

П. А. Валиневич, С. Э. Деркачев, А. П. Исаев

**SOS-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ  
 $SL(2, \mathbb{C})$ -ИНВАРИАНТНОГО  $R$ -ОПЕРАТОРА И  
ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА**

§1. УНИТАРНАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ  $SL(2, \mathbb{C})$

Напомним основные формулы, относящиеся к унитарной серии представлений группы  $SL(2, \mathbb{C})$  [1–3]. Представления реализуются в пространстве однозначных функций  $\Phi(z, \bar{z})$  на комплексной плоскости. Для каждой матрицы из группы  $SL(2, \mathbb{C})$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

линейный оператор  $T^{(s, \bar{s})}$ , действующий в пространстве функций, определяется при помощи следующей формулы [1–3]

$$\left[ T^{(s, \bar{s})}(g) \Phi \right] (z, \bar{z}) = (d - bz)^{2s} (\bar{d} - \bar{b}\bar{z})^{2\bar{s}} \Phi \left( \frac{-c + az}{d - bz}, \frac{-\bar{c} + \bar{a}\bar{z}}{\bar{d} - \bar{b}\bar{z}} \right). \quad (1.1)$$

Параметры  $(s, \bar{s})$ , нумерующие представление, в случае общего положения не являются комплексно-сопряженными друг другу, т.к. требование однозначности получившейся функции приводит только к ограничению на разности, которые должны быть целыми числами:  $2s - 2\bar{s} \in \mathbb{Z}$ . Удобно использовать компактное обозначение

$$[z]^a \equiv z^a \bar{z}^{\bar{a}} = |z|^{2a} \bar{z}^{\bar{a}-a} = |z|^{2\bar{a}} z^{a-\bar{a}}, \quad (1.2)$$

где  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  комплексно-сопряжены друг другу и  $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$ . При специальных значениях параметров представления ( $n$  целое,  $\sigma$  – вещественное)

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{n}{4} + \frac{i\sigma}{2}; \quad \bar{s} = -\frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \frac{i\sigma}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

---

*Ключевые слова:* уравнение Янга–Бакстера,  $R$ -матрица,  $6j$ -символы.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00598).

операторы представления унитарны относительно стандартного скалярного произведения

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int d^2 z \overline{\Phi_1(z, \bar{z})} \Phi_2(z, \bar{z}); \quad \langle T(g) \Phi_1 | T(g) \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle \quad (1.4)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $d^2 z = dx dy$  и интегрирование ведётся по всей плоскости.

Представления, отвечающие параметрам  $s, \bar{s}$  и  $-1-s, -1-\bar{s}$  эквивалентны [2]. Определяющее соотношение для оператора  $M$ , сплетающего эквивалентные представления  $T^{(s, \bar{s})}$  и  $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$ , имеет вид

$$M(s, \bar{s}) T^{(s, \bar{s})}(g) = T^{(-1-s, -1-\bar{s})}(g) M(s, \bar{s}), \quad (1.5)$$

а решение дается следующей формулой [1, 2]

$$[M(s, \bar{s}) \Phi](z, \bar{z}) = \frac{i^{-|2s-2\bar{s}|}}{\pi} \frac{\Gamma(s + \bar{s} + |s - \bar{s}| + 2)}{\Gamma(-s - \bar{s} + |s - \bar{s}| - 1)} \int d^2 x \frac{\Phi(x, \bar{x})}{[z - x]^{2s+2}}, \quad (1.6)$$

где  $\Gamma(x)$  – стандартная гамма-функция Эйлера. Сплетающий оператор хорошо определен для параметров  $s$  и  $\bar{s}$  в общем положении, но, несмотря на появление расходимостей при дискретных значениях  $2s = N$ ,  $2\bar{s} = M$ ,  $N, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , его можно доопределить в этих точках благодаря специально подобранной нормировке.

В дальнейшем, при решении уравнения Янга–Бакстера, одним из основных объектов будет матрица  $L(u)$ , которая с точностью до тривиального слагаемого совпадает с матрицей  $E$ , построенной из генераторов алгебры Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$L(u) = u + E = \begin{pmatrix} u + E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & u + E_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  состоит из комплексных бесследовых матриц второго порядка. В качестве базиса в этом пространстве возьмём матрицы  $\mathcal{E}_{ik} = e_{ik} - \frac{\delta_{ik}}{2} \mathbb{1}$ , где  $e_{ik}$  – стандартные матричные единицы  $e_{ik}$ :  $(e_{ik})_{nm} = \delta_{in} \delta_{km}$ . Генераторы  $E_{ik}$  и  $\bar{E}_{ik}$  алгебры Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  в представлении  $T^{(s, \bar{s})}$  определяются соотношением

$$\left[ T^{(s, \bar{s})}(1 + \varepsilon \mathcal{E}_{ik}) \Phi \right](z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) + (\varepsilon E_{ik} + \bar{\varepsilon} \bar{E}_{ik}) \Phi(z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2). \quad (1.8)$$

Из определения (1.1) получаем явные формулы для генераторов, которые в рассматриваемом представлении реализуются дифференциальными операторами первого порядка

$$\begin{aligned} E_{11} &= z\partial_z - s; & E_{12} &= z^2\partial_z - 2sz; & E_{21} &= -\partial_z; & E_{22} &= -z\partial_z + s \\ \bar{E}_{11} &= \bar{z}\partial_{\bar{z}} - \bar{s}; & \bar{E}_{12} &= \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} - 2\bar{s}\bar{z}; & \bar{E}_{21} &= -\partial_{\bar{z}}; & \bar{E}_{22} &= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{s} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Объединяя генераторы  $E_{ik}$  в матрицу  $E^{(s)}$  получаем (для матрицы  $\bar{E}^{(\bar{s})}$  из генераторов  $\bar{E}_{ik}$  всё аналогично)

$$\begin{aligned} E^{(s)} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\partial - s & -\partial \\ z^2\partial - 2sz & -z\partial + s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s-1 & -\partial \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Начиная с этого момента будем использовать более компактную форму записи, опуская анти-голоморфную часть уравнений, а также зависимость от переменных  $\bar{z}$ ,  $\bar{u}$  в том случае, если смысл формулы очевиден и это упрощение не приведёт к недоразумениям.

**1.1. Разложение тензорного произведения двух представлений.** Представление  $T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)}$  приводимо и раскладывается в прямой интеграл неприводимых

$$T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)} = \frac{1}{2} \int Ds \rho(s) T^{(s, \bar{s})}$$

где

$$\begin{aligned} \rho(s) &= -\frac{(2s+1)(2\bar{s}+1)}{8\pi^4}; & 2s+1 &= +\frac{n}{2} + i\sigma; \\ 2\bar{s}+1 &= -\frac{n}{2} + i\sigma; & n \in \mathbb{Z}, & \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Отметим, что  $\rho(s)$  положительна, т.к.  $(2s+1)(2\bar{s}+1) = -(n^2/4 + \sigma^2)$ .  $\int Ds = \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\sigma$  означает суммирование по  $n$  и интегрирование по  $\sigma$ . При этом суммирование по  $n$  идет либо только по четным, либо только по нечетным числам в зависимости от того, является ли сумма  $n_1 + n_2$ , соответственно, четной или нечетной. В силу эквивалентности представления  $T^{(s, \bar{s})}$  и  $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$  дают один и тот же вклад, так что суммирование по всем значениям допустимых параметров приводит к двойному счету. Решение задачи о разложении на неприводимые

