Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 465, 2017 г.

Е. Ш. Гутшабаш, П. П. Кулиш

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА И НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ БОРНА–ИНФЕЛЬДА

Модель Борна–Инфельда (BI) [1], предложенная в начале 30-ых годов XX века, представляет собой нелинейное обобщение элетродинамики Максвелла (подробное обсуждение как ее преимуществ, так и недостатков по "горячим следам" было дано в [2]). В связи с этим отметим, что все увеличивающее внимание к этой модели обусловлено рядом ее замечательных свойств: релятивистской инвариантностью, гамильтоновостью, конечностью энергии, рядом свойств симметрии, и, наконец, обнаруженным сравнительно недавно свойством вполне интегрируемости – наличием лаксовой пары, позволяющим строить семейства солитонных решений. Все это стимулировало расширение сферы ее приложения, и, в настоящее время, она и ее обобщения активно используются, в частности, в теории бозонных струн и суперструн [3] и космологии [4].

Данная работа посвящена важным аспектам модели BI: гамильтоновой структуре (включая вариант уравнения в конусных переменных) и построению с помощью преобразования Беклунда ее новых точных решений.

1. Основным объектом теории является вещественнозначное скалярное безмассовое поле $\phi = \phi(x,t)$, связанное с функцией от двух инвариантов электродинамики Максвелла:

$$I_1 = (1/2)F_{ik}F^{ik} = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/2$$

и

$$I_2 = (1/4)e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathbf{EB},$$

где F_{ik} – тензор электромагнитного поля, e_{iklm} – полностью антисимметричный единичный тензор 4-го ранга. В случае (1+1)-мерного псевдоевклидова пространства с метрикой $\epsilon_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1)$ эта связь дается соотношением:

$$b^2(I_1 - b^2 I_2^2) = \epsilon_{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu = \phi_x^2 - \phi_t^2,$$

Ключевые слова: модель Борна–Инфельда, преобразование Бэклунда, точные решения, "одетое" решение Барбашова–Черникова.

где b – постоянная Борна, имеющая смысл величины, обратной некоторому "максимальному" полю $\sim E_0^2$,

Нелинейное уравнение для поля ϕ порождается либо при выполнении условия равенства нулю полной дивергенции вектора

$$G_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\phi_\nu / \sqrt{1 + b^2(I_1 - b^2 I_2^2)},$$

либо, эквивалентно, действием Борна–Инфельда

$$(\mathcal{L} = (1/b^2)\Big\{1 - \sqrt{1 + \phi_x^2 - \phi_t^2}\,\Big\} \text{ – плотность лагранжиана,}$$

постоянную b – ниже, для простоты, будем считать равной единице):

$$S(\phi) = \iint \mathcal{L}\, dx\, dt = \iint \Big\{1 - \sqrt{1 + \phi_x^2 - \phi_t^2}\,\Big\}\, dx\, dt, \tag{1}$$

и записывается в виде

$$(1 + \phi_x^2)\phi_{tt} - 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} - (1 - \phi_t^2)\phi_{xx} = 0. \tag{2}$$

Оно относится к классу нелинейных уравнений гиперболического типа[1], причем предполагается выполненным условие

$$1 + \phi_x^2 - \phi_t^2 > 0, \tag{3}$$

а также накладывается требование достаточно быстрого убывания решения $\phi(x) = \phi(x, 0)$ и его производных, например, в смысле Шварца. Заметим, также, что (2) имеет наглядный геометрический смысл: оно представляет собой минимальный граф в псевдоевклидовом пространстве переменных $\{x, t, \phi(x,t)\}$ с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - d\phi^2$; при этом существует его естественный аналог в евклидовом пространстве в виде графа минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$.[2]

Положим

$$\pi(x,t) = \partial\mathcal{L}/\partial\phi_t = \phi_t / \sqrt{1 + \phi_x^2 - \phi_t^2},$$

тогда набор функций $(\phi(x), \pi(x))$, где $\phi(x) = \phi(x, 0)$, $\pi(x) = \phi_t(x, 0)$, образует фазовое пространство Γ динамической системы (2), и она

[1] Следует, также упомянуть, что уравнение BI с точностью до замены $t \to y$, где y – вторая координата на плоскости, совпадает с уравнением для потенциала скорости двумерного сверхзвукового течения газа [5].

