Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 465, 2017 г.

Т. А. Болохов

ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ ПОЛЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ

Введение

Квадратичные формы, определяемые выражением

$$Q^N = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big\{ \sum_{n,k} \frac{1}{|x-x^n|^2} \Big| \frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^n| f(x) \Big|^2 - (N-1) \sum_{k=1}^{3} \Big| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \Big|^2 \Big\} d^3x, \quad (1)$$

где $\{x^n\}$ – это N точек пространства $\mathbb{R}^3$ общего положения, могут рассматриваться как расширения квадратичной формы оператора Лапласа

$$Q^{\mathrm{L}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^{3} \Big| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \Big|^2 d^3x. \quad (2)$$

Такие расширения, как и сама форма Q^{L}, обладают свойством однородности или ковариантности по отношению к дилатации

$$x \to \chi x, \quad x^n \to \chi x,$$

а именно,

$$Q^N(\{\chi x^n\}, f(\chi x)) = \chi^{-2} Q^N(f(x)). \quad (3)$$

В физических приложениях квадратичная форма оператора Лапласа обычно возникает как функционал потенциальной энергии бозонного поля. Форма Q^N, таким образом, может быть проинтерпретирована как частный случай функционала энергии поля $f(x)$, взаимодействующего с N точечными источниками (математические основы описания таких взаимодействий были заложены в [1]). Квадратичные формы, соответствующие общему случаю взаимодействия с точечными

Ключевые слова: квадратичная форма, оператор Лапласа, точечный потенциал, самосопряженные расширения симметрических операторов.

Работа написана при поддержке грантов РФФИ 15-01-03148 и РФФИ 17-01-00283.

источниками, имеют добавочные слагаемые с размерными коэффициентами, зависящие от значений поля в точках x^n, и для них не выполняется условие (3). Поэтому квадратичные формы, лишенные добавок размерности, отличной от $[x]^{-2}$, представляют отдельный интерес для теории поля как однородные выражения.

В настоящей работе проводится исследование свойств симметрии множества квадратичных форм, описываемых выражением (1), для взаимодействия с двумя источниками ($N = 2$). Будет показано, что соответствующее множество нетривиальных расширений состоит из отдельной точки и множества, эквивалентного сфере $\mathbb{S}^2$ (комплексному проективному пространству $\mathbf{CP}^1$).

§1. Граничные условия и симметрический оператор

Покажем, что на множестве функций, регулярных в точках $\{x^n\}$, квадратичная форма Q^N совпадает с квадратичной формой оператора Лапласа Q^{L}. Пусть Ω^N_ρ – объединение сфер с диаметрами ρ и центрами в точках x^n, а σ^n_ρ – поверхности этих сфер. Интеграл (1) по пространству $\mathbb{R}^3$ является пределом интегралов по множествам $\widetilde{\Omega}^N_\rho = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^N_\rho$ при $\rho \to 0$. В каждом таком интеграле раскроем действие производной, сгруппируем младшие степени в полную производную и проинтегрируем по частям:

$$
\begin{aligned}
Q^N = \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\widetilde{\Omega}^N_\rho} \Big\{ \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| \overline{f(x)} \Big) \frac{1}{|x - x^n|^2} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) \Big) \\
- (N-1) \Big| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \Big|^2 \Big\}\, d^3x \\
= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\widetilde{\Omega}^N_\rho} \Big\{ \Big| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|^2 + \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|^2} \frac{\partial}{\partial x_k} |f(x)|^2 + \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|^2} \Big) \Big\}\, d^3x \qquad (4) \\
= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\widetilde{\Omega}^N_\rho} \Big\{ \Big| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|^2} |f(x)|^2 \Big) \Big\}\, d^3x \\
= \lim_{\rho\to 0} \Big\{ \int\limits_{\widetilde{\Omega}^N_\rho} \Big| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|^2 d^3x - \sum_{n,m=1}^{N} \int\limits_{\sigma^m_\rho} (x - x^n)_k \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|^2}\, d^2\sigma^m_k \Big\},
\end{aligned}
$$

