Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 465, 2017 г.

Т. А. Болохов

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ 4Х-МЕРНОГО ПРОПАГАТОРА И ЕГО ЛОГАРИФМА В МЕТОДЕ ФОНОВОГО ПОЛЯ

Метод фонового поля, разработанный в статьях [1, 2], позволяет значительно упростить вычисления для эффективного действия и β-функции при квантовании различных полевых моделей. В общем случае этот метод включает в себя вычисление функциональных интегралов по флуктуациям b в окрестности фонового поля B:

$$Z(B) = \int \exp\{iS(B,b)\} \prod \delta b,$$

где $S(B,b)$ – это модифицированное действие классической теории. Данное действие может быть получено из действия классической теории с помощью подстановки суммы $B+b$ в качестве аргумента. Если теория обладает дополнительной симметрией, то в выражение $S(B,b)$ также необходимо добавить слагаемые, фиксирующие калибровку

$$S(B,b) = S_{\mathrm{cl}}(B+b) + S_{\mathrm{gauge}}(B,b),$$

и, таким образом, $S(B,b)$ уже не будет функцией суммы $B+b$. Будем считать, что разложение классического действия в окрестности нуля полевого аргумента состоит из конечного числа слагаемых так, что после введения константы связи g и замены

$$b \to gb, \quad S \to \frac{1}{g^2}S$$

получается сумма:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g^2}S(B,gb) =& \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{1}{g}V_1 b + \frac{1}{2}bMb + gV_3 b^3 + \ldots + g^{N-2}V_N b^N \\ =& \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{1}{g}V_1 b + \frac{1}{2}bMb + gS_{\mathrm{Int}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее мы подразумеваем, что все поля и вершины (точки взаимодействия V) могут иметь индексы, как векторные, так и связанные

Ключевые слова: метод фонового поля, функциональный интеграл, логарифм оператора, теория Янга–Миллса.

Работа написана при поддержке гранта РНФ 14-11-598.

с внутренней симметрией, а также, что переменная интегрирования b включает в себя вспомогательные (духовые) поля.

Вместо функции $Z(B)$ более содержательной характеристикой теории является ее нормированный логарифм, который называется эффективным действием. Считая константу связи g малой величиной, эффективное действие может быть представлено в виде суммы связных диаграмм Фейнмана в которых пропагатор M^{-1} и вершины V_k являются функциями фонового поля B:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EA}(B) &= \ln Z(B) - \ln Z(0) \\
&= \ln \int \exp\Bigl\{\frac{i}{g^2} S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{i}{g} V_1 b + \frac{i}{2} bMb + igS_{\mathrm{Int}}\Bigr\} \prod \chi\delta b - \ln Z(0) && (2) \\
&= \frac{i}{g^2} S_{\mathrm{cl}} + \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(\ln M^{-1}(B) - \ln M^{-1}(0)) + ig^2(2\ \mathrm{Loops}) + \dots . && (3)
\end{aligned}$$

Здесь мы исключили вклад линейного слагаемого $\frac{1}{g}V_1 b$, порождающего бесконечное число добавок на каждом этапе разложения интеграла по степеням g^2. Это можно сделать, если наложить на поле B условие, называемое квантовым уравнением движения (совпадающее в первом приближении с классическим уравнением), которое обнуляет вклад всех одночастично-приводимых диаграмм [3].

Сумма (3), получившаяся в выражении для эффективного действия $\mathrm{EA}(B)$, содержит расходящиеся интегралы. В частности, в ней расходится след логарифма, а в петлевом счете появляются интегралы вида

$$\int \bigl(M^{-1}(x,y)\bigr)^2 d^4(x-y) \sim \frac{1}{(4\pi^2)^2} \int \frac{d^4(x-y)}{(x-y)^4} \tag{4}$$

и некоторые другие (петлевыми слагаемыми здесь и далее мы будем называть только слагаемые, содержащие больше одной петли). Задача регуляризации состоит в том, чтобы изменить выражение, стоящее в функциональном интеграле (2), таким образом, чтобы во всех слагаемых суммы (3) получились конечные коэффициенты. Естественно, что при этом также необходимо, чтобы интеграл (2) восстанавливался к первоначальному виду при стремлении параметра, описывающего изменение, к некоторому значению. Далее, рассматривая пределы эффективного действия при различном поведении константы связи и параметра регуляризации, можно ставить задачу о перенормировке теории.

Применение метода фонового поля в данном виде было рассмотрено в работах [4, 5]. При этом описанная схема, через зависимость коэффициентов V_k и M в интеграле (2) от фонового поля B, предоставляет непосредственный контроль за симметрией теории. Практически единственным вариантом регуляризации, совместимым с данной интерпретацией метода фонового поля в двух и более петлях, является размерная регуляризация [6]. В этом подходе действие S переносится в пространство размерности $4-\epsilon$, параметром регуляризации является безразмерная разность ϵ, а след логарифма и интегралы типа (4) являются разложениями по обратным степеням ϵ (рядами Лорана).