[2] Построению точных решений на основе метода Захарова–Шабата для соответствующего уравнения эллиптического типа – уравнению минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ – посвящена работа [6].

обладает гамильтонианом ($\mathcal{H} = \pi\phi_t + \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1$ – плотность гамильтониана):

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\pi\phi_t + \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1)\, dx. \tag{4}$$

Введя пуассонову структуру на Γ в виде скобок

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0, \quad \{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(x-y), \tag{5}$$

нетрудно убедиться, что уравнения движения, эквивалентные (2), примут гамильтонову форму

$$\pi_t = \{\pi, H\} = -\frac{\delta H}{\delta\phi}. \tag{6}$$

Кроме того, импульс модели равен

$$P = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \pi\phi_x\, dx, \tag{7}$$

а генератор лоренцевых вращений (подгруппы группы Пуанкаре) есть

$$K = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\pi\phi_t + \sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2} - 1)\, dx; \tag{8}$$

при этом для скобок Пуассона, отвечающих соответствующей алгебре Ли, получаем:

$$\{H, P\} = 0, \quad \{H, K\} = P, \quad \{K, P\} = -H, \tag{9}$$

что идентично соотношениям для этих же генераторов в полевых моделях, включая, например, модели, описывамые уравнением sin – Gordon [7].

Введем, теперь, используемые в дальнейшем конусные переменные $\xi = (t-x)/2$, $\eta = (t+x)/2$. Тогда уравнение (2) перейдет в

$$2\widehat{\phi}_{\xi\eta}(\widehat{\phi}_\xi\widehat{\phi}_\eta - 2) - (\widehat{\phi}_\xi^2\widehat{\phi}_{\eta\eta} + \widehat{\phi}_\eta^2\widehat{\phi}_{\xi\xi}) = 0, \tag{10}$$

так, что имеют место связи

$$\widehat{\phi}(\xi, \eta) = \phi(\eta-\xi, \eta+\xi), \quad \phi(x,t) = \widehat{\phi}\Big(\frac{t-x}{2}, \frac{t+x}{2}\Big). \tag{11}$$

В терминах этих переменных действие (1) перепишется (с условием гиперболичности $\widehat{\phi}_\xi \widehat{\phi}_\eta < 1$) как

$$\widehat{S}(\widehat{\phi}) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \widehat{\phi}_\xi \widehat{\phi}_\eta} \right\} d\xi \, d\eta. \tag{12}$$

Фазовое пространство $\widehat{\Gamma}$ динамической системы (10) теперь образовано каноническими переменными $\widehat{\phi}(\xi)$ и $\widehat{\pi}(\xi)$ (в предположении достаточно быстрого их убывания при $\xi \to \pm\infty$), где $\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi, \eta = 0)$, $\widehat{\pi}(\xi) = (\partial \widehat{\mathcal{L}} / \partial \widehat{\phi}_\eta)_{|\eta=0}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ – лагранжева плотность (подинтегральное выражение в (12)), а гамильтониан (4) перейдет в следующий:

$$\widehat{H} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{\pi} \widehat{\phi}_\eta + 2\sqrt{1 - \widehat{\phi}_\xi \widehat{\phi}_\eta} - 2 \right] d\xi; \tag{13}$$

при этом пуассонова структура на $\widehat{\Gamma}$ будет иметь вид:

$$\{\widehat{\phi}(\xi), \widehat{\phi}(\xi')\} = 0, \quad \{\widehat{\pi}(\xi), \widehat{\pi}(\xi')\} = 0, \quad \{\widehat{\phi}(\xi), \widehat{\pi}(\xi')\} = \delta(\xi - \xi'). \tag{14}$$

С учетом (13) и (14) уравнение (10) может быть представлено в гамильтоновой форме:

$$\widehat{\pi}_\eta = \{\widehat{H}, \widehat{\pi}\} = -\frac{\delta \widehat{H}}{\delta \widehat{\phi}}. \tag{15}$$

