

П. А. Валиневич, С. Э. Деркачев, А. П. Исаев,  
А. В. Комисарчук

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ, $6j$ -СИМВОЛЫ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЕСА SOS-МОДЕЛЕЙ

### §1. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕРШИННЫМИ ТОЧНО РЕШАЕМЫМИ МОДЕЛЯМИ И МОДЕЛЯМИ SOS

Точно решаемые вершинные модели [1, 2] определяются как модели на двумерной решетке, где каждой вершине приписывается статистический вес  $R_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(u)$  ( $R$ -матрица), который зависит от параметра  $u$  и величин  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$ , характеризующих состояние четырех ребер, соединяющих эту вершину с соседними. Согласно квантовому методу обратной задачи [2, 3, 13] статистическая сумма такой модели может быть найдена точно, если для  $R$ -матрицы выполнено уравнение Янга–Бакстера

$$\sum_{m'_1, m'_2, m'_3} R_{m'_1 m'_2}^{m''_1 m''_2}(u) R_{m_1 m'_3}^{m'_1 m'_3}(u+v) R_{m_2 m_3}^{m'_2 m'_3}(v) = \sum_{m'_1, m'_2, m'_3} R_{m'_2 m'_3}^{m''_2 m''_3}(v) R_{m'_1 m_3}^{m'_1 m'_3}(u+v) R_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(u). \quad (1)$$

Известен обширный класс решений этого уравнения, который связан с алгебрами Ли классических серий, или Янгианами  $Y(sl(N))$ ,  $Y(so(N))$  и  $Y(sp(2N))$ . Например,  $SL(N)$  (соответственно  $SU(N)$ ) симметричная  $R$ -матрица имеет вид

$$R_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(u) = u \delta_{m_1}^{m'_1} \delta_{m_2}^{m'_2} + \delta_{m_2}^{m'_1} \delta_{m_1}^{m'_2}, \quad (2)$$

где индексы (параметры состояния ребер)  $m_i, m'_i$  пробегает  $N$  значений:  $m_i, m'_i = 1, 2, \dots, N$ . Решения (2) – это  $R$ -матрицы интегрируемых спиновых цепочек  $SU(N)$ -типа. В простейшем случае, когда

---

*Ключевые слова:* уравнение Янга–Бакстера,  $6j$ -символы, статистические точно решаемые модели.

Работа П.В. и А.И. была поддержана грантом РФФ 14-11-00598. С.Д. и А.К. благодарны РФФИ за финансовую поддержку (проект 17-01-00283\_А).

$N = 2$ , и параметр состояния ребра может принимать только два значения, решение (1) является матрицей  $4 \times 4$ , и возникает при описании ХХХ магнетика Гейзенберга.

Исходя из решения (2) можно с помощью процедуры слияния (fusion) [8] построить целую серию  $SU(N)$ -симметричных решений уравнения (1). В частном случае  $N = 2$  в результате этой процедуры получаются модели, для которых статистический вес узла дается представлениями  $R^{(j_1 j_2)}(u)$  универсальной  $R$ -матрицы, действующими в тензорном произведении  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  двух пространств представлений группы  $SU(2)$  ( $j_1$  и  $j_2$  – спины представлений). Это модели, которые могут интерпретироваться как модели ХХХ магнетика Гейзенберга, у которого в узлах цепочки находятся атомы со спином  $j_1$  и связью, описываемой состояниями со спином  $j_2$ . Другая интерпретация этой системы – вершинная модель на двумерной решетке, при этом каждому ребру решетки приписывается параметр состояния, который может принимать значения от  $-j_1$  до  $+j_1$  для вертикальных ребер и от  $-j_2$  до  $+j_2$  для горизонтальных;  $R^{(j_1 j_2)}(u)$  будет матрицей размера  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \times (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Запишем уравнение Янга–Бакстера (1) для  $R$ -операторов  $R^{(jj')}(u)$  в следующем виде

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \quad (3)$$

Операторы  $R_{kl}(w) = R^{(j_k j_l)}(w)$  в левой и правой части этого уравнения действуют в пространстве  $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \otimes V_{j_3}$ , где  $V_j$  — пространство представления группы  $SU(2)$  со спином  $j$ , при этом, по определению,  $R_{kl}$  действует нетривиально только на  $V_{j_k} \otimes V_{j_l}$ . Выберем в тензорном произведении пространств  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  несвязанный базис  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ . В этом базисе матричные элементы  $R$ -оператора определяются стандартным образом

$$R_{12}(u) (|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \sum_{m'_1, m'_2} (|j_1, m'_1\rangle \otimes |j_2, m'_2\rangle) R_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(u). \quad (4)$$

Записывая операторное уравнение (3) в матричном виде, мы получаем уравнение (1), где необходимо помнить, что  $m_k, m'_k, m''_k = (-j_k, -j_k + 1, \dots, j_k)$ .

Модели SOS (Solid-on-Solid) [1, 4, 5] относятся к двумерным решеточным моделям статистической физики, в которых дискретный набор состояний, например задаваемых целым числом, приписывается

вершинам (узлам) решетки, а не ребрам, как в вершинной модели. Таким образом, статистический вес  $W(a, b, c, d|u)$ , зависящий от спектрального параметра  $u$ , приписывается каждой элементарной ячейке квадратной решетки и определяется состояниями  $a, b, c, d$  четырех ее вершин<sup>1</sup>. Указанное отличие вершинных и SOS моделей приводит к тому, что в моделях SOS состояние, приписываемое одной вершине, встречается в статистических весах четырех смежных ячеек, тогда как в вершинных моделях состояние одного ребра влияет на статистический вес только двух вершин, которые оно соединяет. Отметим, что статистический вес  $W$  всей решетки получается как произведение статистических весов всех элементарных ячеек, а статистическая сумма модели SOS равна сумме весов  $W$  по всем состояниям вершин решетки.

Для модели, предложенной в [4], на параметры  $a, b, c, d$ , характеризующие состояния вершин (узлов) решетки, накладывается дополнительное условие, при котором переход к соседней вершине сопровождается изменением параметра на  $\pm 1$ , (то есть,  $a - b = \pm 1, b - c = \pm 1, c - d = \pm 1, d - a = \pm 1$ ). Другими словами, если эти условия не выполнены, то статистический вес  $W(a, b, c, d|u)$  равен нулю.

Модель будет точно решаемой, если веса удовлетворяют соотношению “звезда-треугольник” [5]

$$\begin{aligned} \sum_g W(a, b, g, f|u-v)W(b, c, d, g|u)W(g, d, e, f|v) \\ = \sum_{g'} W(b, c, g, a|v)W(a, g, e, f|u)W(g, c, d, e|u-v). \end{aligned} \quad (5)$$

Ненулевые компоненты веса  $W$ , удовлетворяющего указанным выше условиям, можно представить в виде матрицы  $4 \times 4$ . Для такой модели решение уравнения (5) впервые было дано в [4]. С помощью процедуры слияния можно получить веса  $W_{N_1 N_2}(a, b, c, d|u)$  для более общих моделей, в которых при движении вдоль горизонтальных ребер параметр состояния вершины меняется не более чем на  $N_1$ , а при

<sup>1</sup>Будем считать, что вершины элементарной ячейки в обозначении  $W(a, b, c, d)$  записаны в порядке их обхода против часовой стрелки начиная с левого нижнего угла.

движении вдоль вертикальных ребер – не более чем на  $N_2$ :

$$\begin{aligned} (a-b), (c-d) &= -N_1, -N_1+2, \dots, N_1 \\ (a-d), (b-c) &= -N_2, -N_2+2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Такие веса будут удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} &\sum_g W_{N_2 N_3}(a, b, g, f|u-v) W_{N_1 N_3}(b, c, d, g|u) W_{N_1 N_2}(g, d, e, f|v) \\ &= \sum_{g'} W_{N_1 N_2}(b, c, g, a|v) W_{N_1 N_3}(a, g, e, f|u) W_{N_2 N_3}(g, c, d, e|u-v), \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразование, которое позволяет связать  $R^{(j_1 j_2)}$  и  $W_{N_1 N_2}$  описано в работе [14]. В следующем разделе мы изложим идею [14] и предложим удобный диаграммный метод установления этой связи.

**1.1. Соответствие между вершинными и SOS моделями.** Рассмотрим  $R$ -оператор, действующий в  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  и удовлетворяющий (3), матричные элементы которого определяются согласно (4). Добавим вспомогательное пространство  $V_{j_4}$ , и в тензорном произведении  $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \otimes V_{j_4}$  перейдем к связанному базису.

Для этого понадобятся коэффициенты Клебша–Гордана

$$\langle j_{12}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \text{ и } \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_{12}, m \rangle,$$

которые определяются стандартным образом:

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sum_{j_{12}, m} \langle j_{12}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle |(j_1 j_2) j_{12}, m\rangle; \quad (8)$$

$$|(j_1 j_2), j_{12}, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_{12}, m \rangle |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle, \quad (9)$$

где  $|(j_1 j_2), j_{12}, m\rangle$  – базис в пространствах  $V_{j_{12}}$ , возникающих при разложении  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  на неприводимые компоненты:

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j_{12}=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_{j_{12}}.$$

В тройном тензорном произведении к связанному базису можно перейти несколькими способами. Если сначала найдем вектора  $|(j_2 j_4), j_{24}, m\rangle$  в представлении  $V_{j_{24}}$ , которое выделяется в  $V_{j_2} \otimes V_{j_4}$ ,

а затем в  $V_{j_1} \otimes V_{j_{24}}$  построим связанный базис, то получим вектора, которые обозначим  $|(j_2 j_4), j_1, j_{24}; J, M\rangle$ . Можно действовать и по-другому: в  $V_{j_1} \otimes V_{j_4}$  строим  $|(j_1 j_4), j_{14}, m\rangle$ , а уже из них – вектора  $|(j_1 j_4), j_2, j_{14}; J, M\rangle$  в  $V_{j_2} \otimes V_{j_{14}}$ .