В настоящей статье обсуждаются возможности построения регуляризации интеграла в выражении (2) для 4-мерной евклидовой теории путем замены пропагатора M^{-1} (который получается как обратный оператор для квадратичной формы M) на некоторую функцию переменной M

$$\begin{aligned} M^{-1} &\to r(M,\Lambda), \qquad r(M,\Lambda) \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} M^{-1}, \\ M \quad &\to r^{-1}(M,\Lambda), \\ \ln M^{-1} &\to \ln r(M,\Lambda), \end{aligned}$$

где Λ – это параметр регуляризации. Используя в качестве примера 4-мерную евклидову теорию Янга-Миллса мы покажем, что расходимости в петлевом счете и в следе логарифма завязаны друг на друга таким образом, что их нельзя регуляризовать описанным способом с помощью функции r с аналитическим поведением или лежащей в классе преобразований Лапласа. Тем не менее, как будет показано в разделе 2, это можно сделать с помощью ступенчатой функции. Этот подход (сужение области интегрирования) приводит к трудновыполнимым петлевым вычислениям, однако он позволяет более наглядно продемонстрировать, что разность двух логарифмов может зависеть от общего коэффициента их аргументов

$$\mathrm{Tr}\big(\ln\chi^2 r(M,\Lambda) - \ln\chi^2 r(M_0,\Lambda)\big) \neq \mathrm{Tr}\big(\ln r(M,\Lambda) - \ln r(M_0,\Lambda)\big), \quad (5)$$

где $M_0 = M(0)$. На примере модели φ^4-поля это явление, как зависимость однопетлевых поправок от изменения масштаба координат, подробно разбирается в [7]. Для нас более удобной является интерпретация коэффициента χ как изменение меры в интеграле (2). Действительно, изменение масштаба переменных интегрирования

$$b \to \chi b$$

приводит к умножению на соответствующие степени параметра χ пропагатора

$$r(M,\Lambda) \to \chi^2 r(M,\lambda)$$

и вершин теории

$$V_k \to \chi^{-k} V_k.$$

При этом очевидно, что вклад замкнутых петлевых диаграмм не зависит от χ, в то время как к аргументу следа логарифма добавляется коэффициент

$$\mathrm{Tr}\big(\ln r(M,\Lambda) - \ln r(M_0,\Lambda)\big) \to \mathrm{Tr}\big(\ln \chi^2 r(M,\Lambda) - \ln \chi^2 r(M_0,\Lambda)\big).$$

Мера интегрирования χ, в свою очередь, также может завистеть от Λ и, таким образом, в соответствии с идеями [8], выбор меры интегрирования определяет схему перенормировки. Более того, так как функциональный интеграл является произведением интегралов, соответствующих различным частям спектра квадратичной формы, мера χ может быть разбита на произведение отличающихся мер, соответствующих указанным множителям в интеграле. Или, другими словами, мера χ может быть функцией оператора квадратичной формы (M или M_0).

Эти соображения показывают, что выбор аргумента следа логарифма, являющегося комбинацией функции r и меры χ, имеет достаточно большую свободу, и, таким образом, позволяет корректно определить общее выражение для следа логарифма. Дополнительные ограничения на выбор меры χ могут быть наложены в процессе перенормировки, что будет продемонстрировано далее на примере действия Янга-Миллса.

§1. Регуляризация с помощью теплового ядра

Для придания смысла следу логарифма и петлевым слагаемым остановимся для начала на регуляризациях, являющихся преобразованиями Лапласа каких-либо функций оператора квадратичной формы M.

Будем искать регуляризованный пропагатор и его логарифм в следующем виде

$$r(M,\Lambda) = \int\limits_0^\infty \widehat{r}(t,\Lambda)e^{-Mt}dt, \tag{6}$$

$$l(M,\Lambda) = \int\limits_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)e^{-Mt}dt. \tag{7}$$

Функции $r(M,\Lambda)$ и $l(M,\Lambda)$ должны быть такими, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &r(M,\Lambda) \stackrel{\Lambda\to\infty}{\to} M^{-1}, \\ &l(M,\Lambda) = \ln r(M,\Lambda), \quad M \geqslant 0. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что первый аргумент в этих функциях является оператором, достаточно определить их основные свойства для скалярных (собственных) величин. Таким образом, мы будем подразумевать, что аргументы функций могут иметь различный характер, в зависимости от контекста.

Кроме того, мы должны потребовать от $r(M,\Lambda)$ и $l(M,\Lambda)$ "разумного поведения в нуле" в координатном представлении, то есть конечность следа

$$\mathrm{Tr}\big(l(M,\Lambda) - l(M_0,\Lambda)\big) = \int \mathrm{tr} \int\limits_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)(e^{-Mt} - e^{-M_0t})(x,y)dt|_{x=y}d^4x \tag{8}$$

и расходимость меньше чем $(x-y)^{-2}$ для пропагатора

$$r(x,y) = \int\limits_0^\infty \widehat{r}(t,\Lambda)e^{-Mt}(x,y)dt$$

(для конечности диаграмм типа "восьмерки" необходимо потребовать существования предела при равных аргументах для $r(x,y)$). И та и другая расходимости связаны с поведением функций $\widehat{r}(t), \widehat{l}(t)$ в окрестности нуля аргумента t, поэтому нам необходимо знать как ведет себя экспонента e^{-Mt} в этой точке. Эта экспонента – тепловое ядро – определяется уравнением

$$\frac{\partial e^{-Mt}}{\partial t} + Me^{-Mt} = 0, \quad e^{-Mt} \stackrel{t\to 0}{\to} \delta^{mn}\delta^4(x-y)$$

(здесь m и n – это индексы оператора M, отвечающие за симметрии теории). Будем считать, что оператор M обладает пределом

$$M_0 = M|_{B=0} = -\partial^2 \delta^{mn},$$

а также, что тепловое ядро допускает разложение в окрестности нуля вида

$$e^{-Mt} = e^{-M_0 t}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots), \quad e^{-M_0 t} = \frac{\delta^{mn}}{4\pi^2 t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}. \tag{9}$$

При этом коэффициенты a_k зависят от фонового поля B таким образом, что

$$a_0|_{B=0} = \delta^{mn}, \quad a_k|_{B=0} = 0, k > 0$$

(подробное обсуждение свойств теплового ядра см. в [11]). В частности, теория Янга-Миллса содержит два пропагатора

$$\begin{aligned} &M = -\nabla\nabla\delta_{\mu\nu} - 2F_{\mu\nu}, && M^{\text{ghost}} = -\nabla\nabla, \\ &\nabla_\mu = \partial_\mu + B_\mu, && F_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu, \end{aligned}$$