представления было получено М.А.Наймарком [5]. Проектор

$$\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \xrightarrow{P(s_1, s_2 | s)} \Gamma^{(s, \bar{s})},$$

реализуется в виде интегрального оператора

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2) &\xrightarrow{P(s_1, s_2 | s)} [P(s_1, s_2 | s) \Phi](z) \\ &= \int d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} \Phi(z_1, z_2), \end{aligned}$$

где ядро имеет следующий вид

$$W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} = [z_2 - z_1]^{-2-s_1-s_2-s} [z - z_1]^{s_2+s-s_1} [z_2 - z]^{s_1+s-s_2} \quad (1.12)$$

и с точностью до общей нормировки однозначно фиксируется требованием ковариантности

$$\left( E_{z_1}^{(-1-s_1)} + E_{z_2}^{(-1-s_2)} + E_z^{(s)} \right) W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

В формуле (1.12) показатели степеней  $\lambda$  должны удовлетворять ограничениям  $\lambda - \bar{\lambda} \in \mathbb{Z}$ . Эти ограничения будут выполнены только при условии, что сумма  $n_1 + n_2 + n$  – четное число, где целые числа  $n_1, n_2, n$  входят в определение спинов  $s_1, s_2, s$  (1.3).

Мы будем использовать диаграммную технику и изображать ядра интегральных операторов при помощи диаграмм Фейнмана. Пропагатор определяется формулой

$$\frac{1}{[z - w]^\alpha} \equiv \frac{1}{(z - w)^\alpha (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{\alpha}}} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})^{\alpha - \bar{\alpha}}}{|z - w|^{2\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha - \bar{\alpha}}}{[w - z]^\alpha}, \quad (1.14)$$

где  $\alpha - \bar{\alpha}$  – целое число и изображается стрелкой с индексом  $\alpha$ , идущей из точки  $w$  к точке  $z$ . Диаграммное представление ядра  $W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix}$  в виде конформного треугольника показано на Рис.1. Название ”конформный треугольник” заимствовано из конформной теории поля и связано с тем, что определяющие соотношения (1.13) совпадают с системой тождеств Уорда для трехточечной функции Грина в двумерной конформной теории поля [6].

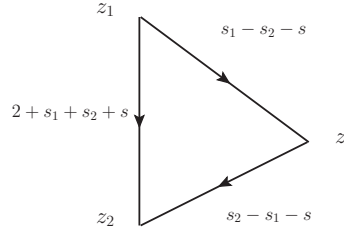


Рис. 1. Диаграммное представление для функции  $W \begin{pmatrix} s_1 \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix}$ .

Для представлений унитарной серии комплексное сопряжение эквивалентно замене  $s \rightarrow -1 - s$ , так что:

$$\overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} \equiv \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} -1 - s_1, -1 - s_2, -1 - s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Ядро дуального проектора  $\mathbb{T}^{(s, \bar{s})} \xrightarrow{P(s|s_1, s_2)} \mathbb{T}^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \mathbb{T}^{(s_2, \bar{s}_2)}$ , определяется функцией (1.15)

$$\Phi(z) \xrightarrow{P(s|s_1, s_2)} [P(s|s_1, s_2) \Phi](z_1, z_2) = \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} \Phi(z),$$

что легко выводится из соотношения ортогональности. Соотношение ортогональности для конформных треугольников имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & \int d^2 z_1 d^2 z_2 \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_2, s' \\ z_1, z_2, z' \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} \\ &= \rho^{-1}(s) \delta(s - s') \delta^2(z - z') + B(s_1, s_2, s) \delta(s + s' + 1) [z - z']^{2s}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\rho(s) = -\frac{(2s+1)(2\bar{s}+1)}{8\pi^4}, \quad B(s_1, s_2, s) = 2\pi^3 \frac{a(s_2 - s_1 - s, 2s+2)}{a(1+s_2 - s_1 + s)}. \quad (1.17)$$

Отметим, что  $\rho(s)$  положительна, т.к.  $(2s+1)(2\bar{s}+1) = -(n^2/4 + \sigma^2)$ . Дельта функция  $\delta(s - s')$  определяется естественным образом

$$\delta(s - s') = \delta_n n' \delta(\sigma - \sigma'), \quad 2s+1 = \frac{n}{2} + i\sigma, \quad 2s'+1 = \frac{n'}{2} + i\sigma'.$$

Функция  $a(\alpha)$  определена в (4.3) и  $a(\alpha, \beta, \dots) := a(\alpha)a(\beta)\dots$ . Появление второго слагаемого в (1.16) является прямым следствием того факта, что представления  $T^{(s, \bar{s})}$  and  $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$  эквивалентны. Ядро сплетающего оператора имеет вид  $[z - z']^{-2-2s}$  и одним из проявлений эквивалентности представлений является тождество

$$\int d^2 z' \frac{1}{[z - z']^{2+2s}} W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z' \end{pmatrix} = A(s_1, s_2, s) W \begin{pmatrix} s_1, s_2, -1-s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$A(s_1, s_2, s) = \pi \frac{a(s_1 - s_2 - s, 2 + 2s)}{a(1 + s_1 + s - s_2)},$$

которое легко доказывается при помощи соотношения звезда-треугольник (4.5). Применение соотношения (1.18) к (1.16) демонстрирует необходимость второго слагаемого с  $s \rightarrow -1 - s$  и, кроме того, приводит к соотношению между функциями  $\rho(s)$ ,  $A(s_1, s_2, s)$  и  $B(s_1, s_2, s)$ .

Соотношение полноты для конформных треугольников было получено в [5] и его форма зависит от четности дискретных параметров  $n_1, n_2$ , определяющих спины  $s_1, s_2$

$$\int Ds \frac{\rho(s)}{2} \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_3, z_4, z \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} = \delta^2(z_1 - z_3) \delta^2(z_2 - z_4), \quad (1.19)$$

где  $\int Ds = \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\sigma$  означает суммирование по  $n$  и интегрирование по  $\sigma$ . Суммирование по  $n$  идет либо только по четным, либо только по нечетным числам в зависимости от того, является ли сумма  $n_1 + n_2$ , соответственно, четной или нечетной.

## §2. УРАВНЕНИЕ ЯНГА–БАКСТЕРА

Напомним основные формулы, связанные с конструкцией  $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера [7–9, 11, 17, 18]

$$\mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) \mathbb{R}_{13}(u, \bar{u}) \mathbb{R}_{23}(v, \bar{v}) = \mathbb{R}_{23}(v, \bar{v}) \mathbb{R}_{13}(u, \bar{u}) \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}). \quad (2.1)$$

Линейный оператор  $\mathbb{R}(u, \bar{u})$  зависит от двух спектральных параметров  $u$  и  $\bar{u}$ , которые а priori никак не связаны друг с другом. Далее будет показано, что разность  $u - \bar{u}$  должна быть целым числом.  $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантность оператора  $\mathbb{R}(u, \bar{u})$  означает, что он действует в пространстве тензорного произведения двух представлений группы

$SL(2, \mathbb{C})$  и коммутирует с операторами представления

$$T(g) \otimes T(g) \mathbb{R}(u, \bar{u}) = \mathbb{R}(u, \bar{u}) T(g) \otimes T(g).$$

В уравнении Янга–Бакстера все операторы определены в общем тензорном произведении трёх пространств  $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$ . Индексы  $ik$  показывают, что оператор  $\mathbb{R}_{ik}$  действует нетривиально в тензорном произведении  $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_k$ , а на оставшуюся часть тензорного произведения  $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$  продолжается как единичный оператор.