здесь мы опустили суммирование по повторяющимся трехмерным индексам k и воспользовались соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n| = \frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^2} = \frac{1}{|x-x^n|^2} \tag{5}$$

В последней сумме по n, m главный вклад вносят "диагональные" слагаемые, в которых неограниченные множители (5) интегрируются по поверхностям сфер σ_ρ^n с центрами в точках x^n. В этом случае векторы с компонентами, пропорциональными $(x-x^n)_k$, параллельны векторам $d\sigma_k^n$, нормальным в точке x к поверхностям σ_ρ^n, и "диагональные" слагаемые переписываются в виде интегралов по поверхности от скалярной функции

$$\sum_n \int\limits_{\sigma_\rho^m} (x-x^n)_k \frac{|f(x)|^2}{|x-x^n|^2}\, d^2\sigma_k^n = \sum_n \int\limits_{\sigma_\rho^n} \frac{|f(x)|^2}{|x-x^n|}\, d^2\sigma$$

Для функции $f(x)$, регулярной в точках x^n, эти интегралы, а также интегралы в "недиагональных" слагаемых стремятся к нулю при $\rho \to 0$, и в результате для Q^N получается выражение (2).

Пусть теперь функция $f(x)$ является два раза дифференцируемой функцией с особенностями в точках x^n. Для того, чтобы получить выражение для оператора, соответветствующего квадратичной форме Q^N, проинтегрируем выражение из первой строки (4) по частям

$$\begin{aligned} Q^N &= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\widetilde\Omega_\rho^N} \Big\{ \sum_{n=1}^N \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n|\overline{f(x)}\Big) \frac{1}{|x-x^n|^2} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n| f(x)\Big) \\ &\quad - (N-1)\Big|\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\Big|^2 \Big\}\, d^3x \\ &= -\lim_{\rho\to 0} \Big\{ \int\limits_{\widetilde\Omega_\rho^N} \Big(\sum_{n=1}^N \overline{f(x)} |x-x^n| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-x^n|^2} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n| f(x)\Big) \\ &\quad - (N-1)\overline{f(x)} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x)\Big)\, d^3x - \sum_{m=1}^N \int\limits_{\sigma_\rho^m} \Big(\frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|} \frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n| f(x) \\ &\quad + \sum_{n\neq m} \frac{\overline{f(x)}}{|x-x^n|} \frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^n| f(x) - (N-1)\overline{f(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\Big)\, d^2\sigma_k^m \Big\} \end{aligned}$$

$$= -\lim_{\rho\to 0}\Big\{\int\limits_{\widetilde{\Omega}_\rho^N}\Big(\overline{f(x)}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}f(x)+\sum_{n=1}^{N}\overline{f(x)}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^3}\big)f(x)\Big)\,d^3x \quad (6)$$

$$-\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{\sigma_\rho^m}\frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|}\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^m|f(x)\,d^2\sigma_k^m \quad (7)$$

$$-\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{\sigma_\rho^m}\sum_{n\neq m}|f(x)|^2\frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^2}\,d^2\sigma_k^m\Big\}. \quad (8)$$

В получившейся сумме первое слагаемое в строке (6) – это квадратичная форма лапласиана

$$\Delta = -\sum_k\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \quad (9)$$

Второе слагаемое исчезает вне окрестностей точек x^n

$$\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^3}=0,\quad |x-x^n|>\rho,$$