а коэффициенты a_k определяются уравнениями

$$\begin{gathered} (x-y)^\lambda \nabla_\lambda a_0 = 0, \\ k a_k + (x-y)^\lambda \nabla_\lambda a_k = -M a_{k-1}, \end{gathered}$$

из которых следует, что

$$a_0(x,x) = \delta^{mn}, \qquad a_1(x,x)^{\{mn\}} = 0 \tag{10}$$

$$[a_2^{\text{YM}}(x,x)]^{mm} = -\frac{5}{12}\frac{C_2}{4\pi^2}F_{\mu\nu}^2, \qquad [a_2^{\text{ghost}}(x,x)]^{mm} = \frac{1}{48}\frac{C_2}{4\pi^2}F_{\mu\nu}^2. \tag{11}$$

Учитывая соотношения (10), (11), можно сделать вывод, что первый коэффициент, который даст вклад в значение логарифма (8) в нуле, будет a_2:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}\big(l(M,\Lambda) - l(M_0,\Lambda)\big) \\ &= \int\int_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)\frac{1}{4\pi^2 t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \big((a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)^{mm} - \delta^{mm}\big) dt|_{x=y} d^4x \\ &\qquad = \frac{1}{4\pi^2}\int [a_2(x,x)]^{mm} d^4x \int_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)dt + \ldots = A_2 l(M,\Lambda)|_{M=0}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь мы обозначили

$$A_k = \frac{1}{4\pi^2}\int [a_k(x,x)]^{mm} d^4x,$$

и сделали предположение о том, что интеграл по t и взятие предела $x = y$ можно переставлять местами. Теперь посмотрим на расходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)dt = l(M,\Lambda)|_{M=0}. \tag{13}$$

Он может расходиться на бесконечности по t, если функция $l(M,\Lambda)$ неограниченно растет в нуле. Такая расходимость устраняется введением инфракрасного параметра μ (точки перенормировки), например, при помощи сдвига

$$M \to M + \mu^2,$$

(в случае массивной теории параметр μ^2 можно выделить непосредственно из M, так чтобы этот оператор остался положительным). Тогда из свойства преобразования Лапласа следует, что

$$\mathrm{Tr}\big(l(M+\mu^2,\Lambda) - l(M_0+\mu^2,\Lambda)\big) = A_2 \int\limits_0^\infty \widehat{l}(t,\Lambda)e^{-\mu^2 t}dt \simeq A_2 l(\mu^2,\Lambda).$$

Из отсутствия расходимости интеграла (13) в нуле следует, что функция

$$l(M) = \int\limits_0^\infty \widehat{l}(t)e^{-Mt}dt$$

ограничена при $M \to \infty$. Это утверждение справедливо для некоторого класса функций $\widehat{l}(t)$, ведущих себя “регулярно” в нуле, либо интегрируемых по модулю. Оно не работает, например, для обобщенных функций, однако, в этом случае, как мы увидим ниже, разложение (9) требует специальной интерпретации при вычислении следа.

Из ограниченности $l(M)$ на бесконечности следует, что функция

$$r(M) = \exp l(M)$$

вообще не стремится к нулю, то есть обладает еще более худшим поведением при малой разности аргументов $(x-y)$, чем

$$M_0^{-1} = \frac{\delta^{mn}}{4\pi^2(x-y)^2}.$$

Границей раздела является функция

$$\widehat{l}_{\log}(t) = \frac{1}{t}$$

– для того, чтобы сходился след логарифма, $\widehat{l}(t)$ должна вести себя лучше чем $\widehat{l}_{\log}(t)$, но при этом пропагатор будет вести себя плохо. И наоборот, прообразы преобразований Лапласа от $l = \ln r(M)$ для функций $r(M)$, убывающих на бесконечности как M^{-2} и быстрее, являются производными дельта-функции и ведут себя в нуле еще хуже, чем $\widehat{l}_{\log}(t)$. Похожее явления наблюдается в работах [9, 10], где метод высших ковариантных производных хорошо регуляризует петлевые слагаемые, но при этом возникают трудности со следом логарифма. Без применения метода фонового поля подобная проблема разбирается в работах [12–14].

Посмотрим теперь, что происходит с формулой для следа в случае, когда $\widehat{l}(t)$ является обобщенной функцией. Например, обратные преобразования Лапласа для функций $\ln\rho^2 r(M,\Lambda)$ и $\ln r(M,\Lambda)$ отличаются на $\delta(t)\ln\rho^2$, поэтому можно записать

$$\mathrm{Tr}\big(\ln\rho^2 r(M,\Lambda) - \ln\rho^2 r(M_0,\Lambda)\big) - \mathrm{Tr}\big(\ln r(M,\Lambda) - \ln r(M_0,\Lambda)\big) \\ = \ln\rho^2 \int \mathrm{tr} \int\limits_0^\infty \delta(t)(e^{-Mt} - e^{-M_0 t})dt|_{x=y} d^4x.$$

То есть, получается разность следов двух единичных операторов, которая должна быть равна нулю. Но, с другой стороны, если воспользоваться разложением (9) для e^{-Mt}, то в соответствии с формулой (12), мы получим

$$\ln\rho^2 \int \mathrm{tr} \int\limits_0^\infty \delta(t)(e^{-Mt} - e^{-M_0 t})dt|_{x=y} d^4x \\ = \ln\rho^2 \int \mathrm{tr} \int\limits_0^\infty \frac{\delta(t)}{4\pi^2 t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} a_2(x,y) t^2 dt|_{x=y} d^4x = A_2 \ln\rho^2.$$

Функция, которая стоит под внешним интегралом

$$\int\limits_0^\infty \frac{\delta(t)}{4\pi^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} a_2(x,y)dt = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} a_2(x,x), & x = y, \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

не непрерывна по x, y. Как ядро она не оказывает влияния на единичный оператор $e^{-Mt}|_{t=0}$, но, в то же время, формально имеет ненулевой след. Это обстоятельство, как мы увидим дальше, имеет физический смысл нарушения масштабной инвариантности следа логарифма (5), но с точки зрения математики мы имеем дело с некорректностью перестановки предела и интеграла в формуле (12).