Нас будут интересовать матричные элементы

$$\langle (j_1 j_4) j_2, j_{14}; J, M | R_{12}(u) | (j_2 j_4) j_1, j_{24}; J', M' \rangle.$$

В силу  $SL(2)$ -инвариантности  $R$ -оператора они будут пропорциональны  $\delta_{JJ'} \delta_{MM'}$  и не будут зависеть от  $M$ . Поэтому нетривиальным будет только элемент

$$R_{j_1 j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u) = \langle (j_1 j_4) j_2, j_{14}; J | R_{12}(u) | (j_2 j_4) j_1, j_{24}; J \rangle, \quad (10)$$

Где  $|(j_1 j_4) j_2, j_{14}; J\rangle \equiv |(j_1 j_4) j_2, j_{14}; J, -J\rangle$  – младший вектор. Последнее равенство можно записать в виде, аналогичном (4):

$$\begin{aligned} R_{12}(u) | (j_1 j_4), j_2, j_{14}; J, M \rangle \\ = \sum_{j_{14}} | (j_2 j_4), j_1, j_{24}; J', M' \rangle R_{j_1 j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u) \delta_{MM'} \delta_{JJ'}. \end{aligned} \quad (11)$$

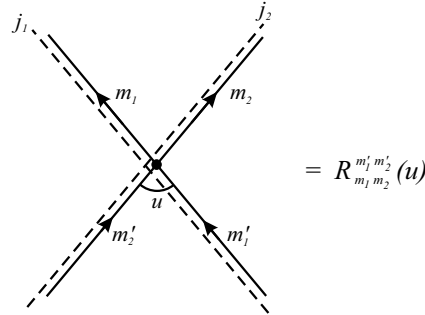
Именно эти матричные элементы, согласно [14], будут удовлетворять требуемому соотношению “звезда-треугольник”. Ниже мы предлагаем графический способ вывода этих соотношений, основанный на диаграммной технике, использованной в [6, 7, 15] для наглядного представления квантовых  $6j$ -символов.

Все полученные нами соотношения также переносятся и на  $6j$ -символы  $\left\{ \begin{smallmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ j_1 & J & j_{14} \end{smallmatrix} \right\}$ , которые, с точностью до константы, определяются формулой (10), если положить в ней  $R(u) = \mathbb{1}$ :

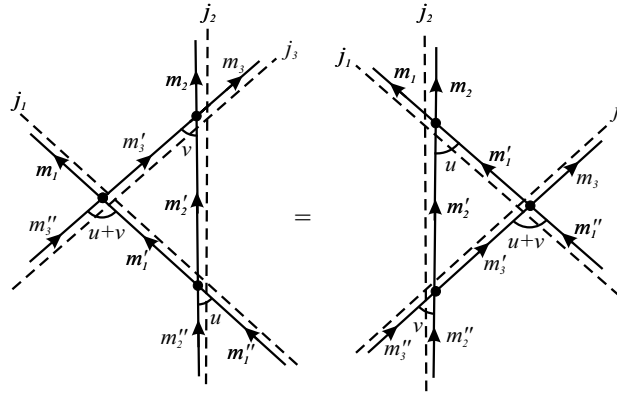
$$\begin{aligned} | (j_1 j_4), j_2, j_{14}; J, M \rangle \\ = \sum_{j_{24}} (-1)^{j_1 + j_2 + j_{14} + j_{24}} \sqrt{(2j_{24} + 1)(2j_{14} + 1)} \left\{ \begin{smallmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ j_1 & J & j_{14} \end{smallmatrix} \right\} \\ \times | (j_2 j_4) j_1, j_{24}; J \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогом соотношения “звезда-треугольник” будет равенство для суммы произведений трёх  $6j$ -символов, которое известно в теории углового момента [9].

Если для матричного элемента  $R_{m_1 m_2}^{m_1' m_2'}(u)$  использовать графическое изображение:



то тогда уравнение (1) будет можно изобразить так:



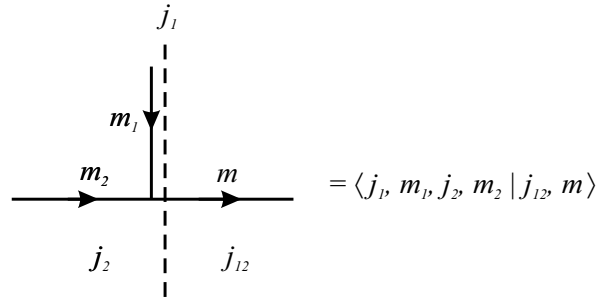
Здесь спины представлений  $j_1, j_2, j_3$  соответствуют линиям, а веса  $m$  - отрезкам или лучам этих линий. По тем весам, которые стоят на отрезках (на предыдущем рисунке это  $m'_1, m'_2, m'_3$ ), предполагается суммирование.

Связь между  $R_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(u)$  и  $R_{j_1 J j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u)$  можно получить, если в правой и левой части равенства (11) перейти к несвязанному базису с помощью коэффициентов Клебша–Гордана:

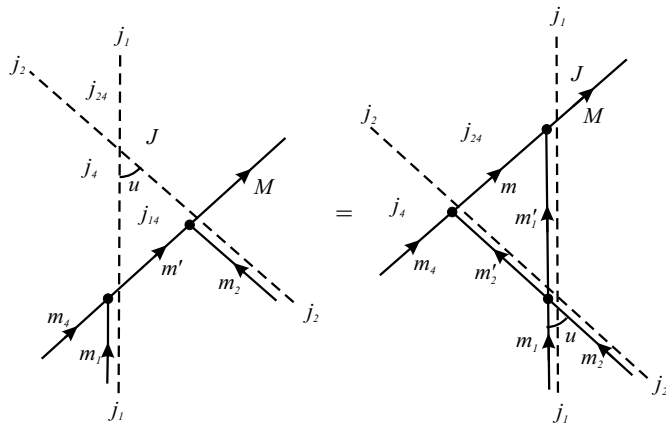
$$\sum_{m'_1, m'_2, m} R_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(u; j_1, j_2) \langle j_2, m'_2, j_4, m_4 | j_{24}, m \rangle \langle j_1, m'_1, j_{24}, m | J, M \rangle$$

$$= \sum_{j_{14}, m'} R_{j_1 J j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u) \langle j_1, m_1, j_4, m_4 | j_{14}, m' \rangle \langle j_2, m_2, j_{14}, m' | J, M \rangle. \quad (13)$$

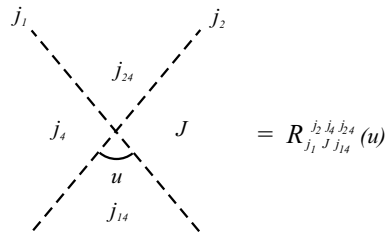
Чтобы представить это уравнение графически, введем диаграммное изображение для коэффициента Клебша–Гордана



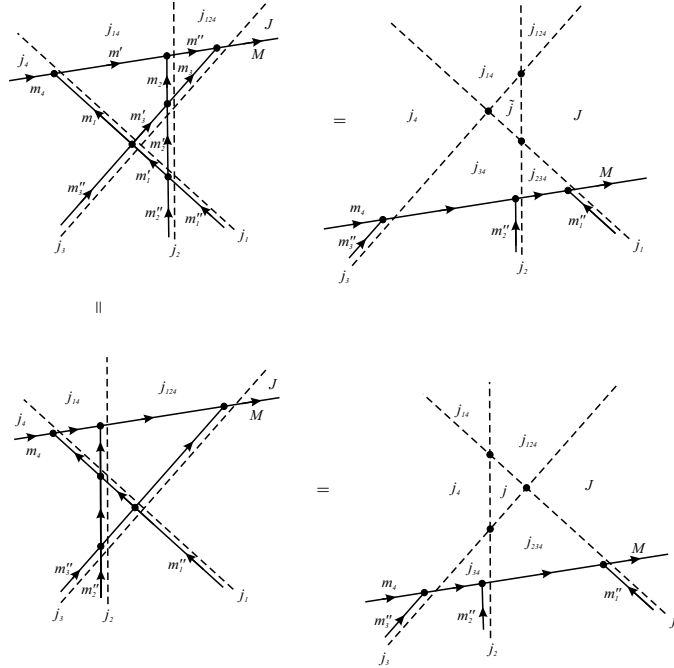
Здесь веса относятся только к сплошным линиям, а спины лежат на пунктирных линиях или на участках, ограниченных линиями. Уравнение (13) тогда можно изобразить так:



Здесь предполагается суммирование по весам, лежащим на замкнутых отрезках, и по спинам, принадлежащим замкнутым областям. В точке пересечения выполняется “закон сохранения”  $m_1 + m_2 = m$ . Пересечение двух пунктирных линий обозначает  $R_{j_1 J j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u)$  :



Эта диаграммная техника позволит легко получить аналог уравнения Янга–Бакстера для  $R_{j_1 J j_{14}}^{j_2 j_4 j_{24}}(u)$ . Рассмотрим следующую цепочку преобразований диаграмм (для удобства восприятия в ней не указаны значения спектральных параметров, которые легко восстанавливаются):



В левом верхнем углу изображена левая часть уравнения Янга–Бакстера (1)  $\sum_{m'_1, m'_2, m'_3} R_{m'_1 m'_2}^{m''_1 m''_2}(u) R_{m'_1 m'_3}^{m''_1 m''_3}(u+v) R_{m'_2 m'_3}^{m''_2 m''_3}(v)$ , умноженная на произведение коэффициентов Клебша–Гордана

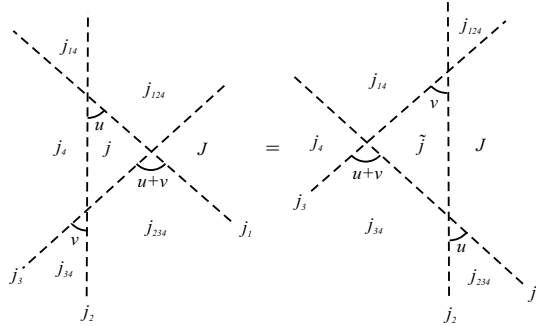
$$\langle j_1 m_1, j_4 m_4 | j_{14} m' \rangle \langle j_2 m_2, j_{14} m' | j_{124} m'' \rangle \langle j_3 m_3, j_{124} m'' | JM \rangle$$

с суммированием по  $m', m''$ . Диаграмма в правом верхнем углу получается, если трижды использовать (13), что выльется в параллельный перенос сплошной линии через три точки пересечения.

