,x)| \geqslant \rho > 0 \quad \text{и} \quad \|u_m(0)\|_\infty^2 \leqslant K_m^0.$$

Тогда существует интервал $(0,T]$ и ограниченные на этом интервале функции $\beta_m(t)$, такие что функции $v_m(t,x)$, $m = 1, 2$, вида (4.7) *удовлетворяют оценкам*

$$\|v_m(t)\|_\infty^2 \leqslant \beta_m(t)$$

для $t \in [0,T]$, *если функции* $g_m(t,x)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\|g_m(t)\|_\infty^2 \leqslant \beta_m(t).$$

Доказательство. Для доказательства ограниченности функции $v_m(t,x) = \mathbf{E}\widetilde{\eta}^m(t)v_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))$ заметим, что, в силу оценки

$$\|v_m(t)\|_\infty^2 \leqslant \|v_{m0}\|_\infty^2 \mathbf{E}|\widetilde{\eta}^m(t)|^2,$$

нам достаточно найти оценку для $\mathbf{E}|\widetilde{\eta}^m(t)|^2$.

Используя свойства стохастического интеграла, с учетом вида коэффициентов C_m^g, заданных соотношениями (3.10), и условий леммы, получим оценки

$$\mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^1(t)|^2 \leqslant 1 + \int\limits_0^t \mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^1(\theta)|^2 \frac{1}{\sigma^2}\beta_2(\theta)d\theta, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^2(t)|^2 \leqslant 1 + \frac{1}{4\mu^2\rho^2}\int\limits_0^t \mathbf{E}|\widetilde{\eta}^2(\theta)|^2[\beta_1^2(\theta) + \beta_2^2(\theta)]d\theta, \tag{4.9}$$

из которых вытекает, что

$$\|v_1(t)\|_\infty^2 \leqslant K_1^0 \exp\Big\{\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^t \beta_2(\theta)d\theta\Big\}$$

и

$$\|v_2(t)\|_\infty^2 \leqslant K_2^0 \exp\Big\{\frac{1}{2\mu^2\rho^2}\int\limits_0^t [\beta_2^2(\theta) + \beta_1^2(\theta)]d\theta\Big\}.$$

Для того, чтобы найти мажоранты $\beta_m(t)$ функций $u_m^2(t,x)$, рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\beta_1(t) = K_1^0 \exp\Big\{2\int\limits_0^t [\sigma]^{-2}\beta_2(\theta)\,d\theta\Big\},$$

$$\beta_2(t) = K_2^0 \exp\Big\{\frac{1}{2\mu^2\rho^2}\int\limits_0^t [\beta_2^2(\theta) + \beta_1^2(\theta)]\,d\theta\Big\},$$

и эквивалентную этой системе задачу Коши

$$\frac{d\beta_1(t)}{dt} = \sigma^{-2}\beta_2(t)\beta_1(t), \quad \beta_1(0) = K_1^0,$$
$$\frac{d\beta_2(t)}{dt} = [2\mu^2\rho^2]^{-1}[\beta_1^2(t) + \beta_2^2(t)]\beta_2(t), \quad \beta_2(0) = K_2^0.$$

Перепишем полученную систему в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\beta_1(t)\\ \beta_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma^2}\beta_2(t) & 0\\ 0 & \frac{1}{2\mu^2\rho^2}[\beta_1^2(t)+\beta_2^2(t)]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1(t)\\ \beta_2(t)\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\beta}_m(0) = K_m^0. \tag{4.10}$$

Ограниченные решения $\beta_m(t)$ системы (4.10), если они существуют, будут служить искомыми мажорантами функций $u_m^2(t,x)$ по x.