Таким образом, мы видим, что регуляризация типа (6), (7) обычными функциями $\widehat{r}(t)$, $\widehat{l}(t)$ оказывается непригодной для вычисления эффективного действия с помощью метода фонового поля, или, по крайней мере, требует специальной интерпретации. Использование же в формуле (7) функций с более высоким ростом на бесконечности чем $\ln M$ означает выход из класса преобразований Лапласа от обычных функций $\widehat{l}(t)$, потерю непрерывности $l(M, \Lambda)$ по x, y и неоднозначное выражение для следа.

В заключение рассуждений о тепловом ядре приведем два примера функций $\widehat{l}(t)$ и рассмотрим свойства их преобразований Лапласа.

1.1. Пример: срез в преобразовании Лапласа. Первый пример – срез в преобразовании Лапласа не доходя до нуля на малый параметр:

$$\widehat{l}_{\mathrm{cut}}(t, \Lambda) = \begin{cases} 0, & t < 1/\Lambda^2, \\ 1/t, & 1/\Lambda^2 \leqslant t. \end{cases}$$

В используемой здесь интерпретации метода фонового поля такая регуляризация была описана в работе [4]. Регуляризованный логарифм $l(M, \Lambda)$ выглядит следующим образом:

$$l(M, \Lambda) = \int\limits_0^\infty \widehat{l}_{\mathrm{cut}}(t) e^{-Mt} dt = \int\limits_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{e^{-Mt}}{t} dt = \mathrm{E}_1(M/\Lambda^2),$$

а формула (12) дает для его следа выражение

$$\mathrm{Tr}\big(l(M + \mu^2, \Lambda) - l(M_0 + \mu^2, \Lambda)\big) = A_2 \mathrm{E}_1(\mu^2/\Lambda^2).$$

При малом значении аргумента интегральная экспонента E_1 ведет себя как

$$\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2) \simeq -\ln\frac{M}{\Lambda^2} - \gamma + o(1),$$

и, таким образом, мы имеем расходящийся след логарифма. Но эта расходимость обусловлена прежде всего тем, что при $\Lambda \to \infty$

$$l(M,\Lambda) \simeq -\ln \frac{M}{\Lambda^2}, \tag{14}$$

то есть тем, что мы берем в качестве пропагатора не M^{-1}, а $\Lambda^2 M^{-1}$.

С другой стороны, при M стремящемся к бесконечности мы имеем разложение

$$\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2) \simeq e^{-M/\Lambda^2}\big(\frac{\Lambda^2}{M} + o(1)\big) \overset{M\to\infty}{\to} 0,$$

что делает невозможным использование функции

$$r(M,\Lambda) = \exp\{\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2)\} \overset{M\to\infty}{\simeq} I + o(1)$$

в качестве пропагатора для вычисления петлевых диаграмм.

1.2. Пример: регуляризация Паули-Вилларса. Второй пример – регуляризация Паули-Вилларса [15]. В упрощенной форме это преобразование Лапласа от функции

$$\widehat{l}_{\mathrm{PV}}(t,\Lambda) = \frac{1 - e^{-\Lambda^2 t}}{t},$$

которое выглядит следующим образом:

$$l(M,\Lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\Lambda^2 t}}{t} e^{-Mt} dt = \ln \frac{M + \Lambda^2}{M}. \tag{15}$$

В реальной регуляризации Паули-Вилларса могут участвовать несколько экспонент с различными весами, но результирующее поведение на бесконечностях по M и Λ будет оставаться таким же.

Соответствующий след логарифма выражается через элементарные функции:

$$\mathrm{Tr}\big(l(M+\mu^2,\Lambda) - l(M_0+\mu^2,\Lambda)\big) = A_2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}.$$

Он расходится, но его расходимость, опять же, связана с ростом множителя перед пропагатором в аргументе логарифма

$$l(M,\Lambda) \overset{\Lambda\to\infty}{\simeq} \ln \frac{\Lambda^2}{M}. \tag{16}$$

В то же время, при M стремящемся к бесконечности мы имеем соотношение

$$r(M,\Lambda) = \exp l(M,\Lambda) = \exp\{\ln \frac{M+\Lambda^2}{M}\} \simeq I + o(1).$$

То есть замечания предыдущего примера относительно расходимости и поведения пропагатора при больших M применимы и здесь.

§2. Сужение области интегрирования

Альтернативным способом введения регуляризации в функциональном интеграле (2) может быть сужение множества функций, по которым производится интегрирование. Будем учитывать при интегрировании только такие функции, для которых выполняется неравенство

$$\int (b, Mb) d^4x \leqslant \Lambda^2 \int (b,b) d^4x \tag{17}$$

и его следствие

$$\int (b, (\ln M) b) d^4x \leqslant \ln \Lambda^2 \int (b,b) d^4x,$$

которое верно, если предположить, что M – это положительный оператор. Тогда для регуляризации пропагатора и логарифма можно использовать функции

$$r(M,\Lambda) = \begin{cases} M^{-1}, & |M| \leqslant \Lambda^2, \\ 0, & \Lambda^2 < |M|, \end{cases}$$

$$l(M,\Lambda) = \begin{cases} -\ln |M|, & |M| \leqslant \Lambda^2, \\ 0, & \Lambda^2 < |M|. \end{cases}$$