С другой стороны, из исходной диаграммы с помощью уравнения Янга–Бакстера можно получить диаграмму в левом нижнем углу, а



затем используя (13) – диаграмму в правом нижнем углу. Убирая коэффициенты Клебша–Гордана, получаем соотношение, которое имеет вид



Его расшифровка выглядит следующим образом:

$$\sum_j R_{j_1 j_{124} j}^{j_2 j_4 j_{14}}(u) R_{j_1 J, j_{234}}^{j_3 j j_{124}}(u+v) R_{j_2 j_{234} j_{34}}^{j_3 j_4 j}(v) = \sum_{\tilde{j}} R_{j_2 J, \tilde{j}}^{j_3 j_{14} j_{124}}(v) R_{j_1 \tilde{j} j_{34}}^{j_3 j_4 j_{14}}(u+v) R_{j_1 J j_{234}}^{j_2 j_{34} \tilde{j}}(u). \quad (14)$$

Если теперь положить

$$W_{KN}(a, b, c, d|u) = R_{\frac{K}{2} d c}^{\frac{K}{2} b a}(u), \quad (15)$$

то (14) перейдет в (7), и тем самым мы получаем статистические веса SOS моделей в виде (11). Ограничения (6) будут являться следствием законов сложения угловых моментов.

Аналогичные вычисления можно провести и для  $6j$ -символов. В результате получится аналог соотношения (14), который в теории углового момента выводится с помощью более сложных рассуждений [9].

Оставшаяся часть работы посвящена нахождению статистических весов  $W_{KN}$  по описанной выше процедуре. Окончательные ответы удается получить для частного случая  $N = 1$  и произвольного  $K$ . В общем случае получена формула для  $W_{KN}$  в виде скалярного произведения двух полиномов. Такого же типа формула получена и для  $6j$ -символов. С помощью нее воспроизведены известные ответы для случая, когда один из спинов равен  $\frac{1}{2}$ , а два других – произвольные.

Существенно облегчает вычисления использование реализации алгебры  $SU(2)$  на пространстве полиномов одной переменной, которая описана в следующем разделе.

## §2. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $SU(2)$ В НА ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМОВ

### 2.1. Пространство представления и спиновые операторы.

Для вычислений матричных элементов типа (10) будем пользоваться реализацией группы  $SU(2)$  на пространстве полиномов одной комплексной переменной  $z$  [10, 11]. Для элемента группы  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  его действие на функцию  $f(z)$  определяется по формуле

$$T^{(j)}(g)f(z) = (d - bz)^{2j} f\left(\frac{-c + az}{d - bz}\right), \quad (16)$$

где  $j$  – спин представления. Пространством представления  $V_j$  размерности  $2j + 1$  является пространство полиномов степени, не большей  $2j$ . Из (16) видно, что действие  $T^{(j)}(g)$  не выводит из этого пространства.

Представление генераторов алгебры Ли  $su(2)$ , соответствующее действию группы (16), имеет вид

$$S_+ = -z^2 \partial_z + 2jz; \quad S_3 = z \partial_z - j; \quad S_- = \partial_z, \quad (17)$$

где  $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ . Скалярное произведение, относительно которого представление (16) является унитарным, записывается следующим образом

$$\langle f(z)|g(z) \rangle = \int D^{(j)} z \overline{f(z)} g(z); \quad D^{(j)} z = \frac{2j + 1}{\pi} \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^{2j+2}}, \quad (18)$$

где интегрирование ведется по всей комплексной плоскости. При таком выборе скалярного произведения выполнены стандартные правила сопряжения для генераторов  $(S_{\pm})^\dagger = S_{\mp}$ ,  $(S_3)^\dagger = S_3$ , а нормированный базис в пространстве  $V_j$  состоит из векторов

$$|j, m\rangle = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j - m)!(j + m)!}} z^{j+m}, \quad (19)$$

т.е. норма монома  $z^k$  равна  $\|z^k\|^2 = [(2j)!]^{-1} (2j - k)! k!$ .

Действие экспоненциальных отображений генераторов (17) в пространстве функций от  $z$  легко находится из формулы (16):

$$\begin{aligned} e^{\lambda S_+} f(z) &= (1 + \lambda z)^{2j} f\left(\frac{z}{1 + \lambda z}\right); & e^{\lambda S_-} f(z) &= f(z + \lambda); \\ \lambda^{2S_3} f(z) &= \lambda^{-2j} f(\lambda^2 z). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя эти соотношения и формулу (16), можно написать разложение любого элемента  $g$  группы  $SU(2)$  на произведение экспоненциальных отображений генераторов, например

$$e^{\mu S_-} e^{\lambda S_+} = e^{\frac{\lambda}{1+\lambda\mu} S_+} (1 + \mu\lambda)^{-2S_3} e^{\frac{\mu}{1+\lambda\mu} S_-}, \quad (21)$$

где  $\mu, \nu$  – произвольные параметры.

**2.2. Производящая функция коэффициентов Клебша–Гордана.** Пусть теперь имеется два представления: представление в пространстве  $V_{j_1}$ , реализованном как пространство полиномов от переменной  $z_1$  степени не выше  $2j_1$ , и представление в пространстве  $V_{j_2}$  полиномов от  $z_2$  степени не выше  $2j_2$ . Построим связанный базис  $|(j_1 j_2); j, m\rangle$  в тензорном произведении  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ . Для этого рассмотрим пространство полиномов переменной  $z_3$ , на котором действует представление  $V_{j_3}$ . Определим оператор  $P(j_1 j_2 | j_3) : V_{j_1} \otimes V_{j_2} \rightarrow V_{j_3}$ , который функции  $\Phi(z_1, z_2)$  проецирует на подпространство спина  $j_3$  в  $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ , а затем  $|(j_1 j_2); j_3, m\rangle$  переводит в соответствующие базисные вектора  $\sqrt{(2j_3)! [(j_3 + m)! (j_3 - m)!]^{-1}} z_3^{j_3 + m}$  в пространстве  $V_{j_3}$ . Действие этого оператора можно представить в виде

$$\Phi(z_1, z_2) \mapsto [P(j_1 j_2 | j_3) \Phi](z_3) = \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 \overline{\Phi(z_1 z_2)} W \left( \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \right), \quad (22)$$

где мера была определена в (18), а функция  $W$  – ядро этого оператора. Функция  $W$  находится из условия  $SU(2)$ –инвариантности:

$$T^{(j_3)}(g) \Phi(z_3) = \langle (T^{(j_1)}(g) \otimes T^{(j_2)}(g)) \Phi(z_1, z_2) | W \left( \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \right) \rangle_{12}.$$

Переходя к инфинитезимальным преобразованиям  $T^{(j)}(g) = 1 + \epsilon_i S_i + \dots$ , где  $i = \{\pm, 3\}$ , и используя правила сопряжения  $(S_{\pm})^{\dagger} =$

$S_{\mp}, (S_3)^\dagger = S_3$  получаем систему уравнений на функцию  $W$  :

$$\begin{aligned} [S_-^{(1)} + S_-^{(2)} - S_+^{(3)}] W &= 0; \\ [S_+^{(1)} + S_+^{(2)} - S_-^{(3)}] W &= 0; \\ [S_3^{(1)} + S_3^{(2)} - S_3^{(3)}] W &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Её решение находится однозначно с точностью до константы:

$$W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = A (z_1 - z_2)^{j_1+j_2-j_3} (1+z_1 z_3)^{j_1+j_3-j_2} (1+z_2 z_3)^{j_2+j_3-j_1}, \quad (24)$$

где  $A$  фиксируется условием, что младший вектор  $|(j_1 j_2), j_3, -j_3\rangle$  из пространства  $V_{j_3}$  должен с помощью (22) переводиться в младший вектор в пространстве функций от переменной  $z_3$ , т.е. в  $\Phi(z_3) \equiv 1$ .