Напомним, что, как следует из общей теории ОДУ, система уравнений $\dot{g}(t) = M(g(t))$ имеет (возможно локальное) единственное решение $g(t)$, удовлетворяющее условию $g(0) = g_0$, если функция $M(y)$ непрерывно дифференцируема. Таким образом, ввиду гладкости коэффициентов в правой части системы (4.10), мы получаем, что существует единственное решение задачи Коши для этой системы, по крайней мере на некотором интервале $[0,T]$, и утверждение леммы 4.1 доказано. $\square$

Наряду с оценками леммы 4.1, докажем справедливость аналогичных оценок для функций $\nabla u_m(t,x)$, $m = 1,2$, где $\nabla u_m(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Для этого рассмотрим дополнительно систему, позволяющую получить вероятностное представление для $\nabla u_m(t,x)$. Соответствующая система имеет вид

$$d\zeta^1(\theta) = C_1^u(\psi^1_{\theta,t}(x))\,\zeta^1(\theta)\,dw(\theta + \nabla C_1^u(\psi^1_{\theta,t}(x))\,\widetilde{\eta}_1(\theta)\,dw(\theta), \tag{4.11}$$

$$d\zeta^2(\theta) = \zeta^2(\theta)\,C_2^u(\psi^2_{\theta,t}(x))\,dw(\theta) + \nabla C_2^u(\psi^2_{\theta,t}(x))\,\widetilde{\eta}^2(\theta)\,dw(\theta), \tag{4.12}$$

$$\nabla u_m(x) = v_m(t,x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(t)\nabla u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t)) + \zeta^m(t)\,u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))], \tag{4.13}$$

где $\zeta^m(\theta) = \nabla\widetilde{\eta}^m(\theta)$.

Как и выше, мы рассмотрим стохастическую систему, соответствующую линеаризованной задаче

$$d\alpha^1(\theta) = \left[C_1^g(\psi^1_{\theta,t}(x))\,\alpha^1(\theta) + \nabla C_1^g(\psi^1_{\theta,t}(x))\,\widetilde{\eta}^1(\theta)\right]\,dw(\theta), \tag{4.14}$$

$$d\alpha^2(\theta) = \left[C_2^g(\psi^2_{\theta,t}(x))\,\alpha^2(\theta) + \nabla C_2^g(\psi^2_{\theta,t}(x))\,\widetilde{\eta}^2(\theta)\right]\,dw(\theta), \tag{4.15}$$

$$\nabla v_m(x) = \mathbf{E}[\widetilde{\eta}^m(t)\,\nabla u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t)) + \zeta^m(t)\,u_{0m}(\widehat{\xi}^m(t))]. \tag{4.16}$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1, $g_m(t,x)$ – *ограниченные дифференцируемые функции и существуют константы* C_m^0, *для которых справедливы неравенства*

$$\|\nabla g_m(0)\|_\infty^2 \leqslant C_m^0.$$

Тогда существует интервал $[0,T_1]$ *и ограниченные на этом интервале функции* $\gamma_m(t)$, *такие что для функций* $\nabla v_m(t,x)$ *вида* (4.16) *справедливы оценки*

$$\|\nabla v_m(t)\|_\infty^2 \leqslant \gamma_m(t),$$

если функции $\nabla g_m(t,x)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\|\nabla g_m(t)|_\infty^2 \leqslant \gamma_m(t).$$

Доказательство. Утверждение леммы 4.2 можно доказать с помощью рассуждений, вполне аналогичных тем, что были использованы при доказательстве леммы 4.1.

Оценим случайные процессы $\alpha^m(t)$, удовлетворяющие линейным неоднородным стохастическим уравнениям (4.14), (4.15). Применяя формулу Ито, нетрудно проверить, что выполняются оценки

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\alpha^1(t)|^2 &\leqslant \int_0^t \gamma_2(\theta)\,\exp\Big\{\int_\theta^t \frac{1}{\sigma^2}\beta_2(\tau)d\tau\Big\}d\theta \\ &\leqslant \exp\Big\{M\int_0^t[\gamma_2(\theta)+\widetilde{K}]d\theta\Big\},\end{aligned} \tag{4.17}$$