Действительно, пусть P^Λ – проектор на спектральное подпространство оператора M, отвечающее части спектра от 0 до Λ^2. Тогда интеграл по функциям, удовлетворяющим равенству (17) можно преобразовать следующим способом:

$$
\begin{aligned}
&\int W(b)\exp\{\frac{i}{2}bMb\}\prod_{P^\Lambda b=b}\chi\delta b\\
&\qquad=\int W(P^\Lambda b)\exp\{\frac{i}{2}bP^\Lambda MP^\Lambda b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta\chi b\\
&\qquad=W(\frac{1}{i\chi}\frac{\delta}{\delta j})\int\exp\{\frac{i}{2}\widetilde{b}P^\Lambda\frac{M}{\chi^2}P^\Lambda\widetilde{b}+i\widetilde{b}P^\Lambda j\}\prod_{P^\Lambda\widetilde{b}=\widetilde{b}}\delta\widetilde{b} \qquad (18)\\
&\qquad=(\mathrm{Det}\,\chi^{-2}P^\Lambda M)^{-1/2}W(\frac{1}{i\chi}\frac{\delta}{\delta j})\exp\{-\frac{i}{2}jP^\Lambda\chi^2M^{-1}P^\Lambda j\}|_{j=0}\\
&\qquad=\exp\{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\chi^2r(M,\Lambda)\}W(\frac{\delta}{i\delta j})\exp\{-\frac{i}{2}jr(M,\Lambda)j\}|_{j=0}.
\end{aligned}
$$

Как и в случае с функциональным интегралом по полному пространству, это равенство проверяется для полиномиальных форм $W(b)$ (см. определение функционального интеграла в [8]). Определитель $\mathrm{Det}P^\Lambda M$ понимается как произведение собственных значений оператора M с учетом кратности по части спектра от 0 до Λ^2. Кроме того, мы ввели в интеграл скалярную меру χ, которая, как указывалось выше, вносит вклад только в след логарифма, но не в петлевой счет.

Функции $r(M,\Lambda)$ и $l(M,\Lambda)$ не непрерывны, поэтому они не являются преобразованиями Лапласа. Вместо этого можно воспользоваться преобразованием Фурье:

$$
\begin{aligned}
r(M,\Lambda)&=\frac{i}{\pi}\int\mathrm{Si}(\Lambda^2t)e^{-iMt}dt,\\
\ln\chi^2r(M,\Lambda)=l(\chi^{-2}M,\Lambda)&=\frac{1}{\pi}\int(\frac{\mathrm{Si}(\Lambda^2t)}{t}-\frac{\sin\Lambda^2t}{t}\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2})e^{-iMt}dt,\\
P^\Lambda(M)&=\frac{1}{\pi}\int\frac{\sin\Lambda^2t}{t}e^{-iMt}dt,
\end{aligned}
$$

где экспонента e^{-iMt} определяется уравнением

$$
\frac{\partial e^{-iMt}}{i\partial t}+Me^{-iMt}=0,\quad e^{-iMt}\overset{t\to\pm0}{\to}\delta^{mn}\delta^4(x-y).
$$

Такая экспонента может быть получена из разложения (9) заменой $t\to it$:

$$
e^{-iMt}=e^{-iM_0t}(a_0+ia_1t-a_2t^2+\ldots),\quad e^{-M_0t}=\frac{-\delta^{mn}}{4\pi^2t^2}e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}. \qquad (19)
$$

Сразу отметим, что, так как функция $r(M,\Lambda)$ равна нулю на бесконечности, то поведение соответствующего оператора в координатном представлении регулярно при равных аргументах:

$$r(x,y) \simeq \frac{J_0(\Lambda|x-y|)-1}{4\pi^2(x-y)^2}a_0(x,y)+o(1) \simeq \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}\delta^{mn}+o(1).$$

След логарифма $l(M,\Lambda)$ (для случая поля Янга-Миллса) вычисляется по формуле аналогичной (12), основой которой является сокращение степени t^2, стоящей перед коэффициентом a_2, со знаменателем ядра e^{iM_0t}. После введения инфракрасного параметра μ получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\big(\ln\chi^2 r(M+\mu^2,\Lambda)-\ln\chi^2 r(M_0+\mu^2,\Lambda)\big)\\
&=\frac{1}{\pi}\int\operatorname{tr}\int\Big(\frac{\operatorname{Si}(\Lambda^2t)}{t}-\frac{\sin\Lambda^2t}{t}\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2}\Big)(e^{-i(M+\mu^2)t}-e^{-i(M_0+\mu^2)t})dt|_{x=y}d^4x\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int\big(Q_2(x-y)-\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2}q_2(x-y)\big)[a_2(x,y)]^{mm}|_{x=y}d^4x \qquad (20)\\
&=A_2 l(\frac{\mu^2}{\chi^2},\Lambda)=A_2\ln\frac{\chi^2}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

Явный вид функций $q_2(x)$ и $Q_2(x)$ нам не так важен, ответ здесь получается на основании преобразования Фурье, однако приведем его, для того, чтобы подчеркнуть, что эти функции непрерывны и что перестановка интегрирования по t и взятия предела $x=y$ – это корректная операция:

$$q_2(x)=J_0(\sqrt{(\Lambda^2-\mu^2)x^2}), \quad Q_2(x)=\int\limits_{\mu^2}^{\Lambda^2}J_0(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k}.$$

Несмотря на явное наличие коэффициента $\ln\Lambda^2$ в формуле (20), при $x=0$ этот логарифм сокращается, и в итоге остается

$$Q_2(0)-\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2}\,q_2(0)=\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}-\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2}=\ln\frac{\chi^2}{\mu^2}.$$

Итак, формула (20) показывает, что искомый след логарифма, при выбранном способе вычисления, не зависит непосредственно от параметра регуляризации Λ (точнее сказать, он не растет с ростом Λ). Из нее же очевидно, что умножение переменной континуального интегрирования на константу χ^2 в формуле (5) эквивалентно замене

$\chi^2 \to \rho^{-2}\chi^2$, что дает добавку к следу логарифма:

$$\operatorname{Tr}\bigl(\ln\chi^2 r(M) - \ln\chi^2 r(M_0)\bigr) = \operatorname{Tr}\bigl(\ln r(M) - \ln r(M_0)\bigr) + A_2 \ln\chi^2.$$

Такое поведение следа логарифма связано с тем, что при выделении из логарифмов слагаемых с коэффициентами $\ln\chi^2$ мы должны сократить не следы единичных операторов, а следы проекторов, которые считают разность "количества собственных функций" операторов M и M_0. Вполне естественно, что эта разность может и не стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$, даже несмотря на то, что M и M_0 действуют в одном пространстве.