но формально является суммой δ-функций и обычно добавляется к выражению для расширения симметрического оператора Δ, которое мы пока будем обозначать как Δ^N. Строка (7) является граничным условием. В оставшейся сумме (8) вектор $x-x^n$ можно заменить на вектор x^m-x^n с поправкой, пропорциональной ρ, и написать для интеграла по сфере σ_ρ^m следующую оценку

$$\int\limits_{\sigma_\rho^m}\frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^2}\,d^2\sigma_k^m=\int\limits_{\sigma_\rho^m}\frac{(x^m-x^n)_k}{|x^m-x^n|^2}(1+\mathcal{O}(\rho))\,d^2\sigma_k^m=\mathcal{O}(\rho^3).$$

Если функция $|f(x)|$ ведет себя в окрестности точки x^m как $\mathcal{O}(|x-x^m|^{-2})$, то, с учетом написанной выше оценки для интеграла, можно сделать вывод, что каждое слагаемое в строке (8), равно как и вся сумма, исчезает при $\rho\to 0$. Таким образом, квадратичная форма Q^N преобразуется к следующему виду

$$Q^N=(f,\Delta^N f)-\lim_{\rho\to 0}\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{\sigma_\rho^m}\frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|}\frac{\partial}{\partial x_k}|x-x^m|f(x)\,d^2\sigma_k^m,$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение для функций на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Преобразование (6)–(8), примененное к двум элементам f и g из некоторого множества функций с особенностями в точках x^n, показывает, что для того, чтобы оператор Δ^N был симметрическим

$$(f, \Delta^N g) = (\Delta^N f, g)$$

необходимо, чтобы для любых двух функций из этого множества выполнялись граничные условия

$$\lim_{\rho\to 0} \sum_m \int\limits_{\sigma_\rho^m} \Big\{ \frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^m| g(x) \Big) - \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^m| \overline{f(x)} \Big) \frac{g(x)}{|x-x^m|} \Big\} d^2\sigma_k^m = 0. \quad (10)$$

А для того, чтобы было выполнено равенство

$$Q^N(f) = (f, \Delta^N f),$$

необходимо, чтобы была равна нулю каждая из двух сумм в (10)

$$\lim_{\rho\to 0} \sum_m \int\limits_{\sigma_\rho^m} \frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^m| g(x) \Big) d^2\sigma_k^m = 0. \quad (11)$$

Таким образом, далее мы будем изучать самосопряженные расширения симметрического оператора, задаваемого выражением (9), удовлетворяющие граничным условиям (11).

§2. Самосопряженные расширения и граничные условия

В данной работе мы ограничимся рассмотрением квадратичной формы Q^N, соответствующей взаимодействию с двумя источниками, то есть случаем $N = 2$. Пусть Δ – симметрический оператор, заданный выражением (9) на множестве два раза дифференцируемых функций, исчезающих вместе с производными в точках x^1 и x^2

$$\mathcal{W}_0 = \Big\{ f : (f,f) < \infty,\, (\Delta f, \Delta f) < \infty;\, f(x) \to 0,\, \frac{\partial f}{\partial x_k} \to 0,\, x \to x^{1,2} \Big\}.$$

Такой оператор имеет индексы дефекта $(2,2)$. Действительно, если обозначить $\jmath = e^{i\pi/4}$, то оказывается, что пары векторов

$$C^1_+ = \frac{e^{i\jmath\rho|x-x^1|}}{|x-x^1|}, \quad C^2_+ = \frac{e^{i\jmath\rho|x-x^2|}}{|x-x^2|} \tag{12}$$

и

$$C^1_- = \frac{e^{-\jmath\rho|x-x^1|}}{|x-x^1|}, \quad C^2_- = \frac{e^{-\jmath\rho|x-x^2|}}{|x-x^2|}, \tag{13}$$

интегрируемы с квадратом по пространству $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяют уравнениям

$$(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \mp i\rho^2)C^{1,2}_\pm(x) = 0. \tag{14}$$