В качестве импульса модели следует взять функционал

$$\widehat{P} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\pi} \widehat{\phi}_\eta \, d\xi, \tag{16}$$

а генератора лоренцевых вращений -

$$\widehat{K} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \left(\widehat{\pi} \widehat{\phi}_\eta + 2\sqrt{1 - \widehat{\phi}_\xi \widehat{\phi}_\eta} - 2 \right) d\xi. \tag{17}$$

2. Уравнение (2) обладает автопреобразованием Бэклунда, впервые приведенным (без дальнейшего применения), по-видимому, в [8] [3]. Для

[3]Некоторые свойства преобразования Бэклунда на основе его связи с инвариантами Римана исследовались в [9].

того, что бы это показать, заметим, что дифференциальные формы

$$\omega_1 = \frac{\phi_x}{\mathcal{L}}\,dx + \frac{\phi_t}{\mathcal{L}}\,dt \quad \text{и} \quad \omega_2 = \phi_x\,dx + \phi_t\,dt \tag{18}$$

являются точными, и, следовательно, соотношения

$$\Phi_x = \frac{\phi_t}{\mathcal{L}}, \quad \Phi_t = \frac{\phi_x}{\mathcal{L}} \tag{19}$$

и образуют искомое преобразование. Таким образом, новое решение уравнения (2) можно записать в виде криволинейного интеграла, не зависящего от пути интегрирования:

$$\Phi(x,t) = \int\limits_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} \frac{\phi_t}{\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}}\;dx + \frac{\phi_x}{\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}}\;dt. \tag{20}$$

В конусных переменных автопреобразование (19) примет вид:

$$\widehat{\Phi}_\xi = -\frac{\widehat{\phi}_\xi}{\sqrt{1-\widehat{\phi}_\xi\widehat{\phi}_\eta}}, \quad \widehat{\Phi}_\eta = \frac{\widehat{\phi}_\eta}{\sqrt{1-\widehat{\phi}_\xi\widehat{\phi}_\eta}}, \tag{21}$$

и, значит, новое решение также будет представлено в виде не зависящего от пути криволинейного интеграла

$$\widehat{\Phi}(\xi,\eta) = \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)} -\frac{\widehat{\phi}_\xi}{\sqrt{1-\widehat{\phi}_\xi\widehat{\phi}_\eta}}\,d\xi + \frac{\widehat{\phi}_\eta}{\sqrt{1-\widehat{\phi}_\xi\widehat{\phi}_\eta}}\,d\eta \tag{22}$$

(мы предполагаем, что интегралы, входящие в (20) и (22) существуют; следует отметить, также, что преобразования (19) и (21) не содержат никакого параметра).

3. Ниже мы построим некоторые простейшие решения уравнения (2) ((10)), а также проиллюстрируем применение формул (20) и (22).

а). Очевидно, что функции вида

$$\widehat{\phi}(\xi,\eta) = \widehat{\phi}_1(\xi) \quad \text{и} \quad \widehat{\phi}(\xi,\eta) = \widehat{\phi}_2(\eta), \tag{23}$$

где $\widehat{\phi}_1$, $\widehat{\phi}_2$ – произвольные функции, являются решениями уравнения (10). Они описывают одномерные уединенные волны, распространяющиеся вдоль характеристик ($\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ соответственно). Подставляя каждое из этих решений поочередно в (22), нетрудно видеть, что в ответе мы получим (ввиду инвариантности уравнения (10) относительно сдвигов решений на произвольную постоянную, здесь и ниже мы ее опускаем): $\widehat{\Phi}(\xi,\eta) = -\widehat{\phi}_1(\xi)$ и $\widehat{\Phi}(\xi,\eta) = \widehat{\phi}_2(\eta)$ соответственно; при этом первый случай отражает тот факт, что уравнение (10) инвариантно относительно замены $\phi(\xi,\eta) \to -\phi(\xi,\eta)$, а во втором – преобразование Бэклунда оставляет решение неизменным. Ясно, что, например, повторное применение этого преобразования приведет к первоначальной картине.