Решение уравнения Янга–Бакстера обычно строится в два этапа. Сначала находится решение более простого определяющего RLL-соотношения [10], а потом доказывается, что построенный оператор  $\mathbb{R}(u, \bar{u})$  удовлетворяет общему уравнению (2.1).

Выберем в уравнении Янга–Бакстера (2.1) в качестве пространства  $\mathbb{V}_3$  пространство двумерного фундаментального представления группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Операторы  $\mathbb{R}_{13}(u, \bar{u})$  и  $\mathbb{R}_{23}(v, \bar{v})$  превращаются в этом случае в стандартные квантовые L-операторы – матрицы  $L_1(u)$  и  $L_2(v)$  [7–10], имеющие общий вид (1.7) и зависящие от генераторов  $E_{ik}$  представлений в пространствах  $\mathbb{V}_1$  и  $\mathbb{V}_2$ , соответственно. Таким образом получается простое определяющее RLL-соотношение для оператора  $\mathbb{R}_{12}$  [10]

$$\mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}). \quad (2.2)$$

Одного этого уравнения недостаточно, т.к. матрица  $L(u)$  зависит только от голоморфной переменной и спектрального параметра  $u$ . Недостающее уравнение выводится аналогичным образом, только в качестве пространства  $\mathbb{V}_3$  нужно взять пространство второго двумерного представления группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Оператор  $\mathbb{R}_{13}(u, \bar{u})$  превращается в этом случае в матрицу  $\bar{L}_1(\bar{u})$ , а оператор  $\mathbb{R}_{23}(v, \bar{v})$  в матрицу  $\bar{L}_2(\bar{v})$ , так что получаем

$$\mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) \bar{L}_1(\bar{u}) \bar{L}_2(\bar{v}) = \bar{L}_2(\bar{v}) \bar{L}_1(\bar{u}) \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}), \quad (2.3)$$

Будем решать получившуюся систему двух RLL-уравнений, взяв в качестве пространств  $\mathbb{V}_1$  и  $\mathbb{V}_2$  пространства представлений непрерывных серий. Пусть  $\mathbb{V}_1$  пространство функций от переменных  $z_1$  и  $\bar{z}_1$ , на котором действуют операторы представления  $T^{(s_1, \bar{s}_1)}$ , а  $\mathbb{V}_2$  пространство функций от переменных  $z_2$  и  $\bar{z}_2$ , на котором действуют операторы представления  $T^{(s_2, \bar{s}_2)}$ . Если для матриц  $E$ , входящих в  $L_1(u)$  и

$L_2(v)$ , использовать формулу (1.10), получим следующее представление:

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - s_1 - 1 & -\partial_1 \\ 0 & u + s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_1 & 1 \end{pmatrix}, \\ L_2(v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - s_2 - 1 & -\partial_2 \\ 0 & v + s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Матрица  $L_1(u)$  зависит от спектрального параметра  $u$  и параметра  $s_1$  представления  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)}$ . Формула (2.4) показывает, что все параметры естественным образом комбинируются в набор чисел  $(u_1, u_2) = (u - s_1 - 1, u + s_1)$ , которые стоят на диагонали в средней матрице, так что  $L_1(u) = L_1(u_1, u_2)$ . Точно так же  $L_2(v) = L_2(v_1, v_2)$ , где  $(v_1, v_2) = (v - s_2 - 1, v + s_2)$ . Таким образом, определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) \\ = L_2(v_1, v_2) L_1(u_1, u_2) \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}) \bar{L}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \bar{L}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \\ = \bar{L}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \bar{L}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \mathbb{R}_{12}(u - v, \bar{u} - \bar{v}). \end{aligned}$$

Явная формула для ядра интегрального оператора  $\mathbb{R}_{12}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{12}(u - v) \Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ = \int d^2 w_1 d^2 w_2 \mathbb{R}_{u-v}(z_1, z_2 | w_1, w_2) \Phi(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

имеет следующий вид [17, 18]

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{u-v}(z_1, z_2 | w_1, w_2) \\ = [z_1 - z_2]^{u_2 - v_1} [w_2 - z_1]^{v_1 - u_1 - 1} [z_2 - w_1]^{v_2 - u_2 - 1} [w_1 - w_2]^{u_1 - v_2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

или, эквивалентно ( $z_{12} = z_1 - z_2, w_{12} = w_1 - w_2$ ),

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_u(z_1, z_2 | w_1, w_2) \\ = [z_{12}]^{u + s_1 + s_2 + 1} [w_2 - z_1]^{s_1 - s_2 - u - 1} [z_2 - w_1]^{s_2 - s_1 - u - 1} [w_{12}]^{u - s_1 - s_2 - 1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

В формуле для ядра оператора  $\mathbb{R}_u(z_1, z_2 | w_1, w_2)$  использованы явным образом спектральные параметры  $u$  и  $\bar{u}$ , параметры  $s_1, \bar{s}_1$  представления  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)}$  в пространстве функций от переменных  $z_1, \bar{z}_1$  и параметры



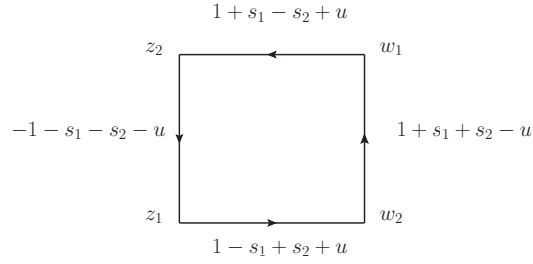


Рис. 2. Графическое изображение ядра оператора  $\mathbb{R}_{12}(u)$  (2.8).

$s_2, \bar{s}_2$  представления  $T^{(s_2, \bar{s}_2)}$  в пространстве функций от переменных  $z_2, \bar{z}_2$ . В этой подробной записи очевидно, что ядро является однозначной функцией комплексных переменных  $z_1, z_2, w_1, w_2$  только при условии  $u - \bar{u} \in \mathbb{Z}$ . Ядро интегрального оператора  $\mathbb{R}_u(z_1, z_2 | w_1, w_2)$  графически изображается четырёхугольником, как показано на Рис. 2.

Мы нашли оператор  $\mathbb{R}_{12}(u)$  – решение RLL-соотношений. Осталось доказать, что построенный оператор  $\mathbb{R}_{12}(u)$  является  $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантным оператором и удовлетворяет общему соотношению Янга–Бакстера.