Отсюда следует, что для любого вектора f из множества $\mathcal{W}_0$ выполнены равенства

$$(C^{1,2}_\pm, (\Delta \pm i\rho^2)f) = 0,$$

то есть векторы $C^{1,2}_\pm$ принадлежат ядрам операторов, сопряженных к $\Delta \pm i\rho^2$. Векторы $C^1_\pm$ и $C^2_\pm$ при одинаковых знаках в индексе, очевидно, линейно-независимы, несложные вычисления с помощью преобразования Фурье показывают, что их скалярные произведения выглядят следующим образом

$$(C^1_\pm, C^1_\pm) = (C^2_\pm, C^2_\pm) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}, \tag{15}$$

$$(C^1_+, C^2_+) = (C^1_-, C^2_-) = 4\pi\frac{e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|} - e^{-\jmath\rho|x^1-x^2|}}{2i\rho^2|x^1-x^2|}. \tag{16}$$

Можно заметить, что в числителе правой части (15) стоит разность сопряженных величин, так как $\overline{i\jmath} = \overline{ie^{i\pi/4}} = -e^{i\pi/4} = -\jmath$. Следовательно, скалярное произведение (16) является вещественным числом, и общую нормировку базиса $C^1_\pm$, $C^2_\pm$ можно задать с помощью следующей вещественной симметричной матрицы

$$(C^a_\pm, C^b_\pm) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}\mathcal{A}_{ab}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}i}(\xi-\bar\xi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}i}(\xi-\bar\xi) & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\xi = \frac{e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}, \quad \bar\xi = \frac{e^{-\jmath\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}.$$

Самосопряженные расширения оператора Δ, заданного на пространстве $\mathcal{W}_0$ с дефектными векторами $C^{1,2}_\pm$, описываются с помощью 2×2

матриц V, которые задают унитарные отображение векторов $C_-^{1,2}$ в линейную оболочку векторов $C_+^{1,2}$

$$V: \quad C_-^a \to VC_-^a = v_{ba}C_+^b$$

(здесь и далее мы будем опускать суммирование по повторяющимся индексам). Унитарность отображения V (сохранение скалярного произведения) при этом выражается в следующих соотношениях

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}\mathcal{A}_{ab} &= (C_-^a, C_-^b) = (VC_-^a, VC_-^b) \\ &= (v_{ca}C_+^c, v_{db}C_+^d) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}\bar{v}_{ca}\mathcal{A}_{cd}v_{db} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}(V^*\mathcal{A}V)_{ab}. \quad (17)\end{aligned}$$

В этом месте важно, что $\mathcal{A}$ – это вещественная матрица, и что скалярные произведения для пар векторов $\{C_+^{1,2}\}$ и $\{C_-^{1,2}\}$ совпадают.

Области определения рассматриваемых расширений Δ_V могут быть описаны как линейные пространства следующего вида

$$\mathcal{W}_V = \mathcal{W}_0 + \sum_a \{C_-^a - v_{ba}C_+^b\} \quad (18)$$

(см., например, [2]). Далее мы убедимся, что для элементов таких пространств условие симметричности (10) выполняется автоматически, однако, более жесткое требование (11) накладывает ограничение на матрицу V. Вид этого ограничения нам и предстоит определить.

Пусть функции f и g принадлежат области определения $\mathcal{W}_V$, запишем первые слагаемые их разложений в окрестностях точек x^1 и x^2

$$f(x) \overset{x\sim x^1}{\simeq} \frac{f_{-1}^1}{|x-x^1|} + f_0^1, \quad f(x) \overset{x\sim x^2}{\simeq} \frac{f_{-1}^2}{|x-x^2|} + f_0^2, \quad (19)$$

$$g(x) \overset{x\sim x^1}{\simeq} \frac{g_{-1}^1}{|x-x^1|} + g_0^1, \quad g(x) \overset{x\sim x^2}{\simeq} \frac{g_{-1}^2}{|x-x^2|} + g_0^2 \quad (20)$$