Формула (20) также показывает, что и эффективное действие, и процесс перенормировки зависят от начального выбора меры интегрирования χ. Эта мера должна выбираться таким способом, чтобы с помощью добавки к следу логарифма компенсировать растущие по Λ слагаемые в петлевых вычислениях и, таким образом, обеспечивать конечное выражение для перенормированного эффективного действия. Одним из условий такой компенсации является выполнение равенства

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta B}\Bigl(\ln\int \exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b - \ln\int \exp\{\frac{i}{2}b\frac{M_0}{\chi^2}b\}\prod_{P_0^\Lambda b=b}\delta b\Bigr)&\\ \simeq \frac{i}{2\chi^2}\int b\frac{\delta M}{\delta B}b\exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b&\\ \times\Bigl(\int \exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b\Bigr)^{-1}&\end{aligned} \qquad (21)$$

через которое связываются старшие расходимости диаграмм с разным числом петель (аналог тождества Уорда). Простые правила для вариации логарифма здесь неприменимы, так как вариация берется не от аргумента логарифма, а от кратности спектра, то есть от коэффициента перед логарифмом. Поэтому левая часть в этой формуле, с учетом сдвига на μ^2, равна вариации по фоновому полю от следа логарифма (20)

$$\mathrm{LHS} \simeq \ln\frac{\chi^2}{\mu^2}\,\frac{\delta A_2}{\delta B},$$

в то время как правая часть от χ не зависит, но растет по Λ как

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}r(M,\Lambda) \simeq -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}a_1 Q_2(0) \simeq -\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}a_1.$$

При выводе этого соотношения используется разложение регуляризованного пропагатора $r(M,\Lambda)$ по степеням $(x-y)$

$$
\begin{aligned}
&r(M+\mu^2,\Lambda) = \frac{i}{\pi}\int \mathrm{Si}(\Lambda^2 t)e^{-iMt-i\mu^2 t}dt \\
=&\frac{-i}{4\pi^2\pi}\int \mathrm{Si}(\Lambda^2 t)e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}-i\mu^2 t}(a_0+ia_1 t-a_2 t^2+\ldots)\frac{dt}{t^2} = \\
=&\frac{1}{4\pi^2}(Q_1(x-y)a_0(x,y)+Q_2(x-y)a_1(x,y)+Q_3(x-y)a_2(x,y)+\ldots),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) =& 2\int\limits_{\mu^2}^{\Lambda^2}\sqrt{\frac{k-\mu^2}{x^2}}J_1(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k} \simeq \Lambda^2-\mu^2-\mu^2\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+o(1), \\
Q_3(x) =& \frac{1}{2}\int\limits_{\mu^2}^{\Lambda^2}\sqrt{\frac{x^2}{k-\mu^2}}J_1(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k} \simeq \frac{1}{4}x^2\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+o(x^2),
\end{aligned}
$$

а выражение для $Q_2(x)$ было определено выше.

Например, для теории Янга-Миллса выполняются соотношения[1]

$$
\mathrm{Tr}\,\frac{\delta M}{\delta B}a_1 = -\,\mathrm{Tr}\,\frac{\delta a_2}{\delta B} \tag{22}
$$

поэтому из равенства (21) следует, что $\chi = \Lambda$, и логарифм определителя вместе с мерой интегрирования дают расходящийся вклад

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EA}(B) &= \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}A_2^{\mathrm{YM}} - \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}A_2^{\mathrm{ghost}} + \ldots \\
&= \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}} - \frac{11}{48}\frac{C_2}{4\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}S_{\mathrm{cl}} + \ldots .
\end{aligned}
$$

Схема регуляризации, предложенная в данном параграфе, трудноприменима уже для двух петлевых вычислений, тем не менее, она вместе с равенством (21) дает важные указания о свойствах и возможном использовании меры интегрирования.

[1] Несмотря на то, что эти соотношения выглядят довольно естественно, их доказательство занимает по полстраницы вычислений с помощью ∇-алгебры для каждого вида операторов.

§3. Тепловое ядро. Расширенная версия

Рассмотрим функцию $\Omega_M(\lambda)$ – плотность собственных значений оператора M в точке спектра λ, то есть количество собственных функций на единицу длины спектра. Например, для оператора $M_0 = -\partial^2$ в 4-мерном евклидовом пространстве количество собственных функций, лежащих в интервале спектра от λ до $\lambda + d\lambda$, пропорционально $\lambda d\lambda$, поэтому можно считать, что

$$\Omega_{M_0} = c\lambda.$$

Здесь c – это некоторая константа размерности λ^{-2} (размерность константы определяется тем соображением, что *количество* собственных функций $\Omega_{M_0}(\lambda)\,d\lambda$ безразмерно). Мы предположим, что спектр оператора M ведет себя на бесконечности так же, как спектр оператора M_0, таким образом, что можно ввести убывающую на бесконечности функцию ω:

$$\Omega_M(\lambda) = c\lambda + \omega(B,\lambda). \tag{23}$$

С помощью функции ω можно записать формальные выражения для разности количества собственных функций операторов M и M_0, лежащих в интервале спектра $[\lambda', \lambda'']$

$$\int\limits_{\lambda'}^{\lambda''} \omega(\lambda) d\lambda,$$

и далее для следа разности операторов $l(M)$ и $l(M_0)$ (действительные для некоторого набора функций l)

$$\operatorname{Tr} l(M) - \operatorname{Tr} l(M_0) = \int l(\lambda)\omega(\lambda)\,d\lambda. \tag{24}$$