$M=\max(\frac{1}{\sigma^2},1)$, $\quad \widetilde{K}=\max_{\theta\in[0,T]}\beta_2(\theta)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\alpha^2(t)|^2 \leqslant{}& \frac{1}{4\mu^2}\mathbf{E}\Big[\int_0^t \frac{2[g_2^4+g_1^4](\theta,\xi_2(\theta))}{g_2^2(\theta,\xi^2(\theta))}\,\|\alpha^2(\theta)\|^2\,d\theta\Big] \\ &+\frac{1}{\mu^2}\mathbf{E}\Big[\int_0^t \frac{[g_1\nabla g_1+g_2\nabla g_2]^2(\theta,\xi^2(\theta))}{g_2^2(\theta,\xi^2(\theta))}\,|\eta^2(\theta)|^2\,d\theta\Big] \\ &-\frac{1}{2\mu^2}\mathbf{E}\Big[\int_0^t \frac{[g_1^2+g_2^2]^2(\theta,\xi^2(\theta))|\,\nabla g_2(\theta,\xi^2(\theta)|^2}{g_2^2(\theta,\xi^2(\theta))}\,|\eta^2(\theta)|^2\,d\theta\Big].\end{aligned} \tag{4.18}$$

Поскольку на интервале $[0,T]$ $\max(\beta_1(t),\beta_2(t)) \leqslant K < \infty$, то из (4.18) вытекает

$$\mathbf{E}\,|\alpha^2(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\mu^2\rho^2}\int\limits_0^t K^2[\gamma_1(\theta)+(1+K^2)\,\gamma_2(\theta)]\,d\theta\,\exp\left\{\frac{K^2}{2\mu^2\rho^2}t\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{\int\limits_0^t (L[\gamma_1(\theta)+\gamma_2(\theta)]+Q)\,d\theta\right\},$$

где $L=\frac{[1+K^2]^2}{\mu^2\rho^2}$, $Q=\frac{K^2}{2\mu^2\rho^2}$.

Дальнейшие рассуждения в точности повторяют рассуждения, использованные при доказательстве леммы 4.1, и утверждение леммы вытекает из существования решения соответствующей системы нелинейных ОДУ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}M[\gamma_2(t)+\widetilde{K}] & 0\\ 0 & L(\gamma_1(t)+\gamma_2(t))+Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$$\gamma_m(0)=\gamma_{0m}. \qquad \square$$

Функции $\gamma_m(t)$ представляют собой мажоранты для $|\nabla u_m(t,x)|^2$, т.е. $\|\nabla u_m(t)\|_\infty^2 \leqslant \gamma_m(t)$.

Применяя оценки лемм 4.1 и 4.2 к последовательным приближениям решений системы (4.6)–(4.8) и системы (4.12)–(4.13), мы покажем, что семейства $u_m^{(n)}(t,x)$ и $\nabla u_m^{(n)}(t,x)$ равномерно ограничены по x при $t\in[0,T_1]\subset[0,T]$, а следовательно, функции $u_m^{(n)}(t,x)$ равностепенно непрерывны по x. В силу теоремы Арцела–Асколи, существуют непрерывные ограниченные функции $u_m(t,x)$, к которым равномерно по x сходятся функции $u_m^{(n)}(t,x)$. Далее, из равномерной ограниченности функций $u_m^{(n)}(t)$ на интервале $[0,T_1]$ вытекает и равномерная сходимость последовательных приближений по паре переменных $(t,x)\in[0,T_2]\times R$.

Липшицевость предельных ограниченных функций

$$u_1(t,x)=\lim_{n\to\infty}u_1^n(t,x),\quad u_2(t,x)=\lim_{n\to\infty}u_2^n(t,x)$$

по пространственной переменной следует из равномерной ограниченности предельных функций

$$v_1(t,x)=\lim_{n\to\infty}v_1^n(t,x),\quad v_2(t,x)=\lim_{n\to\infty}v_2^n(t,x).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть* $[0, T_1] \subset [0, T]$ – *интервалы, определенные в леммах* 4.1 *и* 4.2. *Семейство функций* $u_m^{(n+1)}(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R$, *вида* (4.5) *при* $n \to \infty$ *сходится в равномерной топологии к предельной функции* $u_m(t,x)$ *на интервале* $[0, T_1]$. *Предельная функция* $u_m(t,x)$ *является ограниченной липшицевой функцией по переменной* x.