Младшие вектора  $|(j_1 j_2); j_3, -j_3\rangle \in V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  неприводимых представлений  $T^{(j_3)}$  легко определяются как решения<sup>2</sup> дифференциальных уравнений

$$S_-^{(12)} |(j_1 j_2); j_3, -j_3\rangle = 0, \quad S_3^{(12)} |(j_1 j_2); j_3, -j_3\rangle = -j_3 |(j_1 j_2); j_3, -j_3\rangle.$$

Они имеют вид  $|(j_1 j_2); j_3, -j_3\rangle = C_{j_1, j_2, j_3} z_{12}^{j_1+j_2-j_3}$ , где нормировочный множитель

$$\begin{aligned} &C_{j_1, j_2, j_3} \\ &= \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3+1)!}{(j_1+j_2-j_3)!(j_1+j_3-j_2)!(j_2+j_3-j_1)!(j_1+j_2+j_3+1)!}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, должно выполняться

$$C_{j_1, j_2, j_3} z_{12}^{j_1+j_2-j_3} \xrightarrow{P(j_1 j_2 | j_3)} 1$$

Функцию  $W$ , используя формулы для глобальных преобразований (20), можно представить в виде

$$W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = A e^{z_3 S_+^{(12)}} z_{12}^{j_1+j_2-j_3}. \quad (26)$$

<sup>2</sup>Здесь и далее в тексте будут использоваться сокращенные обозначения  $z_{ij} = z_i - z_j$  для разности переменных и  $S_{\pm}^{(12)} = S_{\pm}^{(1)} + S_{\pm}^{(2)}$ ,  $S_3^{(12)} = S_3^{(1)} + S_3^{(2)}$ ,  $S_{\pm}^{(123)} = S_{\pm}^{(1)} + S_{\pm}^{(2)} + S_{\pm}^{(3)}$  и т.п. для операторов, действующих в тензорном произведении представлений.

Тогда из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
1 &= \langle C_{j_1, j_2, j_3} z_{12}^{j_1+j_2-j_3} | W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \rangle_{12} \\
&= C_{j_1, j_2, j_3} A \langle z_{12}^{j_1+j_2-j_3} | e^{z_3 S_+^{(12)}} z_{12}^{j_1+j_2-j_3} \rangle_{12} \\
&= C_{j_1, j_2, j_3} A \langle e^{\bar{z}_3 S_-^{(12)}} z_{12}^{j_1+j_2-j_3} | z_{12}^{j_1+j_2-j_3} \rangle_{12} \\
&= C_{j_1, j_2, j_3} A \| z_{12}^{j_1+j_2-j_3} \|_{12}^2 = C_{j_1, j_2, j_3} A \cdot \frac{1}{C_{j_1, j_2, j_3}^2}
\end{aligned}$$

получаем, что  $A = C_{j_1, j_2, j_3}$ .

Обратный оператор  $P(j_3 | j_1 j_2) : V_{j_3} \rightarrow V_{j_1} \otimes V_{j_2}$  определяется по формуле

$$\begin{aligned}
\Phi(z_3) &\mapsto [P(j_3 | j_1 j_2) \Phi](z_1, z_2) = \langle \Phi(z_3) | W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \rangle_3 \\
&= \int D z_3 \overline{\Phi(z_3)} W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ядро этого оператора будет тем же самым, так как снова оно определяется из  $SU(2)$ -инвариантности и удовлетворяет тем же уравнениям (23). Можно убедиться, что с таким же нормировочным множителем обратное преобразование переводит младший вектор в  $V_{j_3}$  в соответствующий младший вектор на пространстве двух переменных  $z_1, z_2$  :

$$1 \xrightarrow{P(j_3 | j_1 j_2)} C_{j_1, j_2, j_3} z_{12}^{j_1+j_2-j_3}.$$

Ядро  $W$  является производящей функцией для коэффициентов Клебша—Гордана [11]. Для того, чтобы это увидеть, применим к правой и левой части (8) оператор  $P(j_1 j_2 | j_{12})$ . Элемент связанного базиса в правой части после действия на него  $P(j_1 j_2 | j_{12})$  перейдет в такой же вектор в пространстве  $V_{j_{12}}$  функций одной переменной, и мы получим

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(2j_2)!(2j_1)!}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}} \\
&\quad \times \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \bar{z}_1^{j_1+m_1} \bar{z}_2^{j_2+m_2} \\
&= \sqrt{\frac{(2j_{12})!}{(j_{12}+m)!(j_{12}-m)!}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_{12}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle z_3^{j_{12}+m}, \quad (27)
\end{aligned}$$

откуда, умножая правую и левую часть на  $z_3^k$  и интегрируя по  $D^{(j_3)} z_3$ , получаем

$$\begin{aligned} & \langle j_{12}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_{12})!}{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!(j_{12} + m)!(j_{12} - m)!}} \\ & \times \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 D^{(j_3)} z_3 W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \bar{z}_1^{j_1+m_1} \bar{z}_2^{j_2+m_2} \bar{z}_3^{j_{12}+m}. \quad (28) \end{aligned}$$

При этом выполнение “закона сохранения”  $m = m_1 + m_2$  будет автоматически следовать из однородности функции  $W$ .

Для рассматриваемого скалярного произведения определим аналог  $\delta$ -функции – воспроизводящее ядро  $\Lambda(z_1, z_2)$ :

$$\Phi(x_2) = \int D^{(j)} x_1 \overline{\Lambda(x_2, x_1)} \Phi(x_1) = \langle \Lambda(x_2, x_1) | \Phi(x_1) \rangle_1.$$

Легко получить, что для (18)

$$\Lambda(x_2, x_1) = (1 + x_1 \bar{x}_2)^{2j}. \quad (29)$$

Условия ортогональности и полноты коэффициентов Клебша–Гордана

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_3, m_3 | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3', m_3' \rangle = \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'} \quad (30)$$

$$\sum_{j_3, m} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \langle j_3, m_3 | j_1, m_1', j_2, m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (31)$$

в терминах  $W$  имеют принимают следующий вид

$$\int D z_1 D z_2 \overline{W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}} W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ z_1 & z_2 & z_3' \end{pmatrix} = \delta_{j_3 j_3'} (1 + \bar{z}_3 z_3')^{2j_3}, \quad (32)$$

$$\sum_{j_3} \int D z_3 \overline{W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}} W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1' & z_2' & z_3 \end{pmatrix} = (1 + z_2' \bar{z}_2)^{2j_2} (1 + z_1' \bar{z}_1)^{2j_1}. \quad (33)$$

Интегральные соотношения (32)–(33) можно доказать и непосредственно, не прибегая к связи  $W$  с коэффициентами Клебша–Гордана (см. Приложение 1).

**2.3. Младшие вектора в тензорном произведении трех представлений.** Рассмотрим тензорное произведение трех представлений  $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \otimes V_{j_3}$ , где  $V_{j_k}$  реализовано как пространство полиномов степени не большей  $2j_k$  от переменной  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Пусть  $|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle$  – младшие вектора, которые получаются при использовании разложения  $V_{j_2} \otimes V_{j_3} = \bigoplus_{j_{23}} V_{j_{23}}$ ;  $V_{j_1} \otimes V_{j_{23}} = \bigoplus_J V_J$ . При использовании другого порядка вычисления тензорного произведения представлений  $V_{j_1} \otimes V_{j_3} = \bigoplus_{j_{13}} V_{j_{13}}$ ,  $V_{j_2} \otimes V_{j_{13}} = \bigoplus_J V_J$  получаем другой набор  $|(j_1 j_3), j_2, j_{13}; J\rangle$ .

Использование реализации алгебры на пространстве полиномов позволяет получить компактные выражения для этих векторов.

В  $V_{j_2} \otimes V_{j_3}$  младшие вектора  $|(j_2 j_3), j_{23}, -j_{23}\rangle = C_{j_{23}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}}$ ; значит произвольный вектор в  $V_{j_{23}}$  без учета нормировки имеет вид

$$\begin{aligned} & |(j_2 j_3), j_{23}, m\rangle \\ & \sim \left[ S_+^{(23)} \right]^{j_{23}+m} (z_2 - z_3)^{j_2+j_3-j_{23}} = \partial_\lambda^{j_{23}+m} e^{\lambda S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \Big|_{\lambda=0} \\ & = \partial_\lambda^{j_{23}+m} (1 + \lambda z_2)^{j_2-j_3+j_{23}} (1 + \lambda z_3)^{j_3-j_2+j_{23}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \Big|_{\lambda=0}, \end{aligned}$$

Искомый младший вектор  $|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} S_-^{(123)} |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle &= 0, \\ S_3^{(123)} |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle &= -J |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle, \end{aligned}$$

т.е.

$$(\partial_{z_1} + \partial_{z_2} + \partial_{z_3}) |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & (z_1 \partial_{z_1} + z_2 \partial_{z_2} + z_3 \partial_{z_3}) |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle \\ & = (j_1 + j_2 + j_3 - J) |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

и принадлежит пространству  $V_{j_1} \otimes V_{j_{23}}$ , все вектора которого можно представить в виде

$$\sum_{m=-j_{23}}^{j_{23}} \sum_{k=0}^{2j_1} C_{m,k} |(j_2 j_3), j_{23}, m\rangle \cdot z_1^k. \quad (36)$$

Условие (35) фиксирует степень однородности полинома в правой части (36). Принимая это во внимание (или учитывая то, что вес вектора

$z^k$  равен  $(k - j_1)$ , получаем

$$|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle = \sum_k C_k |(j_2 j_3); j_{23}, j_1 - J - k\rangle \cdot z_1^k. \quad (37)$$

Условие (34) означает, что вектор

$$|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle := |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J, -J\rangle$$

как функция  $z_1, z_2, z_3$  инвариантен относительно одновременного сдвига всех переменных на одну и ту же величину, т.е. если  $\Phi(z_1, z_2, z_3) = |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle$ , то  $\Phi(z_1, z_2, z_3) = \Phi(z_1 - \lambda, z_2 - \lambda, z_3 - \lambda)$  для любого  $\lambda$ . Если выбрать  $\lambda = z_1$ , то из суммы (37) выживет только слагаемое с  $k = 0$ . Таким образом

$$\begin{aligned} & |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle \\ &= (-1)^{j_{23}+j_1-J} \partial_\lambda^{j_{23}+j_1-J} (1+\lambda z_{21})^{j_2+j_{23}-j_3} (1+\lambda z_{31})^{j_3+j_{23}-j_2} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \Big|_{\lambda=0} \\ &= B \partial_\lambda^{j_{23}+j_1-J} W \left( \begin{array}{ccc} j_2 & j_3 & j_{23} \\ z_{21} & z_{31} & -\lambda \end{array} \right) \Big|_{\lambda=0}, \quad (38) \end{aligned}$$

где знаковый множитель в первой строке обусловлен выбором порядка тензорных сомножителей в  $V_{j_1} \otimes V_{j_{23}}$ .