- $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантность

Доказательство основано на двух фактах. Во-первых, оператор  $\mathbb{R}_{12}(u - v)$  (2.8) является решением  $RLL$ -соотношений и, во-вторых, зависит только от разности спектральных параметров  $u - v$ , т.е. инвариантен при сдвигах  $u \rightarrow u + \lambda$ ;  $v \rightarrow v + \lambda$ . Сделав в соотношении

$$\mathbb{R}_{12}(u - v) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) = L_2(v_1, v_2) L_1(u_1, u_2) \mathbb{R}_{12}(u - v)$$

сдвиг  $u \rightarrow u + \lambda$ ;  $v \rightarrow v + \lambda$  и отобразив вклады, линейные по  $\lambda$ , получим

$$\mathbb{R}_{12}(u - v) (L_1(u_1, u_2) + L_2(v_1, v_2)) = (L_2(v_1, v_2) + L_1(u_1, u_2)) \mathbb{R}_{12}(u - v). \quad (2.9)$$

Напомним, что

$$L_1(u_1, u_2) = u + E_1; \quad L_2(v_1, v_2) = v + E_2,$$

поэтому уравнение (2.9) очевидным образом эквивалентно уравнению

$$\mathbb{R}_{12}(u) (E_1 + E_2) = (E_1 + E_2) \mathbb{R}_{12}(u). \quad (2.10)$$

В матрицу  $E_1$  входят генераторы представления  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)}$ , а в матрицу  $E_2$  – генераторы представления  $\Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)}$ , так что оператор  $\mathbb{R}_{12}(u)$  коммутирует с генераторами алгебры Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , действующими в тензорном произведении представлений  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)}$ . В итоге получаем

$$\mathbb{R}_{12}(u) \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} = \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \mathbb{R}_{12}(u). \quad (2.11)$$

• Соотношение Янга–Бакстера

Мы приведём наглядное графическое доказательство [17, 18] соотношения

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{12}(u-v).$$

для интегрального оператора  $\mathbb{R}$  с ядром (2.8). Ядро оператора, стоящего в левой части уравнения Янга–Бакстера и являющегося произведением трех  $\mathbb{R}$ -операторов, строится из ядер сомножителей

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{23}(v) \right] (z_1, z_2, z_3 | w_1, w_2, w_3) \\ &= \int d^2 y_1 d^2 y_2 d^2 y_3 \mathbb{R}_{u-v}(z_1, z_2 | y_1, y_2) \mathbb{R}_u(y_1, z_3 | w_1, y_3) \mathbb{R}_v(y_2, y_3 | w_2, w_3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Изобразив ядро каждого  $\mathbb{R}$ -оператора соответствующей картинкой, где для простоты использованы обозначения  $z_1, z_2, z_3 \rightarrow 1', 2', 3'$  и  $w_1, w_2, w_3 \rightarrow 1, 2, 3$ , получим графическое изображение ядра произведения в левом верхнем углу Рис. 3. Ядро оператора в правой части уравнения Янга–Бакстера строится аналогичным образом из ядер сомножителей

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{R}_{23}(v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{12}(u-v) \right] (z_1, z_2, z_3 | w_1, w_2, w_3) \\ &= \int d^2 y_1 d^2 y_2 d^2 y_3 \mathbb{R}_v(z_2, z_3 | y_2, y_3) \mathbb{R}_u(z_1, y_3 | y_1, w_3) \mathbb{R}_{u-v}(y_1, y_2 | w_1, w_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

и получающаяся картинка нарисована в левом нижнем углу Рис. 3. Удобство рисунков состоит в том, что каждому преобразованию интегралов соответствует преобразование соответствующего рисунка, так что громоздкие формулы с интегралами заменяются наглядными картинками. В рассматриваемом случае преобразования основаны

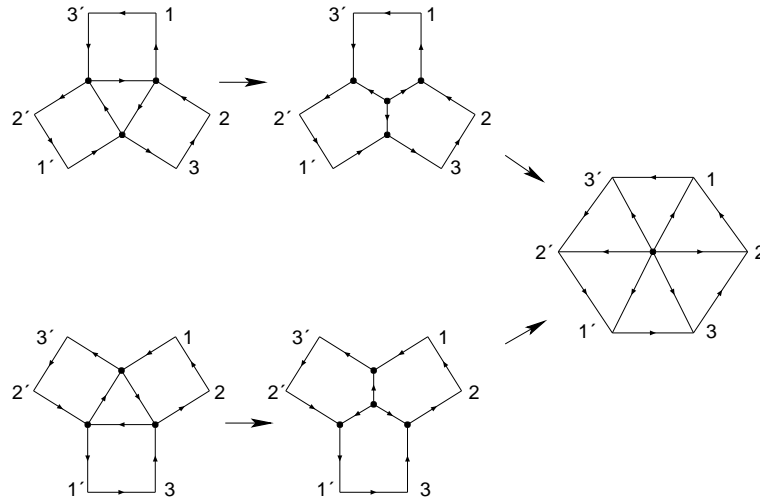


Рис. 3. Графическое доказательство соотношения Янга–Бакстера при помощи соотношения звезда-треугольник.

на тождестве звезда-треугольник и показаны на Рис. 3. Каждый центральный треугольник является уникальным (см. Приложение) и преобразуется в звезду. После этого три вершины оказываются уникальными и преобразуются в треугольники. В результате получается один и тот же шестиугольник как для верхней, так и для нижней картинки.

### §3. ОПЕРАТОР $\mathbb{R}_{12}(u)$ В SOS-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Точно решаемые вершинные модели статистической физики [7, 9, 11, 12] связаны с уравнением Янга–Бакстера в форме (2.1). Однако существует другой класс точно решаемых моделей – модели SOS типа (Solid-on-Solid) [11–15], в которых используется несколько другая форма уравнения Янга–Бакстера.

Преобразование, которое позволяет связать эти две формы уравнений Янга–Бакстера, описано в работе [16]. В данном разделе мы изложим идею [16] и проведем необходимые вычисления, используя метод

диаграмм Фейнмана. Близкая по духу работа [22] посвящена вычислению  $6j$ -символов для группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Другим методом и раньше  $6j$ -символы для группы  $SL(2, \mathbb{C})$  были вычислены Исмагиловым в [20, 21].

Рассмотрим тензорное произведение трех представлений  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)}$  и разложим его на неприводимые. Это разложение можно построить несколькими способами. Сначала выберем следующий способ разложения

$$\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)} \xrightarrow{P(s_2, s_3 | s)} \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s, \bar{s})} \xrightarrow{P(s_1, s | s_0)} \Gamma^{(s_0, \bar{s}_0)},$$

что дает проектор

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3) &\xrightarrow{P(s_1, s | s_0)P(s_2, s_3 | s)} \Phi(z_0) \equiv [P(s_1, s | s_0)P(s_2, s_3 | s) \Phi](z_0) \\ &= \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \int d^2 z W \begin{pmatrix} s_2, s_3, s \\ z_2, z_3, z \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} s_1, s, s_0 \\ z_1, z, z_0 \end{pmatrix} \Phi(z_1, z_2, z_3), \end{aligned}$$

переводящий функцию трех переменных  $\Phi(z_1, z_2, z_3)$  в функцию одной переменной  $\Phi(z_0)$ . Построим дуальный проектор, действующий в обратном направлении, т.е. переводящий функцию одной переменной  $\Phi(z_0)$  в функцию трех переменных  $\Phi(z_1, z_2, z_3)$

$$\Gamma^{(s_0, \bar{s}_0)} \xrightarrow{P(s_0 | s_1, s)} \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s, \bar{s})} \xrightarrow{P(s | s_2, s_3)} \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)},$$

$$\begin{aligned} \Phi(z_0) &\xrightarrow{P(s | s_2, s_3)P(s_0 | s_1, s)} \Phi(z_1, z_2, z_3) \\ &\equiv [P(s | s_2, s_3)P(s_0 | s_1, s) \Phi](z_1, z_2, z_3) \\ &= \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_2, s_3, s \\ z_2, z_3, z \end{pmatrix} \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s, s_0 \\ z_1, z, z_0 \end{pmatrix} \Phi(z_0), \end{aligned}$$

Разложим теперь тензорное произведение на неприводимые другим способом

$$\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)} \xrightarrow{P(s_1, s_3 | t)} \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(t, \bar{t})} \xrightarrow{P(s_2, t | s_0)} \Gamma^{(s_0, \bar{s}_0)},$$