Одно из основных утверждений этого параграфа содержится в теореме 4.4.

Теорема 4.4. *Пусть* $u_{0m} \in H^2$ – *ограниченные функции и существует константа* $\rho > 0$, *для которой справедлива оценка*

$$\rho < \sup_x |u_{02}(x)|,$$

тогда на интервале $[0, T_1]$ *существует единственное решение стохастической системы* (4.1)–(4.3).

Доказательство. Существование решения системы (4.1)–(4.3) вытекает из сходимости системы последовательных приближений (4.4), (4.5), которая следует из результатов лемм 4.1 и 4.3. Для доказательства единственности предположим обратное, что тройка

$$(\widehat{\xi}(\theta), z(\theta), v(t,x))$$

также удовлетворяет системе (4.1)–(4.3), и оценим величины $\|u_1(t) - v_1(t)\|_\infty^2$ и $\|u_1(t) - v_1(t)\|_\infty^2$.

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
|u_1(t,x) - v_1(t,x)|^2 &\leqslant \mathbf{E}\left|\widetilde{\eta}^1(t)\, u_{01}(\widehat{\xi}^1(t)) - z^1(t)\, u_{01}(\xi^1(t))\right|^2 \\
&\leqslant K_{01}\, \mathbf{E}\, |\widetilde{\eta}^1(t) - z^1(t)|^2 \\
&\leqslant \int_0^t |u_2(\theta) - v_2(\theta)|^2\, \mathbf{E}\,[|z^1(\theta)|^2]\, d\theta \\
&\quad + \int_0^t \mathbf{E}\, |v_2(\theta, \widehat{\xi}^2(\theta))|^2\, |\widetilde{\eta}^2(\theta) - z^2(\theta)|^2\, d\theta.
\end{aligned}$$

Вычисляя супремум по x от обеих частей последнего неравенства, получим оценку

$$\|u_1(t)-v_1(t)\|_\infty^2 \leqslant \int\limits_0^t G\|u_2(\theta)-v_2(\theta)\|_\infty^2\,d\theta\,e^{K_2T}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\begin{aligned}|u_2(t,x)-v_2(t,x)|^2 &\leqslant \mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^2(t)\,u_{02}(\widehat{\xi}^2_{0x}(t))-z^2(t)\,u_{02}(\widehat{\xi}^2_{0,x}(t))|^2\\ &\leqslant K_{02}\,\mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^2(t)-z^2(t)|^2.\end{aligned}$$

Оценим разность $\mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^2(t)-z^2(t)|^2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\widetilde{\eta}^2(t)-z^2(t)|^2 \leqslant \int\limits_0^t \mathbf{E}\Bigg[\Bigg(&\frac{u_2^2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))+u_1^2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))}{u_2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))}\\ &-\frac{v_2^2(\theta,\widehat{\xi}^2(\theta))+v_1^2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}\theta))}{v_2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))}\Bigg)\widetilde{\eta}^2(\theta)\Bigg]^2\,d\theta\\ +\int\limits_0^t \mathbf{E}\Bigg[&\frac{v_2^2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))+v_1^2(\theta,\widehat{\xi}^2(\theta))}{v_2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))}[\widetilde{\eta}^2(\theta)-z^2(\theta)]\Bigg]^2\,d\theta\\ &\leqslant \frac{N}{\rho^2}\int\limits_0^t \mathbf{E}\,|u_2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))-v_2(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))|\\ &+|u_1(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))-v_1(\theta,\widehat{\xi}^2_{0,x}(\theta))|\,|\eta^2(\theta)|^2\,d\theta\,\exp\left\{\frac{K_2}{\rho^2}\,t\right\}.\end{aligned}$$

где N – константа, зависящая от $\|u_m(t)\|_\infty$ и ρ.