Нормировочный множитель  $B$ , зависящий от всех входящих в определение младшего вектора спинов  $j_1, j_2, j_3, j_{23}, J$ , находится с использованием свойств функции  $W$ . Его вычисление приведено в Приложении 2.

Формулу (38) можно преобразовать далее, если перейти от дифференцирования по  $\lambda$  к  $\tilde{\lambda} = \lambda z_{21}$ . Тогда (переобозначая  $\tilde{\lambda} \rightarrow z$ ) получаем

$$|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle = B (z_2 - z_1)^{j_1+j_2+j_3-J} \partial_z^{j_{23}+j_1-J} W \left( \begin{array}{ccc} j_2 & j_3 & j_{23} \\ 1 & \eta & -z \end{array} \right) \Big|_{z=0}, \quad (39)$$

где  $\eta = \frac{z_{31}}{z_{21}}$ .

Чтобы получить выражение для  $|(j_1 j_3), j_2, j_{13}; J\rangle$  нужно в (39) сделать замены  $j_1 \leftrightarrow j_2, z_1 \leftrightarrow z_2, j_{23} \rightarrow j_{13}$ :

$$|(j_1 j_3), j_2, j_{13}; J\rangle = B' (z_1 - z_2)^{j_1+j_2+j_3-J} \partial_{z'}^{j_{13}+j_2-J} W \left( \begin{array}{ccc} j_1 & j_3 & j_{13} \\ 1 & 1-\eta & -z' \end{array} \right) \Big|_{z'=0}. \quad (40)$$

Здесь  $B'$  – нормировочный множитель, который получается из  $B$  заменой  $j_1 \rightarrow j_2, j_2 \rightarrow j_1, j_{23} \rightarrow j_{13}$ .

Таким образом, мы получили выражения для младших векторов, которые можно использовать для вычисления  $6j$ -символов (12) и матричных элементов  $R$ -оператора (11).



§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ  $6j$ -СИМВОЛОВ

Подставляя (39), (40) в определение  $6j$ -символов (12) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & w\left(\begin{matrix} j_1 & j_3 \\ 1 & 1-\eta \end{matrix}; j_{13}, j_2 - J\right) \\ &= \sum_{j_{23}} (-1)^{j_3 + J - j_{13} - j_{23}} \sqrt{(2j_{13} + 1)(2j_{23} + 1)} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ j_1 & J & j_{13} \end{matrix} \right\} \cdot w\left(\begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{23}, j_1 - J\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где введено обозначение

$$w\left(\begin{matrix} j_1 & j_2 \\ z_1 & z_2 \end{matrix}; j_3, A\right) = B \partial_z^{j_3 + A} W\left(\begin{matrix} j_1 & j_3 & j_3 \\ z_1 & z_2 & -z \end{matrix}\right) \Big|_{z=0}, \quad (42)$$

Из уравнения (41) видно, что  $6j$ -символы – это коэффициенты разложения семейства полиномов  $w\left(\begin{matrix} j_1 & j_3 \\ 1 & 1-\eta \end{matrix}; j_{13}, j_2 - J\right)$  по переменной  $\eta$  степени  $(j_1 + j_2 + j_3 - J)$ , нумеруемых параметром  $j_{13}$ , по другому семейству полиномов  $w\left(\begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{23}, j_1 - J\right)$  той же степени, зависящих от параметра  $j_{23}$ . Для частных случаев малых спинов их можно найти прямым вычислением.

**3.1. Частные случаи.**

- $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ ,  $j_3 = j$

Нетривиальными являются только коэффициенты с  $J = \frac{1}{2}$ . В (41) в правой части будут встречаться функции

$$\begin{aligned} & w\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & j \\ 1 & \eta \end{matrix}; j + \frac{1}{2}, -j - \frac{1}{2}\right) = 1; \\ & w\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & j \\ 1 & \eta \end{matrix}; j + \frac{1}{2}, -j + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1 - 2j\eta}{\sqrt{(2j + 1)(2j + 2)}}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$w\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & j \\ 1 & \eta \end{matrix}; j - \frac{1}{2}, -j + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2j}{2j + 1}}(1 - \eta); \quad (44)$$

$$w\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & j \\ 1 & \eta \end{matrix}; j - \frac{1}{2}, -j + \frac{3}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2j - 1}{2j + 1}}\eta(1 - \eta).$$

функции в левой части будут отличаться заменой аргумента  $\eta \rightarrow 1 - \eta$ . Подставляя это в (41) получаем значения

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} j & j + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} j & j + \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{2j+1}}{(2j+1)(2j+2)}; \\ \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} j & j \pm \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} j & j \mp \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{2j+1}}{2j+1}; \quad \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} j & j - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} j & j - \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2j}}{2j(2j+1)}, \end{aligned} \quad (45)$$

которые совпадают с известными табличными [16].

- $j_1 = \frac{1}{2}$ ,  $j_2$  – произвольный.

Этот случай является обобщением предыдущего. В правой части (41) будут встречаться функции

$$\begin{aligned} w \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_3 + k, -j_3 - k \right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k+1)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k)!(2j_3+j_2+k+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} (1-\eta)^{j_2-k}; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} w \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_3 + k, -j_3 - k + 1 \right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k-1)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k)!(2j_3+j_2+k+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} (1-\eta)^{j_2-k} (-j_2-k-(2j_3-j_2+k)\eta), \end{aligned} \quad (47)$$

где  $k = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2$ . В левой части будут встречаться функции

$$\begin{aligned} w \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} & j_3 \\ 1 & 1-\eta \end{matrix}; j_3 - \frac{1}{2}, j_2 - j_3 + \frac{1}{2} - k \right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k-1)!(2j_3+j_2+k)!(2j_3+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \eta(\eta-1)^{j_2-k}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} w \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} & j_3 \\ 1 & 1-\eta \end{matrix}; j_3 + \frac{1}{2}, j_2 - j_3 - \frac{1}{2} - k \right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k+2)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k+1)!(2j_3+j_2+k+2)!(2j_3+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times (\eta-1)^{j_2-k-1} ((2j_3-j_2+k+1)(\eta-1) - j_2+k). \end{aligned} \quad (49)$$

После подстановки в (41) функций (46)–(49) можно заметить, что в правой и левой части можно сократить общий множитель  $(1-\eta)^{j_2-k-1}$ , после чего задача вычисления  $6j$ -символов сводится к нахождению коэффициентов разложения линейной по  $\eta$  функции на сумму двух

других линейных функций. После учета всех нормировочных множителей получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_3+k \\ \frac{1}{2} & j_3+k+\frac{1}{2} & j_3+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{2j_3+j_2+k+1} \left[ \frac{(2j_3+j_2+k+2)(2j_3-j_2+k+1)}{(2j_3+1)(2j_3+2)(2j_3+2k+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_3+k+1 \\ \frac{1}{2} & j_3+k+\frac{1}{2} & j_3+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{2j_3+j_2+k+1} \left[ \frac{(j_2+k+1)(j_2-k)}{(2j_3+1)(2j_3+2)(2j_3+2k+2)(2j_3+2k+3)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_3+k+1 \\ \frac{1}{2} & j_3+k+\frac{1}{2} & j_3-\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{2j_3+j_2+k+1} \left[ \frac{(2j_3+j_2+k+2)(2j_3-j_2+k+1)}{(2j_3)(2j_3+1)(2j_3+2k+2)(2j_3+2k+3)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_3+k \\ \frac{1}{2} & j_3+k+\frac{1}{2} & j_3-\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{2j_3+j_2+k} \left[ \frac{(j_2+k+1)(j_2-k)}{(2j_3)(2j_3+1)(2j_3+2k+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

что совпадает с табличными значениями [16].

**3.2. Общий случай.** В общем случае можно построить полиномы  $\widehat{w}$ , ортогональные к полиномам в правой части, т.е. такие, что

$$\int D\eta w \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{23}, j_1 - J \right) \overline{\widehat{w} \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j'_{23}, j_1 - J \right)} \simeq \delta_{j_{23}j'_{23}} \quad (50)$$

(где определению подлежит также мера интегрирования  $D\eta$ ). Тогда  $\delta j$ - символ представляется в виде скалярного произведения двух полиномов:

$$\left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ j_1 & J & j_{13} \end{matrix} \right\} \simeq \int D\eta w \left( \begin{matrix} j_1 & j_3 \\ 1 & 1-\eta \end{matrix}; j_{13}, j_2 - J \right) \overline{\widehat{w} \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{23}, j_1 - J \right)}. \quad (51)$$

Опишем метод, который позволяет построить такие полиномы  $\widehat{w}$ . Нам понадобится дополнительная конструкция – способ введения скалярного произведения на пространстве однородных полиномов фиксированной степени однородности.