b). Рассмотрим решение вида: $\widehat{\phi}(\xi,\eta) = \widehat{\phi}_1(\xi) + \widehat{\phi}_2(\eta)$. После подстановки его в (10) и интегрирования получим:

$$\widehat{\phi}(\xi,\eta) = \pm\frac{1}{c_0}\ln\left|\frac{c_0\xi + c_1}{c_0\eta + c_2}\right|, \tag{24}$$

где c_0, c_1, c_2 – произвольные постоянные. Решения (24) с физической точки зрения означают состояния нелинейной суперпозиции двух уединенных волн, распространяющихся вдоль соответствующих характеристик. Подставляя, например, первое из них в (22), и выполняя интегрирование, будем иметь:

$$\widehat{\Phi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{c_0}\ln\left|\frac{(G+\sqrt{G^2-1})(H+\sqrt{H^2-1})}{(G_0+\sqrt{G_0^2-1})(H_0+\sqrt{H_0^2-1}}\right|, \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} G = G(\xi,\eta) = 2(c_0\xi + c_1)(c_0\eta + c_2) + 1, \\ H = H(\xi_0,\eta) = 2(c_0\xi_0 + c_1)(c_0\eta + c_2) + 1, \\ G_0 = G(\xi_0,\eta), \quad H_0 = H(\xi_0,\eta_0). \end{gathered}$$

Также, как и (24), соотношение (25) описывает (более сложную) нелинейную суперпозицию волн на характеристиках.

c). Положим в (2) $\phi(x,t) = X(x)T(t)$. В этом случае оно примет вид:

$$\frac{T_{tt}}{T} + X_x^2(TT_{tt} - 2T_t^2) - \frac{X_{xx}}{X} + XT_t^2X_{xx} = 0. \tag{26}$$

Дифференцируя это уравнение по x, будем иметь:

$$(X_x^2)_x(TT_{tt} - 2T_t^2) - (\frac{X_{xx}}{X})_x + (T_t)^2(XX_{xx})_x = 0. \tag{27}$$

Выбор $T(t) = t$ и константы, возникающей в результате интегрирования этого уравнения, равной нулю, приводит, как нетрудно видеть, к функции $X(x) = \tanh(\alpha x + \beta)$, где α, β – произвольные постоянные. Таким образом, мы получаем:

$$\phi(x,t) = t\tanh(\alpha x + \beta). \tag{28}$$

Аналогично, полагая в (26) $X(x) = x$ и интегрируя получающееся уравнение, найдем, что (γ, δ – произвольные постоянные)

$$\phi(x,t) = x\tan(\gamma t + \delta). \tag{29}$$

Решения (28) и (29) ранее несколько иным способом были построены в [10]. Заметим, также, что (29) является аналогом геликоида – давно и хорошо известного решения уравнения минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Применение к (28) преобразования Бэклунда дает

$$\begin{aligned}\Phi(x,t) = {}& \frac{1}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2t^2}}\Big[\cosh(\alpha x + \beta) - \cosh(\alpha x_0 + \beta)\Big] \\ & + \frac{1}{\cosh(\alpha x_0 + \beta)}\Big[\sqrt{1+\alpha^2t^2} - \sqrt{1+\alpha^2t_0^2}\Big].\end{aligned} \tag{30}$$

При фиксированном t и $x \to \infty$ это решение будет растущим при $\alpha > 0$ и убывающем при $\alpha < 0$.

Вычислим новое решение, используя (29). Снова применяя (20), после интегрирования будем иметь:

$$\begin{aligned}\Phi(x,t) = {}& -\gamma\Big[\sqrt{\cos^2(\gamma t+\delta) - x^2} - \sqrt{\cos^2(\gamma t+\delta) - x_0^2}\Big] \\ & - \frac{1}{\gamma}\Big[\sqrt{\cos^2(\gamma t+\delta) - x_0^2} - \sqrt{\cos^2(\gamma t_0+\delta) - x_0^2}\Big].\end{aligned} \tag{31}$$