и подставим в граничное условие (11). В результате получаются следующее тривиальное соотношения для коэффициентов f_{-1}, f_0, g_{-1}, g_0

$$\overline{f_{-1}^1}g_0^1 + \overline{f_{-1}^2}g_0^2 = 0. \quad (21)$$

Теперь запишем разложения в окрестностях точек x^1 и x^2 для функций $C_\pm^{1,2}(x)$

$$C_+^1(x) \overset{x\sim x^1}{\simeq} \frac{1}{|x-x^1|} + i\jmath\rho, \quad C_+^1 \overset{x\sim x^2}{\simeq} \rho\xi, \tag{22}$$

$$C_-^1(x) \overset{x\sim x^1}{\simeq} \frac{1}{|x-x^1|} - \jmath\rho, \quad C_-^1 \overset{x\sim x^2}{\simeq} \rho\bar{\xi}, \tag{23}$$

$$C_+^2(x) \overset{x\sim x^2}{\simeq} \frac{1}{|x-x^2|} + i\jmath\rho, \quad C_+^2 \overset{x\sim x^1}{\simeq} \rho\xi, \tag{24}$$

$$C_-^2(x) \overset{x\sim x^2}{\simeq} \frac{1}{|x-x^2|} - \jmath\rho, \quad C_-^2 \overset{x\sim x^1}{\simeq} \rho\bar{\xi}. \tag{25}$$

Базисные комбинации $C_-^a - v_{ba}C_+^b$ линейной оболочки (18) имеют следующие разложения

$$\begin{aligned}
C_-^1 - v_{b1}C_+^b &\overset{x\sim x^1}{\simeq} \frac{1-v_{11}}{|x-x^1|} - \jmath\rho - \rho\xi v_{21} - i\jmath\rho v_{11},\\
C_-^1 - v_{b1}C_+^b &\overset{x\sim x^2}{\simeq} \rho\bar{\xi} - (\frac{1}{|x-x^2|} + i\jmath\rho)v_{21} - \rho\xi v_{11},\\
C_-^2 - v_{b2}C_+^b &\overset{x\sim x^1}{\simeq} \rho\bar{\xi} - (\frac{1}{|x-x^1|} + i\jmath\rho)v_{12} - \rho\xi v_{22},\\
C_-^2 - v_{b2}C_+^b &\overset{x\sim x^2}{\simeq} \frac{1-v_{22}}{|x-x^2|} - \jmath\rho - \rho\xi v_{12} - i\jmath\rho v_{22}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (21) в различных сочетаниях индекса 1 и 2 в левой части, получим систему уравнений, которые могут быть записаны в следующем матричном виде

$$\rho(I-V^*)(\jmath I + \Xi V - \bar{\Xi} + i\jmath V) = 0, \quad \Xi = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Условие (21) является "половиной" условия симметричности оператора Δ_V на пространстве (18)

$$\overline{f_{-1}^1}g_0^1 + \overline{f_{-1}^2}g_0^2 - \overline{f_0^1}g_{-1}^1 - \overline{f_0^2}g_{-1}^2 = 0, \tag{27}$$

которое следует из (10). Проверим, что последнее условие автоматически выполняется для базисных комбинаций $C_-^a - v_{ba}C_+^b$ из пространства $\mathcal{W}_V$. Для этого возьмем левую часть уравнения (26) и вычтем из нее сопряженную величину, отвечающую последним двум слагаемыми в (27)

$$(I - V^*)(\jmath I + \Xi V - \bar{\Xi} + i\jmath V) - (-i\jmath I + V^*\bar{\Xi} - \Xi - \jmath V^*)(I - V) \tag{28}$$

$$= (\jmath + i\jmath)(I - V^*V) + V^*(\Xi - \bar{\Xi})V + \Xi - \bar{\Xi} \tag{29}$$

$$= \sqrt{2}i\big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi}) - V^*(1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi}))V\big) = 0. \tag{30}$$

Последнее равенство следует из (17), если учесть что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi}) = \mathcal{A}.$$

Равенство (30) замечательно тем, что оно позволяет вычислить скалярное произведение (16), то есть интеграл по трехмерному пространству от произведений двух решений уравнения (14), зная их вид, нормировку (15) и асимптотики в особых точках (22)–(25).