Будем рассматривать полиномы двух переменных  $f(z_1, z_2)$ ,  $g(z_1, z_2)$ . Кроме использовавшегося ранее скалярного произведения

$$\begin{aligned} \langle f(z_1, z_2) | g(z_1, z_2) \rangle &= \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 f(z_1, z_2) \overline{g(z_1, z_2)}; \\ D^{(j)} z &= \frac{(2j+1)!}{\pi} \cdot \frac{d^2 z}{(1+|z|^2)^{2j+2}} \end{aligned} \quad (52)$$

нам понадобится еще одно, которое будет обозначаться круглыми скобками:

$$(f(x_1, x_2) | g(x_1, x_2)) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 e^{-|x_1|^2 - |x_2|^2} f(x_1, x_2) \overline{g(x_1, x_2)}. \quad (53)$$

Скалярное произведение базисных векторов для каждого из них имеет вид

$$\langle z_1^{k_1} z_2^{k_2} | z_1^{l_1} z_2^{l_2} \rangle = \frac{(2j_1 - k_1)! k_1!}{(2j_1)!} \cdot \frac{(2j_2 - k_2)! k_2!}{(2j_2)!} \delta_{k_1 l_1} \delta_{k_2 l_2}; \quad (54)$$

$$(x_1^{k_1} x_2^{k_2} | x_1^{l_1} x_2^{l_2}) = k_1! k_2! \delta_{k_1 l_1} \delta_{k_2 l_2}. \quad (55)$$

Для каждого из скалярных произведений существует своё воспроизводящее ядро:

$$\langle f(z_1, z_2) | (1 + z_1 \bar{z}_1)^{2j_1} (1 + z_2 \bar{z}_2)^{2j_2} \rangle = f(z_1', z_2'); \quad (56)$$

$$(f(x_1, x_2) | e^{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2}) = f(x_1', x_2'). \quad (57)$$

Определим теперь преобразование  $f \rightarrow \widehat{f}$  следующим образом:

$$\widehat{f}(x_1, x_2) = \langle f(z_1, z_2) | e^{z_1 \bar{x}_1 + z_2 \bar{x}_2} \rangle = \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 f(z_1, z_2) e^{x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2}. \quad (58)$$

Тогда обратное запишется как

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \left( \widehat{f}(x_1, x_2) | (1 + x_1 \bar{z}_1)^{2j_1} (1 + x_2 \bar{z}_2)^{2j_2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 e^{-|x_1|^2 - |x_2|^2} \widehat{f}(x_1, x_2) (1 + \bar{x}_1 z_1)^{2j_1} (1 + \bar{x}_2 z_2)^{2j_2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Пользуясь свойствами воспроизводящих ядер (56) и (57), из этих определений можно получить, что

$$\langle f(z_1, z_2) | g(z_1, z_2) \rangle = (\widehat{f}(x_1, x_2) | g(x_1, x_2)), \quad (60)$$

где в правой части стоит та же функция  $g$ , что и в левой части. Отсюда следует, например, то, что если  $g$  была ортогональна  $f$  относительно скалярного произведения  $\langle | \rangle$ , то  $g$  будет ортогональна  $\widehat{f}$  относительно  $( | )$ .

Предположим теперь, что  $f$  и  $g$  являются однородными полиномами степени  $N$ :

$$f(z_1, z_2) = z_1^N f(1, z_2/z_1), \quad g(z_1, z_2) = z_1^N g(1, z_2/z_1).$$

Тогда в определении (58) из экспоненты ненулевой вклад в скалярное произведение даст только член степени однородности  $N$  по  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ . Получим

$$\widehat{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{N!} \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 f(z_1, z_2) (x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2)^N. \quad (61)$$

Отсюда видно, что  $\widehat{f}(x_1, x_2)$  также является однородной функцией степени  $N$ . Тогда  $(\widehat{f}(x_1, x_2) | g(x_1, x_2))$  можно преобразовать далее, воспользовавшись свойством однородности:

$$\begin{aligned} & (\widehat{f}(x_1, x_2) | g(x_1, x_2)) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 e^{-|x_1|^2 - |x_2|^2} x_1^N \widehat{f}(1, x_2/x_1) \bar{x}_1^N \overline{g(1, x_2/x_1)}. \end{aligned}$$

После замены переменной  $x'_2 = x_2/x_1$  получим

$$\begin{aligned} & (\widehat{f}(x_1, x_2) | g(x_1, x_2)) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2 x_2 \widehat{f}(1, x_2) \overline{g(1, x_2)} \int d^2 x_1 |x_1|^{2N+2} e^{-|x_1|^2(1+|x_2|^2)}. \end{aligned}$$

Второй интеграл можно вычислить явно; в результате

$$(\widehat{f}(x_1, x_2) | g(x_1, x_2)) = \frac{(N+1)!}{\pi} \int \frac{d^2 x_2}{(1+|x_2|^2)^{N+2}} \widehat{f}(1, x_2) \overline{g(1, x_2)}.$$

Мера интегрирования здесь та же, что и в (52), но со спином  $N/2$ . Принимая во внимание все вышесказанное, получаем следующее утверждение:

**Утверждение.** Если  $f(z_1, z_2)$  и  $g(z_1, z_2)$  – однородные функции степени  $N$ , то формулу (60) можно представить в виде:

$$(f(z_1, z_2) | g(z_1, z_2)) = \int D^{(\frac{N}{2})} \eta \widehat{f}(\eta) \overline{g(\eta)}, \quad (62)$$

где  $g(\eta) \equiv g(1, \eta)$ ;  $\widehat{f}(\eta) \equiv \widehat{f}(1, \eta)$ , а  $\widehat{f}(z_1, z_2)$  дается формулой (58).

Таким образом, для однородных полиномов имеется возможность перейти от скалярного произведения по двум переменным к скалярному произведению по одной однородной переменной  $\eta$  со спином, равным половине степени однородности.

Рассмотрим теперь функции  $w$  от двух переменных  $z_1, z_2$ , определенные в (42). Запишем соотношение ортогональности для  $W$

$$\int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 W \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & -z \end{smallmatrix} \right) \overline{W \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & -z' \end{smallmatrix} \right)} = \delta_{j_3 j_3'} (1 + z \bar{z}')^{2j_3}, \quad (63)$$

применим к правой и левой его части  $\partial_z^{A+j_3} \partial_{\bar{z}'}^{A+j_3'}$ , после чего положим  $z = \bar{z}' = 0$ . В результате получим

$$\int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 w \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ z_1 & z_2 \end{smallmatrix}; j_3, A \right) \overline{w \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ z_1 & z_2 \end{smallmatrix}; j_3', A \right)} = \delta_{j_3 j_3'} B B' (2j_3)! \frac{(j_3 + A)!}{(j_3 - A)!}, \quad (64)$$

где  $B$  - нормировочный множитель (см. (39)), а  $B'$  отличается от  $B$  заменой  $j_3 \rightarrow j_3'$ . Кроме того,  $w \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ z_1 & z_2 \end{smallmatrix}; j_3, A \right)$  является однородным полиномом степени  $j_1 + j_2 + A$ , поэтому к системе этих функций применимо утверждение из предыдущего пункта. Значит можно перейти к однородной переменной  $\eta = z_2/z_1$ , и

$$\int D^{(\frac{N}{2})} \eta w \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ \eta \end{smallmatrix}; j_3, A \right) \overline{\hat{w} \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ \eta \end{smallmatrix}; j_3', A \right)} = \delta_{j_3 j_3'} B B' (2j_3)! \frac{(j_3 + A)!}{(j_3 - A)!}, \quad (65)$$

где  $N = j_1 + j_2 + A$ , а  $\hat{w}$  определяется по (58) или его следствию (61):

$$\begin{aligned} & \hat{w} \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ x_1 & x_2 \end{smallmatrix}; j_3, A \right) \\ &= \frac{B}{(j_1 + j_2 + A)!} \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 w \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ \eta \end{smallmatrix}; j_3, A \right) (x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2)^{j_1 + j_2 + A}. \end{aligned} \quad (66)$$

Если теперь воспользоваться представлением (26) для  $W$ , то предыдущую формулу можно преобразовать к более компактному виду

$$\begin{aligned} \hat{w} \left( \begin{smallmatrix} j_1 & j_2 \\ x_1 & x_2 \end{smallmatrix}; j_3, A \right) &= \frac{BC_{j_1, j_2, j_3}}{(j_1 + j_2 - j_3)!} (x_1 + x_2)^{A+j_3} \\ &\times \int D^{(j_1)} z_1 D^{(j_2)} z_2 z_{12}^{j_1 + j_2 - j_3} (x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2)^{j_1 + j_2 - j_3}. \end{aligned} \quad (67)$$

Подставляя это выражение в (51), получаем представление для  $6j$ -символа в виде скалярного произведения двух полиномов одинаковой степени.

#### §4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ $R$ -ОПЕРАТОРА

Найдем выражения для матричных элементов  $R$ -оператора (11), используя выражения для младших векторов. Явная формула для

$R^{(j_1 j_2)}(u)$  для произвольных  $j_1, j_2$  в виде дифференциального оператора, действующего на пространстве полиномов, может быть найдена, например, в [12]. Отличительной особенностью этого оператора является то, что он не меняет степень однородности полинома, поэтому, по аналогии с (41) можно записать:

$$\tilde{w} \left( \begin{matrix} j_1 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{13}, j_2 - J \right) = \sum_{j_{23}} R_{j_1 j_{13}}^{j_2 j_3 j_{23}} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 - J} \cdot w \left( \begin{matrix} j_2 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{23}, j_1 - J \right), \quad (68)$$

где полином в левой части

$$\tilde{w} \left( \begin{matrix} j_1 & j_3 \\ 1 & \eta \end{matrix}; j_{13}, j_2 - J \right) = (z_{12})^{J - j_1 - j_2 - j_3} R^{(j_1 j_2)}(u) | (j_1 j_3), j_2, j_{13}, J \rangle. \quad (69)$$

Для частных случаев коэффициенты в (68) можно найти непосредственно аналогично тому, как это делалось для  $6j$ -символов в предыдущем разделе.