Из последних оценок следует, что существует константа C, такая что справедлива оценка

$$\|u(t)-v(t)\|_\infty^2 \leqslant \int\limits_0^t C\,\|u(\theta)-v(\theta)\|_\infty^2\,d\theta\,e^{\frac{4K_2T}{\rho}^2},$$

и в силу леммы Гроноулла справедливо равенство $\|u(t)-v(t)\|_\infty^2=0$, что завершает доказательство теоремы. □

В заключение заметим, что из теорем 3.4 и 4.4 вытекает, что функции $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, определяемые системой (4.1)–(4.3), удовлетворяют в обобщенном смысле системе МГД–Бюргерса. Другими словами справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $u_{0m} \in H^2$. Тогда существует интервал $[0,T_1]$, такой что для всех $t \in [0,T_1]$ существует единственное обобщенное решение $u_1(t)$, $u_2(t)$ системы (3.1)–(3.2) и функции $u_m(t,x)$, $m = 1,2$, допускают вероятностное представление вида (4.3).*

Литература

1. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем при помощи марковских случайных процессов.* — Изв. вузов. Матем. **12** (1978) 6–17.
2. Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Stochastic Equations and Differential Geometry*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
3. E. Pardoux, F. Pradeilles, R. Rao, *Probabilistic interpretation of a system of semilinear parabolic partial differential equations.* — Ann. Inst. Henri Poincaré **33**, No. 4 (1997), 467–490.
4. S. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations.* — Stoch. Stoch. Rep. **37** (1991), 61–74.
5. Я. И. Белопольская, *Вероятностные модели законов сохранения и баланса в режимах с переключениями* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 5–43.
6. R. Griego, R. Hersh, *Random evolutions, Markov chains and systems of partial differential equations.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **62** (1969), 305–308.
7. A. Jüngel, *Diffusive and nondiffusive population models.* — In: Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences, Birkhäuser, pp. 397–425, 2010.
8. L. Desvillettes, T. Lepoutre, A. Moussa, *Entropy, duality and cross diffusion.* — SIAM J. Math. Anal. **46**, No. 1 (2014), 820–853.
9. H. Jin, Z. Wang, L. Xiong, *Cauchy problem of the magnetohydrodynamic Burgers system.* — Commun. Math. Sci. **13**, No. 1 (2015), 127–151.
10. P. Olesen, *An integrable version of Burgers equation in magnetohydrodynamics.* — Phys. Rev. E Statist. Nonlin. Soft Matter Physics **68** (1 Pt 2), 016307. (2003)
11. Я. И. Белопольская, *Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 2 (2016), 268–299.
12. Я. И. Белопольская, *Вероятностные модели динамики роста клеток при контактном ингибировании.* — Математические заметки **101**, No. 3 (2017), 346–358.
13. H. Kunita, *Stochastic flows acting on Schwartz distributions.* — J. Theoret. Probab. **7**, No. 2 (1994), 247–278.
14. H. Kunita, *Generalized solutions of stochastic partial differential equations.* — J. Theoret. Probab. **7**, No. 2 (1994), 279–308.

15. Ya. Belopolskaya, W. Woyczynski, *Generalized solutions of nonlinear parabolic equations and diffusion processes.* — Acta Applicandae Mathematicae, **96**, No. 1–3 (2007), 55–69.
16. Ya. Belopolskaya, W. Woyczynski, *Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes.* — Stoch. Dynam. **11**, No. 1 (2012), 1–31.

Belopolskaya Ya. I., Stepanova A. O. Stochastic interpretation of the MHD-Burgers system.

We construct a stochastic interpretation of generalised solution of the Cauchy problem for the simplest magneto-hydrodynamics system, namely, a system including the Burgers equation with a pressure due to a magnetic field. The probabilistic representation constructed in the paper can be used for numerical computations.

Санкт-Петербургский
Государственный
Архитектурно-Строительный
Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
190005, С.-Петербург,

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 16 октября 2017 г.