что дает проектор

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3) &\xrightarrow{P(s_2, t | s_0)P(s_1, s_3 | t)} \Phi(z_0) \equiv [P(s_2, t | s_0)P(s_1, s_3 | t) \Phi](z_0) \\ &= \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \int d^2 z W \begin{pmatrix} s_1, s_3, t \\ z_1, z_3, z \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} s_2, t, s_0 \\ z_2, z, z_0 \end{pmatrix} \Phi(z_1, z_2, z_3), \end{aligned}$$

переводящий функцию трех переменных  $\Phi(z_1, z_2, z_3)$  в функцию одной переменной  $\Phi(z_0)$  и дуальный проектор, действующий в обратном направлении

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(s_0, \bar{s}_0) &\xrightarrow{P(s_0|s_2, t)} \mathbb{T}(s_2, \bar{s}_2) \otimes \mathbb{T}(t, \bar{t}) \xrightarrow{P(t|s_1, s_3)} \mathbb{T}(s_1, \bar{s}_1) \otimes \mathbb{T}(s_2, \bar{s}_2) \otimes \mathbb{T}(s_3, \bar{s}_3), \\ \Phi(z_0) &\xrightarrow{P(t|s_1, s_3)P(s_0|s_2, t)} \Phi(z_1, z_2, z_3) \\ &\equiv [P(t|s_1, s_3)P(s_0|s_2, t) \Phi](z_1, z_2, z_3) \\ &= \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_3, t \\ z_1, z_3, z \end{pmatrix} \overline{W} \begin{pmatrix} s_2, t, s_0 \\ z_2, z, z_0 \end{pmatrix} \Phi(z_0), \end{aligned}$$

Подействуем теперь оператором  $\mathbb{R}_{12}(u)$  на дуальный проектор, связанный с первым разложением и перепишем полученное выражение при помощи проекторов второго разложения. Интегральный оператор, связывающий действие оператора  $\mathbb{R}_{12}(u)$  в первом разложении со вторым разложением и будет R-оператором в SOS-представлении [16]

$$\mathbb{R}_{12}(u)P(s|s_2, s_3)P(s_0|s_1, s) = \int Dt \frac{\rho(t)}{2} \mathbb{R}_u \begin{pmatrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{pmatrix} P(t|s_1, s_3)P(s_0|s_2, t). \quad (3.1)$$

В явном виде уравнение для определения ядра R-оператора в SOS-представлении выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &\int d^2 w_1 d^2 w_2 \mathbb{R}_u(z_1, z_2|w_1, w_2) \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_2, s_3, s \\ w_2, z_3, z \end{pmatrix} \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s, s_0 \\ w_1, z, z_0 \end{pmatrix} \\ &= \int Dt \frac{\rho(t)}{2} \mathbb{R}_u \begin{pmatrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{pmatrix} \int d^2 z \overline{W} \begin{pmatrix} s_1, s_3, t \\ z_1, z_3, z \end{pmatrix} \overline{W} \begin{pmatrix} s_2, t, s_0 \\ z_2, z, z_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\mathbb{R}_u(z_1, z_2|w_1, w_2)$  – ядро интегрального оператора  $\mathbb{R}_{12}(u)$  в исходном представлении (2.6), а  $\mathbb{R}_u \begin{pmatrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{pmatrix}$  – ядро R-оператора в SOS-представлении в подробных обозначениях с указанием явной зависимости от всех параметров. То же самое определяющее соотношение изображено при помощи диаграмм Фейнмана на Рис. 4.

Соотношение Янга–Бакстера (2.1)

$$\mathbb{R}_{12}(u)\mathbb{R}_{13}(u+v)\mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v)\mathbb{R}_{13}(u+v)\mathbb{R}_{12}(u). \quad (3.3)$$

приводит к аналогичному соотношению в SOS-представлении. Для того, чтобы вывести это уравнение, добавим еще одно представление

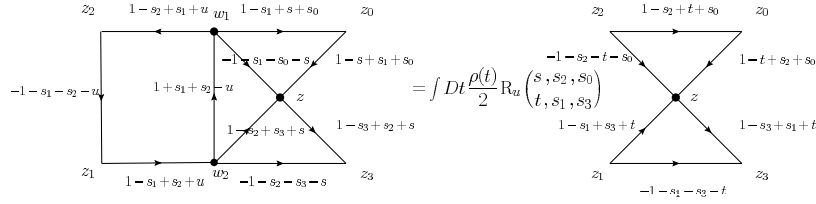


Рис. 4. Диаграммное представление соотношения (3.2).

$\Gamma^{(s_4, \bar{s}_4)}$  и рассмотрим тензорное произведение четырех представлений  $\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)} \otimes \Gamma^{(s_4, \bar{s}_4)}$ . В тензорном произведении первых трех представлений действуют операторы  $\mathbb{R}_{12}(u)$ ,  $\mathbb{R}_{13}(u+v)$  и  $\mathbb{R}_{23}(v)$ , а четвертое представление является внешним. Разложение тензорного произведения на неприводимые

$$\Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(s_3, \bar{s}_3)} \otimes \Gamma^{(s_4, \bar{s}_4)} \xrightarrow{P(s_3, s_4|B)} \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(s_2, \bar{s}_2)} \otimes \Gamma^{(B, \bar{B})} \xrightarrow{P(s_2, B|A)} \Gamma^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes \Gamma^{(A, \bar{A})} \xrightarrow{P(s_1, A|s_0)} \Gamma^{(s_0, \bar{s}_0)},$$

дает проектор, переводящий функции четырех переменных в функции одной переменной

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4) \xrightarrow{P(s_1, A|s_0)P(s_2, B|A)P(s_3, s_4|B)} \Phi(z_0)$$

Для вывода SOS-уравнения Янга–Бакстера нужен дуальный проектор

$$\Phi(z_0) \xrightarrow{P(B|s_3, s_4)P(A|s_2, B)P(s_0|s_1, A)} \Phi(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Рассмотрим произведение операторов в правой части уравнения Янга–Бакстера (3.3) и подействуем этим оператором на дуальный проектор.

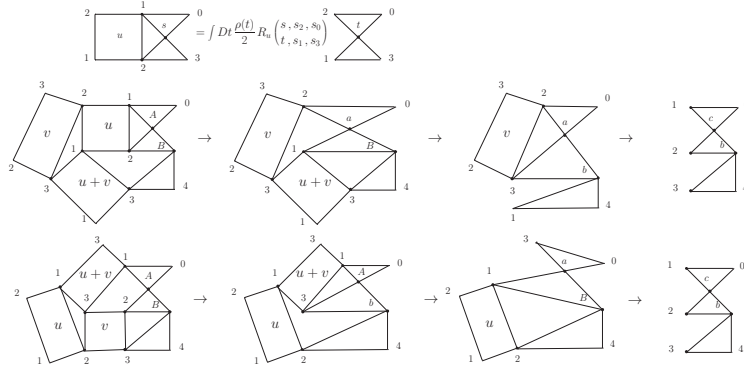


Рис. 5. Графическое доказательство SOS соотношения Янга–Бакстера (3.4).