§3. Уравнение для матрицы, задающей самосопряженное расширение

Вернемся к решениям уравнения (26). Преобразуем его следующим образом

$$0 = (I - V^*)((I - \jmath\bar{\Xi})V - i(I + i\jmath\Xi)) = (I - V^*)(i\jmath I + \Xi)(V - \frac{-\jmath + \bar{\Xi}}{i\jmath + \Xi}). \tag{31}$$

Матрицу V с условием (17) довольно сложно параметризовать, поэтому попробуем выразить ее через унитарный объект. С помощью ортогональной замены базиса

$$\begin{pmatrix} C^1_\pm \\ C^2_\pm \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} D^1_\pm \\ D^2_\pm \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C^1_\pm + C^2_\pm \\ C^2_\pm - C^1_\pm \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} C^1_\pm \\ C^2_\pm \end{pmatrix}, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

приходим к соотношениям

$$(D^a_\pm, D^b_\pm) = (\Phi_{ac}C^c_\pm, \Phi_{bd}C^d_\pm) = \Phi_{ac}\mathcal{A}_{cd}\Phi_{bd} = (\Phi\mathcal{A}\Phi^T)_{ab} = \widetilde{\mathcal{A}}_{ab},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \Phi\mathcal{A}\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i} \end{pmatrix}.$$

Эта замена также диагонализует матрицу Ξ

$$\Xi \to \widetilde{\Xi} = \Phi\Xi\Phi^T = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

и преобразует V в матрицу, сохраняющую диагональное произведение $\widetilde{\mathcal{A}}$

$$V \to \widetilde{V} = \Phi V \Phi^T, \quad \widetilde{V}^* \widetilde{\mathcal{A}} \widetilde{V} = \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Параметризуем матрицу $\widetilde{V}$ следующим образом

$$\widetilde{V} = \widetilde{A}^{-1/2} U \widetilde{A}^{1/2}.$$

Тогда для матрицы U будет выполняться соотношение унитарности

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{V}^* \widetilde{\mathcal{A}} \widetilde{V} = \widetilde{A}^{1/2} U^* U \widetilde{A}^{1/2}, \quad U^* U = I$$

и уравнение (31) перепишется как

$$\begin{aligned}
0 &= (I - V^*)(i\jmath I + \Xi)(V^T - \frac{-\jmath I + \bar{\Xi}}{i\jmath I + \Xi}) \\
&= \Phi^T \widetilde{\mathcal{A}}^{1/2} (I - U^*) \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} (i\jmath I + \widetilde{\Xi}) \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \big(U - \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}}\big) \widetilde{\mathcal{A}}^{1/2} \Phi,
\end{aligned}$$

здесь мы воспользовались коммутативностью диагональных матриц $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\Xi}$. Таким образом, уравнение (26) сводится к уравнению

$$(I - U^*) \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} (i\jmath I + \widetilde{\Xi}) \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \big(U - \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}}\big) = 0 \tag{32}$$

для унитарной матрицы U. Это уравнение имеет два очевидных решения

$$U_1 = I \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\xi} - \jmath}{\xi + i\jmath} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\xi} + \jmath}{\xi - i\jmath} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

1. Первое решение соответствует максимальному расширению симметрического оператора Δ по теореме Фридрихса-Стоуна [3, 4]. Ему отвечает самосопряженный оператор Δ_1, заданный на множестве два раза дифференцируемых функций без особенностей в точках x^1 и x^2. Квадратичная форма этого оператора задается выражением (2), а ядро резольвенты не зависит от точек x^1 и x^2

$$R_1(x, y; \lambda) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (\Delta_1 - \lambda) R_1(x, y; \lambda) = \delta^3(x - y),$$