Это решение, периодическое по переменной t, справедливо, в силу требования вещественности поля Φ, в области

$$|x| < \cos(\gamma t + \delta), \quad \cos(\gamma t + \delta) > |x_0|.$$

d). Пусть решение (2) ищется в виде $\phi(x,t) = \chi(z)$, $z = t^2 - x^2$. После его подстановки в это уравнение, получим уравнение на функцию χ

$$z\chi_{zz} + \chi_z - 2z\chi_z^3 = 0. \tag{32}$$

Отсюда находим, что $\chi_z = (Cz^2 + 4z))^{-1/2}$, где C – произвольная постоянная. Если $C = 0$, то будем иметь решение вида:

$$\phi(x,t) = \sqrt{t^2 - x^2}, \tag{33}$$

справедливое в области $t^2 > x^2$, т.е внутри светового конуса.

Пусть, теперь, $C \neq 0$, причем $C < 0$. Положим $C_1 = -C$, $C_1 > 0$. Тогда в результате интегрирования получаем ограниченное (по x и t)

решение уравнения (2)[4]:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \arctan \frac{C_1(t^2-x^2)-2}{\sqrt{C_1(t^2-x^2)[4-C_1(t^2-x^2)]}}, \tag{34}$$

определенное в области $0 < t^2 - x^2 < 4/C_1$ и обращающееся в константу на световом конусе $t = \pm x$.

Интересно отметить, что в обоих случаях (33) и (34) $\mathcal{L} = 1$, и преобразования Бэклунда оставляет эти решения неизменными.

е). Рассмотрим известное решение Барбашова–Черникова уравнения (2) [12], следуя монографии [13], в которой это решение (также, как и в [12], но в иной форме) было получено с помощью преобразования годографа. Оно отвечает взаимодействию двух встречных уединенных волн (солитонов) и имеет вид:

$$\phi(x,t) = \phi_{10}(x - t + \varkappa_1) + \phi_{20}(x + t + \varkappa_2), \tag{35}$$

где ϕ_{10}, ϕ_{20} – произвольные локализованные и достаточно гладкие функции, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – константы, равные нулю при $t < 0$ и равные

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{20q}^2 \, dq \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{10s}^2 \, ds \tag{36}$$

при $t \to \infty$, соответственно, и имеющие смысл начальных фаз волн.

Для построения нового ("одетого") решения удобно перейти к другим, по сравнению с ξ, η, конусным переменным вида

$$\xi_1 = (x - t + \varkappa_1)/2, \quad \eta_1 = (x + t + \varkappa_2)/2,$$

так, что

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\phi}}(\eta_1, \xi_1) &= \phi\Big(\eta_1 + \xi_1 - \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2},\ \eta_1 - \xi_1 - \frac{\varkappa_2 + \varkappa_1}{2}\Big), \\ \phi(x,t) &= \widehat{\widehat{\phi}}\Big(\frac{x - t - \varkappa_1}{2}, \frac{x + t + \varkappa_2}{2}\Big). \end{aligned} \tag{37}$$

В этих переменных уравнение (10) перейдет в следующее (при выполнении условия гиперболичности $1 + \widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1} \widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1} > 0$):

$$2\widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1\eta_1}\Big(2 + \widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1} \widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1}\Big) - \Big(\widehat{\widehat{\phi}}^2_{\eta_1} \widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1\xi_1} + \widehat{\widehat{\phi}}^2_{\xi_1} \widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1\eta_1}\Big) = 0, \tag{38}$$

[4]Решения (33) и (34) ранее были получены в [11] в результате группового анализа (2).

а из (19) будем иметь соответствующее автопреобразование Беклунда:

$$\widehat{\widehat{\Phi}}_{\xi_1} = -\frac{\widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1}}{\sqrt{1+\widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1}\widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1}}}, \quad \widehat{\widehat{\Phi}}_{\eta_1} = \frac{\widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1}}{\sqrt{1+\widehat{\widehat{\phi}}_{\xi_1}\widehat{\widehat{\phi}}_{\eta_1}}}. \tag{39}$$

Отсюда находим однократно "одетое" решение Барбашова–Черникова:

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(\xi_1,\eta_1) = -\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)} \frac{\widehat{\widehat{\phi}}_{10\xi_1}}{\sqrt{1+\widehat{\widehat{\phi}}_{10\xi_1}\widehat{\widehat{\phi}}_{20\eta_1}}}\,d\xi_1 + \frac{\widehat{\widehat{\phi}}_{20\eta_1}}{\sqrt{1+\widehat{\widehat{\phi}}_{10\xi_1}\widehat{\widehat{\phi}}_{20\eta_1}}}\,d\eta_1. \tag{40}$$

Необходимо отметить, что это решение, как и (35), имеет место только при $t<0$ (в этом случае $\varkappa_1=\varkappa_2=0$) или при $t\to\infty$ (когда $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ задаются интегралами (36)).

Выберем в качестве примера применения этого соотношения функции $\widehat{\widehat{\phi}}_{10}$ и $\widehat{\widehat{\phi}}_{20}$ в виде: $\widehat{\widehat{\phi}}_{10}(\xi_1) = A\sin\xi_1$ и $\widehat{\widehat{\phi}}_{20}(\eta_1) = B\sin\eta_1$, где A, B – амплитуды волн (мы предполагаем, что это заданные положительные величины). Тогда формула (40) перепишется как

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(\xi_1,\eta_1) = -\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)} \frac{A\cos\xi_1}{\sqrt{1+C_1\cos\xi_1}}\,d\xi_1 + \frac{B\cos\eta_1}{\sqrt{1+C_2\cos\eta_1}}\,d\eta_1, \tag{41}$$

где $C_1 = C_1(\eta_0) = AB\cos\eta_0$, $C_2 = C_2(\xi_0) = AB\cos\xi_0$. Предполагая, для определенности, что C_1, $C_2>0$, т.е. η_0, $\xi_0 \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ (другие комбинации знаков рассматриваются аналогично [5]) и выполнив интегрирование, получаем (см., например, [14]):

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\Phi}}(\xi_1,\eta_1) = &-\frac{2A}{C_1\sqrt{1+C_1}}[(1+C_1)E(\frac{\xi_1}{2},k_1) - F(\frac{\xi_1}{2},k_1)]\\ &+\frac{2B}{C_2\sqrt{1+C_2}}[(1+C_2)E(\frac{\eta_1}{2},k_2) - F(\frac{\eta_1}{2},k_2)],\\ &\xi_1\in[\max(\xi_0,0),\pi], \quad \eta_1\in[\max(\eta_0,0),\pi],\end{aligned} \tag{42}$$

[5]Например, при $C_1<0$ решение будет выражаться через эллиптические интегралы первого и третьего рода.

где

$$F(\Psi,k)=\int\limits_0^{\Psi}\frac{d\Psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Psi}} \quad \text{и} \quad E(\Psi,k)=\int\limits_0^{\Psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\Psi}\,d\Psi \qquad (43)$$

– эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $k_1^2=2C_1/(1+C_1)$, $\quad k_2^2=2C_2/(1+C_2)$, причем $0<k_1,\ k_2\leqslant 1$, и, таким образом, $C_1,\ C_2\leqslant 1$. С учетом того, что при $k\ll 1$ интегралы (43) имеют асимптотики вида

$$F(\Psi,k)=\Psi+(1/4)(\Psi-\sin 2\Psi/2)k^2+O(k^4),$$

$$E(\Psi,k)=\Psi-(1/4)(\Psi-\sin 2\Psi/2)k^2+O(k^4),$$

из (41) следует асимптотическое представление "одетого" решения Барбашова–Черникова при $k_1,\ k_2\ll 1$, $k_1/k_2=O(1)$ (здесь аддитивные постоянные мы снова опустили):

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\Phi}}(\xi_1,\eta_1)=&-\frac{A}{\sqrt{1+C_1}}\Big[\xi_1-\frac{2+C_1}{2(1+C_1)}(\xi_1-\sin\xi_1)\Big]\\ &+\frac{B}{\sqrt{1+C_2}}\Big[\eta_1-\frac{2+C_2}{2(1+C_2)}(\eta_1-\sin\eta_1)\Big]+O(k_1^2)+O(k_2^2).\end{aligned}\qquad (44)$$

Заметим, также, что в силу периодичности подинтегрального выражения (41), решение (42) не изменится при заменах

$$\xi_0\to\xi_0+2\pi m_1,\quad \xi_1\to\xi_1+2\pi m_1,\quad \eta_0\to\eta_0+2\pi n_1,$$

$$\eta_1\to\eta_1+2\pi n_1,\quad m_1,\,n_1=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots,$$

и, тем самым, оно продолжается во внешность области, указанной в (42).