Используя определение (3.1), преобразуем получившееся выражение

$$\begin{aligned}
& \mathbb{R}_{23}(v)\mathbb{R}_{13}(u+v)\mathbb{R}_{12}(u)\underline{P(B|s_3, s_4)P(A|s_2, B)P(s_0|s_1, A)} \\
&= \int Da \frac{\rho(a)}{2} \mathbb{R}_u \left( \begin{matrix} A, s_2, s_0 \\ a, s_1, B \end{matrix} \right) \mathbb{R}_{23}(v) \\
&\quad \times \underline{\mathbb{R}_{13}(u+v)P(B|s_3, s_4)P(a|s_1, B)P(s_0|s_2, a)} \\
&= \int Da \frac{\rho(a)}{2} \mathbb{R}_u \left( \begin{matrix} A, s_2, s_0 \\ a, s_1, B \end{matrix} \right) \int Db \frac{\rho(b)}{2} \mathbb{R}_{u+v} \left( \begin{matrix} B, s_3, a \\ b, s_1, s_4 \end{matrix} \right) \\
&\quad \times \underline{\mathbb{R}_{23}(v)P(b|s_1, s_4)P(a|s_3, b)P(s_0|s_2, a)} \\
&= \int Da \frac{\rho(a)}{2} \mathbb{R}_u \left( \begin{matrix} A, s_2, s_0 \\ a, s_1, B \end{matrix} \right) \int Db \frac{\rho(b)}{2} \mathbb{R}_{u+v} \left( \begin{matrix} B, s_3, a \\ b, s_1, s_4 \end{matrix} \right) \\
&\quad \times \int Dc \frac{\rho(c)}{2} \mathbb{R}_v \left( \begin{matrix} a, s_3, s_0 \\ c, s_2, b \end{matrix} \right) P(b|s_1, s_4)P(c|s_2, b)P(s_0|s_3, c)
\end{aligned}$$

Вся эта цепочка преобразований изображена графически на Рис. 5 во второй строке. В первой строке приведено диаграммное представление соотношения (3.2) при помощи компактных обозначений, используемых на Рис. 5.

Точно такое же преобразование можно проделать, используя оператор в левой части уравнения Янга–Бакстера и соответствующая цепочка преобразований изображена на Рис. 5 в третьей строке. В

итоге получается разложение при помощи одного и того же проектора и приравнивая соответствующие коэффициенты в левой и правой частях равенства получаем SOS-соотношение Янга–Бакстера

$$\begin{aligned} & \int Dx \frac{\rho(x)}{2} R_u \left( \begin{matrix} A, s_2, s_0 \\ x, s_1, a \end{matrix} \right) R_{u+v} \left( \begin{matrix} B, s_3, x \\ c, s_1, s_4 \end{matrix} \right) R_v \left( \begin{matrix} x, s_3, s_0 \\ a, s_2, c \end{matrix} \right) \\ & = \int Dx \frac{\rho(x)}{2} R_v \left( \begin{matrix} B, s_3, A \\ x, s_2, s_4 \end{matrix} \right) R_{u+v} \left( \begin{matrix} A, s_3, s_0 \\ a, s_1, x \end{matrix} \right) R_u \left( \begin{matrix} x, s_2, a \\ c, s_1, s_4 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Перейдем к вычислению ядра R-оператора в SOS-представлении. Явное представление для ядра выводится из уравнения (3.2) при помощи соотношения ортогональности для конформных треугольников

$$\begin{aligned} R_u \left( \begin{matrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{matrix} \right) \overline{W} \left( \begin{matrix} s_1, s_3, t \\ z_1, z_3, z \end{matrix} \right) &= \int d^2 w_1 d^2 w_2 \mathbb{R}_u(z_1, z_2 | w_1, w_2) \\ \int d^2 z d^2 z_2 d^2 z_0 \overline{W} \left( \begin{matrix} s_2, s_3, s \\ w_2, z_3, z \end{matrix} \right) \overline{W} \left( \begin{matrix} s_1, s, s_0 \\ w_1, z, z_0 \end{matrix} \right) W \left( \begin{matrix} s_2, t, s_0 \\ z_2, z, z_0 \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Диаграммное представление этого основного соотношения дано на Рис. 6. Поясним смысл этого соотношения с точки зрения двумерной конформной теории поля. Диаграмма в левой части Рис. 6 зависит от трех внешних координат  $z_1, z_3, z$  и конформно-инвариантна. Общий вид трехточечной функции с точностью до общей нормировки однозначно фиксируется требованием конформной инвариантности, так что общий ответ для диаграммы в левой части Рис. 6 с точностью до общего нормировочного коэффициента дается конформным треугольником в правой части. Вычисляемая нами величина  $R_u \left( \begin{matrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{matrix} \right)$  и играет роль этого коэффициента.

Соотношение (3.5) можно упростить. Сравнивая асимптотики в пределе  $z_1 \rightarrow \infty$  и используя легко проверяемые формулы

$$\overline{W} \left( \begin{matrix} s_1, s_3, t \\ z_1, z_3, z \end{matrix} \right) \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} [z_1]^{-2s_1} (-1)^{[-2s_1]} [z - z_3]^{s_3 - s_1 - 1 - t}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{R}_u(z_1, z_2 | w_1, w_2) \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} [z_1]^{-2s_1} \frac{(-1)^{[s_2 - s_1 + u]}}{[z_2 - w_1]^{1+s_1-s_2+u} [w_1 - w_2]^{1+s_1+s_2-u}} \quad (3.7)$$



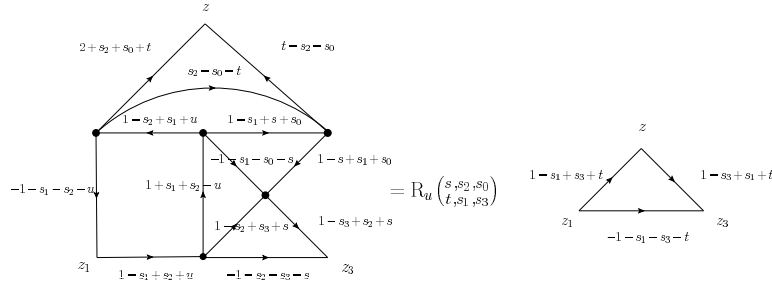


Рис. 6. Диаграммное представление соотношения (3.5).

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{[s_1+s_2+u]}}{[z-z_3]^{1+s_1+t-s_3}} R_u \left( \begin{matrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{matrix} \right) \\ &= \int d^2 w_1 d^2 w_2 \frac{1}{[z_2-w_1]^{1+s_1-s_2+u} [w_1-w_2]^{1+s_1+s_2-u}} \\ & \int d^2 z d^2 z_2 d^2 z_0 \overline{W} \left( \begin{matrix} s_2, s_3, s \\ w_2, z_3, z \end{matrix} \right) \overline{W} \left( \begin{matrix} s_1, s, s_0 \\ w_1, z, z_0 \end{matrix} \right) W \left( \begin{matrix} s_2, t, s_0 \\ z_2, z, z_0 \end{matrix} \right). \quad (3.8) \end{aligned}$$

Все упрощения можно проследить на диаграммах: в пределе  $z_1 \rightarrow \infty$  в диаграммах пропадают все линии, входящие или выходящие из точки  $z_1$ , так что задача вычисления  $R_u \left( \begin{matrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{matrix} \right)$  сводится к вычислению двухточечной диаграммы, изображенной слева на Рис. 7.