где разрез у корня из спектрального параметра выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\bar{\lambda}} = \overline{\sqrt{\lambda}}.$$

2. Второе решение определяет оператор Δ_2, заданный на подпространстве

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_0 + \{D^1_- - \frac{\bar{\xi} - \jmath}{\xi + i\jmath} D^1_+\} + \{D^2_- - \frac{\bar{\xi} - \jmath}{\xi + i\jmath} D^2_+\}.$$

Резольвента такого оператора может быть построена с помощью формулы Крейна [5] следующим образом. Пусть

$$D^1_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^1_+ + C^2_+)|_{\rho=-i\jmath\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^1|}}{\sqrt{2}|x-x^1|} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^2|}}{\sqrt{2}|x-x^2|}, \tag{34}$$

$$D^2_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^2_+ - C^2_+)|_{\rho=-i\jmath\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^2|}}{\sqrt{2}|x-x^2|} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^1|}}{\sqrt{2}|x-x^1|} \tag{35}$$

– это базис регулярных аналитических векторов в интерпретации [6]. Тогда ядро резольвенты оператора Δ_2, построенного по матрице U_2, определяется следующей формулой

$$R_2(x, y; \lambda) = R_1(x, y; \lambda) + \beta_{ab}(\lambda) D^a_\lambda(x) \overline{D^b_{\bar{\lambda}}(y)}, \tag{36}$$

где диагональная матрица $\beta_{ab}(\lambda)$ выражается из соотношения

$$\beta^{-1}_{ab}(\lambda) = \beta^{-1}_{ab}(i\rho^2) - (\lambda - i\rho^2)(D^a_{\bar{\lambda}}, D^b_{i\rho^2}),$$

$$(D^1_{\bar{\lambda}}, D^1_{i\rho^2}) = \frac{4\pi}{\lambda - i\rho^2}\Big(i\sqrt{\lambda} - i\jmath\rho + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|}\Big), \tag{37}$$

$$(D^2_{\bar{\lambda}}, D^2_{i\rho^2}) = \frac{4\pi}{\lambda - i\rho^2}\Big(i\sqrt{\lambda} - i\jmath\rho - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|}\Big), \tag{38}$$

$$(D^1_{\bar{\lambda}}, D^2_{i\rho^2}) = (D^2_{\bar{\lambda}}, D^1_{i\rho^2}) = 0. \tag{39}$$

Матрица $\beta_{ab}(i\rho^2)$, в свою очередь, может быть найдена из определения преобразования Кэли через оператор $\widetilde{V}_2 = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} U_2 \widetilde{\mathcal{A}}^{1/2}$

$$R_2(x, y; i\rho^2) - R_1(x, y; i\rho^2) = \frac{\widetilde{V}_2 - I}{2i\rho^2} = \beta_{ab}(i\rho^2) D^a_{i\rho^2}(x) D^b_{-i\rho^2}(y).$$

Отсюда, учитывая, что $\widetilde{V}_2 = U_2$, следует, что

$$\beta(i\rho^2) = \frac{U_2 - I}{4\pi\sqrt{2}i\rho\widetilde{\mathcal{A}}} = \frac{1}{4\pi\rho}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\xi + i\jmath} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi - i\jmath} \end{pmatrix},$$

и далее получаем выражение для матрицы, обратной к $\beta_{ab}(\lambda)$

$$\beta^{-1}(\lambda) = 4\pi \begin{pmatrix} -i\sqrt{\lambda} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\lambda} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} \end{pmatrix}.$$

3. Третий тип решений уравнения (32) может быть построен следующим образом. Унитарная матрица общего вида U_3 имеет два ортогональных собственных вектора

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ -\bar{z} \end{pmatrix}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

которым отвечают два собственных значения, лежащих на единичной окружности. Пусть второе собственное значение равно 1, а первое подберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\det\Big(U_3 - \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}}\Big) = 0. \tag{40}$$