С физической точки зрения формула (42) описывает распространение вдоль характеристик нелинейных волн на фоне линейных, а процедура "одевания" – как это следует из (44) – при малых k_1 и k_2 сводится к "перенормировке" амплитуд затравочных решений и линейным добавкам.

4). В данной работе, используя преобразования Бэклунда, был получен некоторый набор точных решений уравнения BI. В частности, процедура "одевания" решения Барбашова–Черникова основывались на линеаризации уравнения (2) с помощью преобразования годографа.

Другая возможность систематического конструирования точных решений связана с наличем уже упоминавшегося во введении лаксова представления для этого уравнения [15]. Оказалось, что существует интересная связь между (2), некоторой сигма-моделью, а также гиперболической версией уравнения, принадлежащему классу Монжа–Ампера. Это позволяет, в принципе, развить процедуру метода обратной задачи одновременно для обоих этих уравнений, построить для них серии законов сохранения и т.д., и, кроме того, установить связи между решениями (в эллиптическов варианте это частично было реализовано в [16]).

В совокупности, эти результаты означают, что уравнение (2) может быть отнесено к классу так называемых C – интегрируемых уравнений (обстоятельный обзор на эту тему дан в [17]), а их дальнейшее развитие, включая исследование многомерных версий, представляются нам перспективным.

Один из авторов (Е.Ш.Г.) выражает благодарность М. В. Павлову за интерес к данной работе и полезную дискуссию.

Литература

1. M. Born, L. Infeld, Proc. R. Soc. Lond. A **144** (1934), 425.
2. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, *Классическая теория поля*, ГИТТЛ, М., 1951.
3. S. V. Ketov, *PIERS Proceedings*, Moscow, 110 (2009).
4. G. Felder, L. Kofman, A. Starobinsky, JHEP 0209:026 (2002) `hep-th/0208019`.
5. Л. Берс, *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики*, ИЛ., М., 1961.
6. Е. Ш. Гутшабаш, Письма в ЖЭТФ **99**, (2014), 827; `arXiv: 1409.6741`.
7. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
8. M. Arik, F. Neyzi, Y. Nutku, P. Olver, J. M. Verosky, IMA Preprint Series 497, (1989).
9. О. Ф. Меньших, Мат. заметки **77** (2005), 551.
10. K. Mallory, R. A. van Gorder, K. Vajravelu, Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul. **19** (2014), 1669–1674.
11. В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов, Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Наукова думка, Киев, 1989; M. Nadjafikhah, S. R. Hejazi, `arXiv:1009/5490`.
12. Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, ЖЭТФ **50** (1996), 1296–1308.
13. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Наука, М., 1974.
14. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1, Физматлит, М., 2002.
15. J. Brunelli, M. Gürses, K. Zheltukhin, Rev. Math. Phys **13** (2001), 529.
16. Е. Ш. Гутшабаш, Зап. научн. семин. ПОМИ **374** (2010), 121–135.

17. Ф. Калоджеро, *В сб. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, Наукова думка, Киев, 1990, с. 65–116.

Gutshabash E. Sh., Kulish P. P. New exact solutions of the Born-Infeld model.

The Lagrangian and Hamiltonian of the Born–Infeld model in the cartesian as well in the light cone variables are given. Using the auto-Backlund transformation the new solutions of the corresponding nonlinear equation are constructed. In particular, the "dressed" Barbashov–Chernikov's solution is obtained.

С.-Петербургский университет
телекоммуникаций,
наб.реки Мойки, 61,
191186, С.-Петербург, Россия

Поступило 21 ноября 2017 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

E-mail: gutshab@mail.ru