Несмотря на то, что мы очень мало знаем о плотности $\omega(\lambda)$ (сравнение выражения (24) с модифицированной формулой (12) показывает, что эта плотность должна быть суммой производных δ-функций с коэффициентами A_k, что не соответствует действительности), наша главная цель – это получить формальное выражение для вклада меры χ в эффективное действие (2). Для переменных, подчиняющихся статистике

Бозе-Эйнштейна оно выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\mathrm{EA}(B) &= \ln\int \exp\{iS(B,b)\}\prod\chi\delta b - \ln\int\exp\{iS(0,b)\}\prod\chi\delta b \\ &= \ln\int\exp\{iS(B,b)\}\prod\delta b - \ln\int\exp\{iS(0,b)\}\prod\delta b \\ &\quad + \int\omega(\lambda)\ln\chi(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь мы предполагаем, что мера χ может быть разной для компонент вариации δb, отвечающих разным частям спектра квадратичной формы в функциональном интеграле.

Формула (25) показывает, каким образом вклад меры интегрирования χ в эффективное действие позволяет преодолеть трудности регуляризации методом фонового ядра, описанные в разделе 1. Расходимость следа логарифма из разделов 1.1, 1.2, возникает не из-за слишком медленного убывания подинтегральных выражений в формуле (24), а из-за умножения пропагатора, от которого берется логарифм, на параметр регуляризации Λ (14), (16). В то же время, функциональный интеграл в функциональном действии сам по себе определен с точностью до меры χ, которая, в свою очередь, оказывает влияние только на след логарифма. Следовательно, мы всегда можем изменить квадртичную форму $M \to r^{-1}(M,\Lambda)$ таким образом, чтобы получить конечные петлевые слагаемые, и выбрать меру интегрирования, в соответствии с формулами (20), (25) так, чтобы компенсировать расходимости следа логарифма.

Действительно, в методе высших ковариантных производных [9,10] пропагатор M умножается на полином степени n

$$M \to r^{-1}(M,\Lambda) = Mp(\frac{M}{\Lambda^2})$$

с фиксированным поведением в нуле и на бесконечности

$$\begin{aligned} p(\tau) &\simeq \tau^n, \quad \tau\to\infty,\\ p(\tau) &= 1, \quad\ \ \tau = 0,\end{aligned}$$

тем самым делая петлевые слагаемые конечными. В то же время, обратное преобразование Лапласа от функции

$$l(M) = -\ln Mp(\frac{M}{\Lambda^2})$$

ведет себя в нуле как

$$\widehat{l}(t) \simeq \frac{1+n}{t}, \quad t \to 0,$$

что приводит к расходящемуся интегралу по t в формуле (20). Теперь, если выбрать χ в формуле (25) в виде следующей функции от λ (с фиксированной асимптотикой на бесконечности)

$$\chi^2(\lambda) = (\lambda + \mu^2 + \Lambda^2)p(\frac{\lambda+\mu^2}{\Lambda^2}) \overset{\Lambda\to\infty}{\simeq} \Lambda^2 + O(\Lambda^{-1}),$$

то для вклада следа логарифма и меры интегрирования получается следующее выражение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^\infty \ln(\lambda+\mu^2)p(\frac{\lambda+\mu^2}{\Lambda^2})\,\omega(\lambda)d\lambda + \int_0^\infty \ln\chi(\lambda)\omega(\lambda)d\lambda \\ = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \ln\frac{(\lambda+\mu^2)p(\frac{\lambda+\mu^2}{\Lambda^2})}{\chi^2(\lambda)}\,\omega(\lambda)d\lambda \\ = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \ln\frac{\lambda+\mu^2}{\lambda+\mu^2+\Lambda^2}\,\omega(\lambda)d\lambda \\ = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\frac{M+\mu^2}{M+\mu^2+\Lambda^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Эта формула, с учетом коэффициента Бозе-Эйнштена $-1/2$ и инфракрасного сдвига на μ^2, совпадает с результатом, полученным с помощью регуляризации Паули-Вилларса (15).

Подитоживая вышесказанное, выпишем основные свойства регуляризованного пропагатора. Сначала представим его в виде преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} \frac{1}{(M+\mu^2)p(\frac{M}{\Lambda^2})} &= \int_0^\infty \widehat{r}(t)e^{-Mt}dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2}(L_1(x-y)a_0(x,y) + L_2(x-y)a_1(x,y) \\ &\qquad + L_3(x-y)a_2(x,y) + \ldots). \end{aligned}$$

После этого, предполагая, что корни $-\tau_k$ полинома $p(\tau)$ не совпадают, преобразуем его следующим образом

$$\frac{1}{Mp(\frac{M}{\Lambda^2})} = \frac{\Lambda^{2n}\tau_1 \ldots \tau_n}{M(M+\tau_1\Lambda^2)\ldots(M+\tau_n\Lambda^2)}$$
$$= \frac{1}{M} - \frac{d_1}{M+\tau_1\Lambda^2} - \ldots - \frac{d_n}{M+\tau_n\Lambda^2},$$

здесь

$$d_k = \frac{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}\tau_{k+1} \ldots \tau_n}{(\tau_k-\tau_1)\ldots(\tau_k-\tau_{k-1})(\tau_k-\tau_{k+1})\ldots(\tau_k-\tau_n)},$$

и в частности

$$\sum_k d_k = 1, \quad \sum_k \tau_k d_k = 0, \quad \sum_k \tau_k^{-1} = \sum_k \tau_k^{-1} d_k.$$