- $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}, j_3 = j$

В этом случае  $R$ -оператор совпадает с фундаментальной  $R$ -матрицей (2); как оператор на пространстве  $V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}}$  он записывается как

$$R(u) = u + \frac{1}{2} + 2(z_1 \partial_1 - \frac{1}{2})(z_2 \partial_2 - \frac{1}{2}) - z_1 \partial_2 (z_1 \partial_1 - 1) - z_2 \partial_1 (z_2 \partial_2 - 1). \quad (70)$$

Действуя  $R(u)$  на функции (44), получаем следующие ненулевые коэффициенты в (68):

$$\begin{aligned} R_{\frac{1}{2}, j \pm 1, j \pm \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, j, j \pm \frac{1}{2}} &= u + 1; & R_{\frac{1}{2}, j, j \pm \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, j, j \pm \frac{1}{2}} &= \frac{2j + 1 \pm u}{2j + 1}; \\ R_{\frac{1}{2}, j, j \mp \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, j, j \pm \frac{1}{2}} &= u \frac{\sqrt{2j(2j+2)}}{2j+1}, \end{aligned} \quad (71)$$

Эти выражения совпадают с частным случаем, рассмотренным в [14].

- $j_1 = \frac{1}{2}, j_2$  — произвольный

В этом случае  $R$ -оператор совпадает с оператором Лакса и имеет вид

$$R(u) = u + 2(z_1 \partial_1 - \frac{1}{2})(z_2 \partial_2 - j_3) - z_1 \partial_2 (z_1 \partial_1 - 1) - z_2 \partial_1 (z_2 \partial_2 - 2j_3) \quad (72)$$

(для удобства здесь спектральный параметр сдвинут на  $\frac{1}{2}$  по сравнению с (70)). Действие  $R(u)$  на младшие вектора порождает следующие

функции  $\tilde{w}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{w}\left(\frac{1}{2} \begin{matrix} j_3 \\ \eta \end{matrix}; j_3 - \frac{1}{2}, j_2 - j_3 + \frac{1}{2} - k\right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k-1)!(2j_3+j_2+k)!(2j_3+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times (\eta - 1)^{j_2-k} (u - k - (u + j_2)(1 - \eta)), \quad (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w\left(\frac{1}{2} \begin{matrix} j_3 \\ \eta \end{matrix}; j_3 + \frac{1}{2}, j_2 - j_3 - \frac{1}{2} - k\right) \\ = \left[ \frac{(2j_2)!(2j_3)!(2j_3+2k+2)!}{(j_2+k)!(j_2-k)!(2j_3-j_2+k+1)!(2j_3+j_2+k+2)!(2j_3+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times (\eta - 1)^{j_2-k-1} ((j_2 - k)(2j_3 + k - u + 2) - (u + j_2)(2j_3 - j_2 + k + 1)(1 - \eta)). \quad (74) \end{aligned}$$

Как и при вычислении  $6j$ -символов, после подстановки в (68), происходит сокращение множителей  $(1 - \eta)^{j_2-k-1}$  в правой и левой части, после которого остается соотношение на линейные по  $\eta$  функции. В результате получаем

$$\begin{aligned} R_{\frac{1}{2}, j_3+k+\frac{1}{2}, j_3+\frac{1}{2}}^{j_2, j_3, j_3+k}(u) &= (u + k) \left[ \frac{(2j_3+j_2+k+2)(2j_3-j_2+k+1)}{(2j_3+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ R_{\frac{1}{2}, j_3+k+\frac{1}{2}, j_3+\frac{1}{2}}^{j_2, j_3, j_3+k+1}(u) &= (2j_3 + k - u + 2) \left[ \frac{(j_2+k+1)(j_2-k)}{(2j_3+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ R_{\frac{1}{2}, j_3+k+\frac{1}{2}, j_3-\frac{1}{2}}^{j_2, j_3, j_3+k}(u) &= (2j_3 + k + u + 1) \left[ \frac{(j_2+k+1)(j_2-k)}{(2j_3+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ R_{\frac{1}{2}, j_3+k+\frac{1}{2}, j_3-\frac{1}{2}}^{j_2, j_3, j_3+k+1}(u) &= (u - k - 1) \left[ \frac{(2j_3+j_2+k+2)(2j_3-j_2+k+1)}{(2j_3+1)(2j_3+2k+2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Эти функции, согласно (15), определяют статистические веса SOS модели с  $K = 1$  и произвольным  $N$ .

## §5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация группы  $SU(2)$  на пространстве полиномов одной переменной позволяет получить компактные формулы для младших векторов в тензорном произведении трех представлений и использовать их для вычисления  $6j$ -символов. Последние в таком подходе представляются в виде скалярного произведения двух полиномов. Следующим



шагом должно стать установление связи предложенного метода вычисления с классическим методом [16], в рамках которого получаются выражения для  $6j$ -символов в виде обрывающегося гипергеометрического ряда. Тем самым откроется путь к вычислению скалярных произведений для полиномов вида (42) и (67).

Вычисления статистических весов  $W_{KN}$  SOS-модели для произвольных значений параметров  $K, N$  с некоторыми усложнениями повторяют вычисления  $6j$ -символов. Соответственно, статистический вес  $W_{KN}$  также представляется в виде скалярного произведения двух полиномов (51). Авторы надеются, что развитый в работе метод позволит получить и для веса  $W_{KN}$  замкнутое выражение гипергеометрического типа.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ И ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $W$ .

Для доказательства ортогональности проекторов  $W$  левую часть (32) с помощью (26) представим в виде

$$C_{j_1, j_2, j_3} C_{j_1, j_2, j'_3} \langle e^{z_3 S_+^{(12)}} z_{12}^{j_1+j_2-j_3} | e^{z'_3 S_+^{(12)}} z_{12}^{j_1+j_2-j'_3} \rangle_{12}.$$

Далее переносим обе экспоненты в одну сторону скалярного произведения и пользуемся формулой (21). Поскольку

$$S_-^{(23)} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} = 0, \quad S_3^{(23)} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} = -j_{23} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}},$$

скалярное произведение превращается в

$$C_{j_1, j_2, j_3} C_{j_1, j_2, j'_3} (1 + \bar{z}_3 z'_3)^{2j_3} \| z_{12}^{j_1+j_2-j_3} \|^2 \delta_{j_3, j'_3},$$

что совпадает с правой частью (32).

Для доказательства полноты (33) представим ядро  $W$  в виде

$$W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = C_{j_1, j_2, j_3} z_{12}^{j_1+j_2} T^{(z_3)}(g) z_3^{j_1+j_3-j_2}; \quad (75)$$

$$g = z_{12}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $T^{(z_3)}$  – оператор представления  $SU(2)$ , определенный формулой (16), действующий по переменной  $z_3$ .

Если первый из сомножителей в (33) представить в таком виде, то действие  $T^{(z_3)}$  можно перенести на второй сомножитель, при этом  $g$

изменится на  $g^+$ . После применения оператора  $T^{(z_3)}(g^+)$ , скалярное произведение по переменной  $z_3$  в левой части (33) примет вид

$$\begin{aligned} \langle W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} | W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z'_1 & z'_2 & z_3 \end{pmatrix} \rangle_3 &= C_{j_1, j_2, j_3}^2 (\bar{z}_{12} z'_{12})^{j_{123}} \\ &\langle z_3^{j_{132}} [1 + z'_2 \bar{z}_2 + (1 + z'_2 \bar{z}_1) z_3]^{j_{231}} [1 + z'_1 \bar{z}_2 + (1 + z'_1 \bar{z}_1) z_3]^{j_{132}} \rangle_3, \end{aligned} \quad (76)$$

где введены краткие обозначения для линейных комбинаций спинов  $j_{\alpha\beta\gamma} = j_\alpha + j_\beta - j_\gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ . Сделаем теперь масштабную замену переменной  $z_3 \rightarrow z_3 \frac{1+z'_1 \bar{z}_1}{1+z'_1 \bar{z}_2}$ ,  $\bar{z}_3 \rightarrow z_3 \frac{1+z'_1 \bar{z}_2}{1+z'_1 \bar{z}_1}$ , которая не изменит меру интегрирования  $D^{(j_3)} z_3$  в скалярном произведении. После преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} | W \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ z'_1 & z'_2 & z_3 \end{pmatrix} \rangle_3 \\ = C_{j_1, j_2, j_3}^2 (\bar{z}_{12} z'_{12})^{j_{123}} (1 + z'_2 \bar{z}_2)^{j_{231}} (1 + z'_1 \bar{z}_1)^{j_{132}} \\ \langle z_3^{j_{132}} | (1 + z_3)^{j_{132}} (1 + \eta z_3)^{j_{231}} \rangle_3, \end{aligned} \quad (77)$$

где  $\eta = \frac{(1+z'_2 \bar{z}_1)(1+z'_1 \bar{z}_2)}{(1+z'_1 \bar{z}_1)(1+z'_2 \bar{z}_2)}$  – «ангармоническое отношение».