Эта диаграмма принадлежит к семейству диаграмм, порождаемых вакуумной диаграммой, изображенной на Рис. 7 справа. Вакуумная диаграмма получается из исходной добавлением так называемой “опорной” линии с индексом  $s_3 - s_1 - t$ , соединяющей точки  $z_3$  и  $z$ . Как показано в работе [19] (в рамках размерной регуляризации для D-мерных интегралов Фейнмана), роль “опорной” линии может играть любая другая линия вакуумной диаграммы и выбор “опорной” линии не влияет на значение вычисляемого коэффициента  $R_u \left( \begin{matrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{matrix} \right)$ . Это наблюдение позволяет проанализировать симметрии получающегося ответа и упростить задачу вычисления диаграммы, выбрав подходящим образом “опорную” линию. Если выбрать в качестве “опорной” линию с индексом  $1 + s_1 + s_0 - s$ , получим соотношение на Рис. 8.

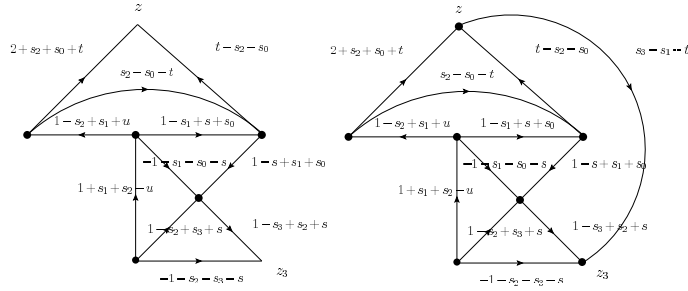


Рис. 7. Диаграмма, представляющая правую часть соотношения (3.8) и соответствующая вакуумная диаграмма.

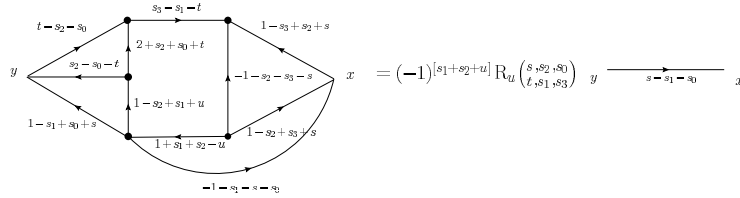


Рис. 8. Эквивалентное диаграммное представление для  $R_u \left( \begin{smallmatrix} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{smallmatrix} \right)$ .

Диаграмма на Рис. 8 проще, чем исходная, так как содержит одну вершину четвертого порядка вместо двух, что позволяет вывести для нее представление Меллина–Барнса в виде двукратного интеграла.

**3.1. Представление Меллина–Барнса.** Используем следующее интегральное представление для пропагатора

$$\frac{1}{[z - y]^\alpha} = \frac{1}{4\pi a(1 - \alpha)} \int D\lambda \frac{a(1 - \lambda, 1 + \lambda - \alpha)}{[z - z_0]^{\alpha - \lambda} [z_0 - y]^\lambda} \quad (3.9)$$

где  $\lambda = (n + i\nu)/2$ ,  $\bar{\lambda} = (-n + i\nu)/2$  и  $\int D\lambda := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu$  и, в силу трансляционной инвариантности, точка  $z_0$  может быть выбрана произвольным образом. Формула (3.9) является следствием хорошо

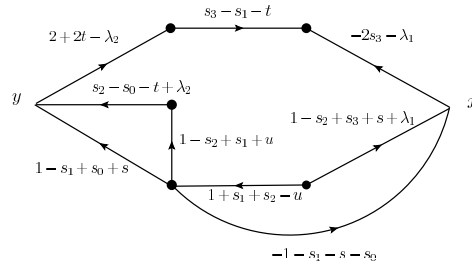


Рис. 9. Диаграмма в представлении Меллина–Барнса.

известного представления для дельта-функции

$$\int Ds\lambda \left[ \frac{x}{y} \right]^\lambda = (2\pi)^2 [x] \delta^2(x - y), \quad (3.10)$$

которое позволяет преобразовать пропагатор к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{[z - y]^\alpha} &= \int d^2x \frac{1}{[z - x]^\alpha} \delta^2(x - y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int D\lambda \int d^2x \frac{1}{[z - x]^\alpha [x]^{1-\lambda}} \frac{1}{[y]^\lambda} \\ &= \frac{\pi a(\alpha)}{(2\pi)^2} \int D\lambda \frac{a(1 - \lambda, 1 + \lambda - \alpha)}{[-z]^{\alpha-\lambda} [y]^\lambda}, \end{aligned}$$

используя правило интегрирования цепочек (4.4). Далее с помощью простых преобразований и сдвига  $z \rightarrow z - z_0, y \rightarrow y - z_0$  выводится формула (3.9). Используя представление Меллина–Барнса для вертикальных линий с индексами  $-1 - s_2 - s_3 - s$  и  $2 + s_2 + s_0 + t$  получим диаграмму на Рис. 9, которая вычисляется в замкнутом виде при помощи правила интегрирования цепочек (4.4).

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ w \longrightarrow z \\ \xleftarrow{\alpha} \end{array} = [z-w]^{-\alpha} = (-1)^{\alpha-\bar{\alpha}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha} \end{array}$$

Рис. 10. Пропагатор и правило обращения стрелки.

В итоге получаем следующее выражение для R-оператора в SOS-представлении

$$\begin{aligned} R_u \left( \begin{array}{c} s, s_2, s_0 \\ t, s_1, s_3 \end{array} \right) &= \frac{\pi^3}{16} \frac{a(s_3 - s_1 - t, 1 + s_1 + s_2 - u, 1 + s_1 - s_2 + u)}{a(2 + s_2 + s_3 + s, -1 - s_2 - s_0 - t)} \\ &\times (-1)^{[s_2 + s_3 + s]} \int D\lambda_1 D\lambda_2 \frac{a(1 + s_1 + s_3 - t + \lambda_1 + \lambda_2)}{a(s + s_3 - s_0 - t + \lambda_1 + \lambda_2)} \\ &\times \frac{a(2 + s_2 + s_3 + s + \lambda_1, 1 - s_2 + s_3 + s + \lambda_1, s_3 - s_0 - u + \lambda_1)}{a(\lambda_1, 1 + 2s_3 + \lambda_1, 1 - u + s_1 + s_3 + s + \lambda_1)} \\ &\times \frac{a(-1 - s_2 - s_0 - t + \lambda_2, s_2 - s_0 - t + \lambda_2, 1 + s + u - t + \lambda_2)}{a(\lambda_2, -1 - 2t + \lambda_2, s_1 + u - s_0 - t + \lambda_2)} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для 6j-символов для группы  $SL(2, \mathbb{C})$  было проделано в работе [22].

#### §4. ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРАВИЛА ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ

На протяжении статьи используется удобное графическое представление различных многократных двумерных интегралов при помощи диаграмм Фейнмана. Элементами диаграммной техники являются линии (или пропагаторы) и вершины. Мы имеем в виду диаграммную технику для многократных двумерных интегралов [17]. Пропагатор изображается стрелкой с индексом  $\alpha$ , идущей из точки  $w$  в точку  $z$ , как изображено на Рис. 10 и соответствует следующему выражению

$$\frac{1}{[z-w]^\alpha} \equiv \frac{1}{(z-w)^\alpha (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{\alpha}}} = \frac{(\bar{z}-\bar{w})^{\alpha-\bar{\alpha}}}{|z-w|^{2\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha-\bar{\alpha}}}{[w-z]^\alpha}, \quad (4.1)$$

где  $\alpha - \bar{\alpha} = n_\alpha$  — целое число. На том же самом рисунке показано правило обращения стрелки.