Это позволяет получить выражения для первых слагаемых разложений коэффициентов $L_{1,2,3}$ в окрестности нуля

$$L_1 = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2 t} - \sum_k d_k e^{-\Lambda_k^2 t})\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{x}\big(\mu \mathrm{K}_1(\mu x) - \sum_k d_k \Lambda_k \mathrm{K}_1(\Lambda_k x)\big)$$
$$= \frac{4}{x^2}(1 - \sum_k d_k) + \mu^2 \ln \mu^2 x^2 - \sum_k d_k \Lambda_k^2 \ln \Lambda_k^2 x^2 + o(1$$
$$= \mu^2 \ln \mu^2 - \sum_k d_k \Lambda_k^2 \ln \Lambda_k^2 + o(1) \overset{\Lambda\to\infty}{\simeq} -\mu^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2},$$

где

$$\Lambda_k^2 = \mu^2 + \tau_k \Lambda^2, \quad \sum_k d_k \Lambda_k^2 = \mu^2.$$

Мы видим, что пропадает не только коэффициент при x^{-2}, но также и коэффициент при $\ln x$, что обеспечивает корректность определения диаграмм типа "восьмерки". Далее запишем

$$L_2 = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2 t} - \sum_k d_k e^{-\Lambda_k^2 t})\frac{dt}{t} = 2\big(\mathrm{K}_0(\mu x) - \sum_k d_k \mathrm{K}_0(\Lambda_k x)\big)$$
$$= -\ln \mu^2 x^2 + \sum_k d_k \ln \Lambda_k^2 x^2 + o(1) = \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + o(1).$$

Эта формула позволяет сравнить коэффициент при a_1 с расходимостью в правой части преобразования (26) и, таким образом, проверить выполнение условия перенормировки (21). И, наконец, выпишем выражение для третьего коэффициента

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2 t} - \sum_k d_k e^{-\Lambda_k^2 t})dt \\
&= x\mu^{-1}\mathrm{K}_1(\mu x) - x\sum_k d_k \Lambda_k^{-1}\mathrm{K}_1(\Lambda_k x) \\
&= \mu^{-2} - \sum_k d_k(\mu^2 + \tau_k\Lambda^2)^{-1} + \frac{x^2}{4}(\ln\mu^2 - \sum_k d_k \ln\Lambda_k^2) + o(x^2).
\end{aligned}
$$

В процессе вычисления двух- и более петлевых вкладов на корни полинома $p(\tau)$ могут быть наложены также и дополнительные условия, но их обсуждение уже выходит за рамки настоящей работы.

§4. Заключение

На примере метода фонового поля для 4-мерной евклидовой теории поля Янга-Миллса мы рассмотрели трудности, которые возникают при регуляризации следа логарифма и петлевых слагаемых эффективного действия с помощью изменения квадратичной формы в континуальном интеграле или сужения области интегрирования. Была высказана гипотеза, что расходимости следа логарифма связаны с определенным выбором коэффициента при пропагаторе и, следовательно, могут быть компенсированы выбором меры интегрирования (которая не окаывает влияния на петлевые слагаемые). Для реализации конкретных вычислений в 4-мерной евклидовой теории поля Янга-Миллса была предложена схема регуляризации, основанная на модификации схемы метода высших ковариантных производных.

Литература

1. B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory, 3. Applications of the Covariant Theory.* — Phys. Rev. **162** (1967), 1195–1239.
2. L. F. Abbott, *The Background Field Method Beyond One Loop.* — Nucl. Phys. **185** (1981), 189.
3. L. D. Faddeev, *Separation of scattering and selfaction revisited.* arXiv:1003.4854 [hep-th].

4. L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang-Mills Theory: Comment on a Clay Millenium problem.* arXiv:0911.1013 [math-ph].
5. L. D. Faddeev, *Scenario for the renormalization in the 4D YangMills theory.* — Int. J. Mod. Phys. A **31**, No. 01 (2016), 1630001 [arXiv:1509.06186 [hep-th]].
6. I. Jack, H. Osborn, *Two Loop Background Field Calculations For Arbitrary Background Fields.* — Nucl. Phys. **207** (1982), 474.
7. П. Рамон, *Теория поля. Современный вводный курс.* — М., Мир (1984), 107.
8. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* — М., Наука (1988), 34.
9. А. А. Славнов *Инвариантная регуляризация калибровочных теорий.* — ТМФ **13** (1972), 174.
10. B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Spontaneously broken gauge symmetries ii. perturbation theory and renormalization* — Phys. Rev. D **5** (1972), 3137. [Erratum-ibid. D **8** (1973) 4654].
11. D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User's manual.* — Phys. Rept. **388** (2003), 279. [hep-th/0306138].
12. А. А. Славнов, *Регуляризация Паули-Вилларса для неабелевых калибровочных теорий.* — ТМФ **33** (1977), 210.
13. C. P. Martin, F. Ruiz Ruiz, *Higher covariant derivative Pauli-Villars regularization does not lead to a consistent QCD.* — Nucl. Phys. **436** (1995), 545. [hep-th/9410223].
14. T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited.* — Mod. Phys. Lett. **11** (1996), 1539 [hep-th/9601092].
15. W. Pauli and F. Villars, *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory* — Rev. Mod. Phys **21** (1949), 434–444.

Bolokhov T. A. Regularization of propagators with background field and their logarithms in 4-dimensions. We provide different attempts to regularize simultaneously background field dependent propagators and traces of their logarithms for quantum field models in 4-dimensional euclidian space-time. As was shown in the literature, infinities in the trace of the logarithm and in higher order loop diagramms are of different nature and require different approaches in regularization. We argue that the trace of the loagarithm itself is a finite (w.r.t regularization parameter) quantity. While the correspondent divergence in the effective action arises from the measure of the functional integral imposed by some Ward-like identities.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `timur@pdmi.ras.ru`

Поступило 20 ноября 2017 г.