Подставляя (77) в (33) видим, что все остальные сомножители комбинировются в выражения, содержащие только  $\eta$ . Тогда условие полноты примет вид

$$\sum_{j_3} C_{j_1, j_2, j_3}^2 \langle z_3^{j_{132}} | (1 - \eta)^{j_{123}} (1 + z_3)^{j_{132}} (1 + \eta z_3)^{j_{231}} \rangle_3 = 1. \quad (78)$$

Вычисление скалярного произведения функции  $(1 - \eta)^{j_{123}} (1 + z_3)^{j_{132}} (1 + \eta z_3)^{j_{231}}$  и монома  $z_3^{j_{132}}$  равносильно нахождению коэффициента при  $z_3^{j_{132}}$  в этой функции с последующим умножением его на норму  $\|z_3^{j_{132}}\|^2$ . Последняя равна  $(j_{132})!(j_{231})![(2j_3)!]^{-1}$ , и это сократит часть множителей в  $C_{j_1, j_2, j_3}^2$ . Искомый же коэффициент может быть выражен при помощи контурного интеграла, если использовать следующее известное утверждение: для произвольной функции вида  $f(z) = \sum_n A_n z^n$  коэффициент  $A_k$  дается формулой

$$A_k = \oint_C \frac{dz}{2\pi i z} z^{-k} f(z),$$

где  $C$  – малый контур, обходящий точку  $z = 0$  против часовой стрелки.

Все эти соображения позволяют привести условие полноты к виду

$$\frac{(2j_1)!(2j_2)!}{(2j_1 + 2j_2 + 1)!} \sum_{j_3=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j_3 + 1) C_{2j_1+2j_2+1}^{j_123} \times \oint_C \frac{dz}{2\pi iz} z^{-j_{132}} (1-\eta)^{j_{123}} (1+z)^{j_{132}} (1+\eta z)^{j_{231}} = 1, \quad (79)$$

где  $C_{2j_1+2j_2+1}^{j_123}$  – биномиальный коэффициент.

После замены индекса суммирования  $j_3$  на  $n = j_1 + j_2 - j_3$  оно примет вид

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi iz} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{2j_1} (1+\eta z)^{2j_2} \times \sum_{n=0}^{2j_1} (2j_1 + 2j_2 - 2n + 1) C_{2j_1+2j_2+1}^n \left[ \frac{z(1-\eta)}{(1+\eta z)(1+z)} \right]^n = \frac{(2j_1 + 2j_2 + 1)!}{(2j_1)!(2j_2)!}. \quad (80)$$

Суммирование можно распространить и на более широкую область  $n = 0, \dots, (2j_1 + 2j_2 + 1)$ , так как при  $n > 2j_1$  в подынтегральном выражении пропадает особая точка при  $z = 0$ , и сам контурный интеграл становится равен нулю. После этого сумму можно вычислить явно, воспользовавшись формулой

$$\sum_{n=0}^A (A - 2n) C_A^n x^n = A(1+x)^{A-1}(1-x), \quad (81)$$

и в левой части (80) останется только контурный интеграл:

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi iz} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{2j_1} (1+\eta z)^{2j_2} \left(1 + \frac{z(1-\eta)}{(1+\eta z)(1+z)}\right)^{2j_1+2j_2} \times \left(1 - \frac{z(1-\eta)}{(1+\eta z)(1+z)}\right) = \frac{(2j_1 + 2j_2)!}{(2j_1)!(2j_2)!}. \quad (82)$$

Замена переменной  $t = \frac{z(1+\eta z)}{1+z}$  приводит его к

$$\oint_C \frac{dt}{2\pi it} t^{-2j_1} (1+t)^{2j_1+2j_2}$$

(контур  $C$  обходит точку  $t = 0$ ). Этот интеграл равен  $\frac{(2j_1+2j_2)!}{(2j_1)!(2j_2)!}$ , что совпадает с правой частью. Таким образом, (82) доказано, а вместе с ним и исходное условие полноты (33).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВОЧНОГО МНОЖИТЕЛЯ ДЛЯ МЛАДШИХ ВЕКТОРОВ

Нормировочный множитель  $B$  в (38) находится следующим образом. Представим  $|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle$  с помощью (20) в виде

$$|(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle = B \partial_\lambda^{j_{23}+j_1-J} \left\{ e^{-z_1 S_-^{(23)}} e^{-\lambda S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \right\} \Big|_{\lambda=0},$$

что по (21) может быть преобразовано к

$$\begin{aligned} & |(j_2 j_3), j_1, j_{23}; J\rangle \\ &= B \partial_\lambda^{j_{23}+j_1-J} \left\{ (1+\lambda z_1)^{2j_{23}} e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda z_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \right\} \Big|_{\lambda=0}, \end{aligned} \quad (83)$$

так как  $S_-^{(23)} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} = 0$  и  $S_3^{(23)} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} = -j_{23} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}}$ .

Найдем теперь норму этого вектора в пространстве  $V_{j_2} \otimes V_{j_3}$  как функцию переменных  $z_1, \bar{z}_1$ :

$$\begin{aligned} & \langle (j_2 j_3), j_1, j_{23}; J | (j_2 j_3), j_1, j_{23}; J \rangle_{23} \\ &= B^2 \partial_\lambda^{j_{23}+j_1-J} \partial_\mu^{j_{23}+j_1-J} (1+\lambda z_1)^{2j_{23}} (1+\mu \bar{z}_1)^{2j_{23}} \\ & \times \left\langle e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda z_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \middle| e^{-\frac{\mu}{1+\mu \bar{z}_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \right\rangle_{23} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} \end{aligned} \quad (84)$$

Возникшее в правой части скалярное произведение вычисляется путем переноса экспонент в одну часть и использования (21):

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda z_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \middle| e^{-\frac{\mu}{1+\mu \bar{z}_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \right\rangle_{23} \\ &= \left\langle z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \middle| e^{-\frac{\lambda}{1+\lambda \bar{z}_1} S_-^{(23)}} e^{-\frac{\mu}{1+\mu z_1} S_+^{(23)}} z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}} \right\rangle_{23} \\ &= \left[ 1 + \frac{\lambda}{1+\lambda \bar{z}_1} \frac{\mu}{1+\mu z_1} \right]^{2j_{23}} \cdot \|z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}}\|_{23}^2. \end{aligned} \quad (85)$$

Теперь подставим это в (84) и проинтегрируем по  $z_1$ . Норма младшего вектора должна быть равна 1, откуда нормировочный множитель

$$B^{-2} = \partial_{\lambda}^{j_{23}+j_1-J} \partial_{\mu}^{j_{23}+j_1-J} \int D^{(j_1)} z_1 [\mu\lambda + (1 + \lambda\bar{z}_1)(1 + \mu z_1)]^{2j_{23}} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} \times \|z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}}\|_{23}^2. \quad (86)$$

Получившиеся производные и интеграл вычисляются явно; окончательно имеем

$$B = C_{j_2, j_3, j_{23}} \cdot \sqrt{\frac{(2J+1)!(2j_1)!(J+j_{23}-j_1)!}{(2j_{23})!(j_1+j_{23}-J)!(j_1-j_{23}+J)!(j_{23}+j_1+J+1)!}}, \quad (87)$$

где  $C_{j_2, j_3, j_{23}}$  – нормировочный множитель (25) для  $z_{23}^{j_2+j_3-j_{23}}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М., Мир, 1985.
2. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, М, Наука, 1992.
3. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи. I.* — ТМФ **40**, No. 2 (1979) 194–220.
4. G. E. Andrews, R. J. Baxter, P. J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities.* — J. Stat. Phys. **35**, 193–266 (1984).
5. E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M Okado *Exactly solvable SOS models II.* — Adv. Stud. Pure Math. **16**, 17–122 (1988).
6. I. B. Frenkel, V. G. Turaev, *Trigonometric Solutions of the Yang-Baxter Equation, Nets, and Hypergeometric Functions.* — In: Functional Analysis on the Eve of 21st century, vol. 1, Progress in Math., 131, Birkhäuser, Boston, pp. 65–118, 1995.
7. I. B. Frenkel, V. G. Turaev, *Elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions.* The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars, Birkhäuser, Boston, pp. 171–204, 1997.
8. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Yang-Baxter equation and representation theory: I.* — Lett. Math. Phys. **5**, 393–404 (1981).
9. A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997
10. И. М. Гельфанд и М. И. Наймарк, *Унитарные представления классических групп.* — Тр. мат. инст. им В. И. Стеклова **36** (1950).
11. Д. П. Желобенко, *Лекции по теории групп Ли*, Дубна, 1965.
12. S. E. Derkachov, D. N. Karakhanyan, R. Kirschner *Yang-Baxter R operators and parameter permutations.* — Nucl.Phys. **B785**, 263–285 (2007).

13. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*. — Quantum symmetries/Symmetries Quantiques, Proc. Les-Houches summer school, LXIV, Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North Holland, 149–211, 1998.
14. V. Pasquier, *Etiology of IRF Models*. — Comm. Math. Phys. **118**, 355–364 (1988).
15. A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra  $U_q(sl(2))$ ,  $q$ -orthogonal polynomials and invariants of links*. — In: Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), pages 285–339. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
16. Д. А. Варшолович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*. Ленинград, Наука, 1975.

Valinevich P. A., Derkachov S. E., Isaev A. P., Komisarchuk A. V. Orthogonal polynomials,  $6j$ -symbols and statistical weights of SOS models.

A simple diagrammatic method which allows to connect Boltzmann weights of the vertex models of statistical mechanics with those of SOS models is described. The analogy with the computation of the  $6j$ -symbols is pointed out. The construction of statistical weights heavily relies on the realization of the  $SU(2)$  group on the space of functions of one variable. The closed-form answer for some particular cases is obtained. It is shown, that in the general case the statistical weight of SOS model, as well as  $6j$ -symbol, can be presented as the scalar product of two polynomials of certain type.

С.-Петербургское  
отделение математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
*E-mail*: valinevich@pdmi.ras.ru  
*E-mail*: derkach@pdmi.ras.ru  
*E-mail*: al.komisarchuk@gmail.com

Поступило 6 декабря 2017 г.

Лаборатория теоретической физики,  
Объединенный институт ядерных исследований,  
Дубна  
*E-mail*: isaevap@theor.jinr.ru