Формула для преобразования Фурье [4]

$$\int d^2z \frac{e^{i(pz + \bar{p}\bar{z})}}{[z]^\alpha} = \pi i^{\alpha-\bar{\alpha}} a(\alpha) \frac{1}{[p]^{1-\alpha}}, \quad (4.2)$$

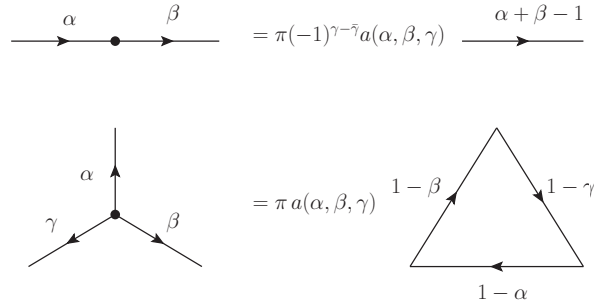


Рис. 11. Правило интегрирования цепочки и соотношение звезда-треугольник:  $\alpha + \beta + \gamma = 2$ .

где функция  $a(\alpha)$  определяется следующим образом

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1 - \bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}, \quad a(\bar{\alpha}) = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\bar{\alpha})}, \quad (4.3)$$

$$a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) := a(\alpha)a(\beta)a(\gamma)\dots$$

Основные формулы, связанные с функцией  $a(\alpha)$

$$a(\alpha)a(1 - \bar{\alpha}) = 1, \quad \frac{a(1 + \alpha)}{a(\alpha)} = -\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}},$$

$$a(\alpha)a(1 - \alpha) = (-1)^{[\alpha]}, \quad a(\alpha) = (-1)^{[\alpha]}a(\bar{\alpha}),$$

где использовано обозначение  $(-1)^{[\alpha]} \equiv (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}}$ . Основные интегральные тождества, используемые при вычислениях диаграмм Фейнмана:

- правило интегрирования цепочек

$$\int d^2w \frac{1}{[z_1 - w]^\alpha [w - z_2]^\beta} = \frac{\pi a(\alpha, \beta, \gamma)}{[z_2 - z_1]^{\alpha + \beta - 1}}, \quad (4.4)$$

где  $\gamma = 2 - \alpha - \beta$ ,  $\bar{\gamma} = 2 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ .

- соотношение звезда-треугольник

$$\int d^2w \frac{1}{[z_1 - w]^\alpha [z_2 - w]^\beta [z_3 - w]^\gamma}$$

$$= \frac{\pi a(\alpha, \beta, \gamma)}{[z_2 - z_1]^{1 - \gamma} [z_1 - z_3]^{1 - \beta} [z_3 - z_2]^{1 - \alpha}}, \quad (4.5)$$

где  $\alpha + \beta + \gamma = 2$  и  $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 2$ .

Эти тождества изображены при помощи диаграмм на Рис. 11, где жирная точка в вершине означает, что по соответствующей координате вершины производится интегрирование. Вершина, в которой сумма всех входящих линий равна двойке, называется уникальной. Точно также уникальным называется треугольник, в котором сумма индексов всех линий равна единице. Соотношение звезда-треугольник позволяет преобразовать уникальную вершину в уникальный треугольник.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*. — Academic Press, **5** (1966).
2. I. M. Gelfand, M. A. Naimark, *Unitary representations of the classical groups*. — Trudy Mat. Inst. Steklov. **36** (1950), 3–288.
3. М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*. Наука, М., 1976.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщённые функции*. Вып. 1: *Обобщённые функции и действия над ними*. Наука, М., 1959.
5. М. А. Наймарк, *Decomposition of a tensor product of irreducible representations of the proper Lorentz group into irreducible representations*. — Tr. Mosk. Mat. Obs. **8** (1959), 121–153. (Am. Math. Soc. Transl., Ser. **2**, Vol. 36 (1964), 101–229).
6. А. А. Белавин, А. М. Полиakov, А. В. Замолодчиков, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*. — Nucl. Phys. B **241**, №2 (1984), 333–380.
7. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*. — Lect. Notes in Physics **151** (1982), 61–119.
8. E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*. In “Quantum Group and Quantum Integrable Systems” (Nankai Lectures in Mathematical Physics), ed. Mo-Lin Ge, Singapore: World Scientific, 1992, pp.63-97; hep-th/9211111.
9. L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, In: Quantum Symmetries/Symmetries Quantiques. Proc. Les-Houches summer school, LXIV. Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North-Holland, 1998, 149–211, hep-th/9605187.
10. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Yang–Baxter equation and representation theory*. — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.
11. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, London, 1982.
12. M. Jimbo, *Introduction to the Yang–Baxter equation*. — Int. J. Mod. Phys **A 4**, (1983) 3759. Yang–Baxter equation in integrable systems, M. Jimbo ed., Adv. Ser. Math. Phys., 10, World Scientific (Singapore) 1990.
13. E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, *Exactly solvable SOS models II*. — Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1988), 17–122.
14. I. B. Frenkel, V. G. Turaev, *Trigonometric Solutions of the Yang–Baxter Equation, Nets, and Hypergeometric Functions*. In: Functional Analysis on the Eve of 21st century, vol. 1, Progress in Math., 131, Birkhäuser, Boston, pp. 65–118, 1995.

15. I. Frenkel, V. Turaev, *Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions*. — The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars (Cambridge, MA: Birkhauser Boston) (1997) pp. 171–204.
16. V. Pasquier, *Etiology of IRF Models*. — Comm. Math. Phys. **118** (1988), 355–364.
17. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD. I: Baxter Q-operator and separation of variables*. — Nucl. Phys. B **617** (2001) 375. [arXiv:hep-th/0107193].
18. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *General solution of the Yang–Baxter equation with the symmetry group  $SL(n, \mathbb{C})$* . — Algebra Analiz **21** (2009), №4, 1–94 (St. Petersburg Math. J. **21** (2010), 513–577).
19. S. G. Gorishnii, A. P. Isaev, *An approach to the calculation of many-loop massless Feynman integrals*. — Teor. Mat. Fiz. **62**, No. 3 (1985), 345–358. (Theor. Math. Phys. **62**, No. 3 (1985), 232–240).
20. R. S. Ismagilov, *On Racah operators*. — Funktsional. Anal. i Prilozhen. **40**, No. 3 (2006), 69–72. (Funct. Anal. Appl. **40**:3 (2006), 222–224).
21. R. S. Ismagilov, *Racah operators for principal series of representations of the group  $SL(2, \mathbb{C})$* , Mat. Sbornik **198**, No.3 (2007), 77–90. (Sb. Math. **198**:3 (2007), 369–381).
22. S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *On the  $6j$ -symbols for  $SL(2, \mathbb{C})$  group*. e-Print: arXiv:1711.07073.

Valinevich P. A., Derkachov S. E., Isaev A. P. SOS-representation for the  $SL(2, \mathbb{C})$ -invariant  $R$ -operator and Feynman diagrams.

In the first part of the paper the basic facts about unitary series representations of the group  $SL(2, \mathbb{C})$  and corresponding solutions to the Yang–Baxter equations are given. In the second part we derive SOS-representation of the  $R$ -operator and prove the corresponding Yang–Baxter equation. Using Feynman diagrams we perform the calculation of the kernel of the  $R$ -operator in SOS-representation. The expression for the kernel is presented in the form of Mellin–Barnes integral.

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,  
191023 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: valinevich@pdmi.ras.ru  
*E-mail*: derkach@pdmi.ras.ru

Поступило 6 декабря 2017 г.

Лаборатория теоретической физики  
им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ,  
141980 Дубна, Россия  
*E-mail*: isaevap@theor.jinr.ru