Из равенства нулю этого определителя следует, что существует вектор χ, такой, что

$$\Big(U_3 - \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}}\Big)\chi = 0.$$

Так как $U_3\phi_2 = \phi_2$, то очевидно, что вектор χ не совпадает (не пропорционален) с вектором ϕ_2, а значит пара $\{\phi_2, \chi\}$ образует базис в пространстве $\mathbb{C}^2$. Для того, чтобы матрица

$$\Omega = (I - U_3^*)\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}(i\jmath I + \widetilde{\Xi})\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\Big(U_3 - \frac{-\jmath I + \bar{\widetilde{\Xi}}}{i\jmath I + \widetilde{\Xi}}\Big),$$

стоящая в левой части уравнения (32), равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю значения ее полуторалинейной формы на всех комбинациях базисных векторов ϕ_2 и χ. Так как для вектора ϕ_2 выполняется равенство $U_3\phi_2 = \phi_2$, то

$$(\phi_2, \Omega\phi_2) = 0, \quad (\phi_2, \Omega\chi) = 0.$$

Из определения χ следует, что

$$(\chi, \Omega\chi) = 0, \quad (\phi_2, \Omega\chi) = 0.$$

Равенство для четвертой комбинации базисных векторов следует из самосопряженности матрицы Ω

$$(\chi, \Omega\phi_2) = \overline{(\phi_2, \Omega^*\chi)} = \overline{(\phi_2, \Omega\chi)} = 0,$$

которая, в свою очередь, следует либо из равенства (28)–(30), либо может быть проверена непосредственным вычислением.

Таким образом, поиск решений уравнения (32) третьего вида сводится к поиску унитарных матриц, одно из собственных значений которых равно 1, и которые удовлетворяют условию (40). Пусть u – собственное значение такой матрицы, отвечающее собственному вектору ϕ_1. Тогда матрица U может быть представлена в следующем виде

$$U_3 = u\phi_1 \cdot \phi_1^* + \phi_2 \cdot \bar{\phi}_2^* = \begin{pmatrix} |w|^2 + u|z|^2 & (u-1)z\bar{w} \\ (u-1)w\bar{z} & u|w|^2 + |z|^2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

У этой матрицы нам важна только диагональ, все остальные элементы группируются в определитель U_3, равный u

$$\det\bigl(U_3 - \frac{-\jmath I + \bar{\tilde{\Xi}}}{i\jmath I + \bar{\tilde{\Xi}}}\bigr) = \begin{vmatrix} |w|^2 + u|z|^2 - \frac{\bar{\xi}-\jmath}{\xi+i\jmath} & (u-1)z\bar{w} \\ (u-1)w\bar{z} & u|w|^2 + |z|^2 - \frac{\bar{\xi}+\jmath}{\xi-i\jmath} \end{vmatrix}$$
$$= u - (|w|^2 + u|z|^2)\frac{\bar{\xi}+\jmath}{\xi - i\jmath} - (u|w|^2 + |z|^2)\frac{\bar{\xi}-\jmath}{\xi+i\jmath} + \frac{\bar{\xi}-\jmath}{\xi+i\jmath}\frac{\bar{\xi}+\jmath}{\xi-i\jmath} = 0.$$

Это уравнение можно решить относительно u, получится

$$u = -\frac{\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\xi - i + 1 + \jmath(\xi + i\bar{\xi})(|z|^2 - |w|^2)}{\xi^2 - \bar{\xi}\xi + i + 1 - \jmath(\xi + i\bar{\xi})(|z|^2 - |w|^2)}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1. \tag{42}$$

Здесь в правой части стоит отношение двух взаимносопряженных комплексных чисел, следовательно полученное решение u лежит на единичной окружности, то есть является собственным значением унитарной матрицы. При этом разным значениям величины $|z|^2 - |w|^2$, которая параметризует вектор ϕ_1 и может изменяться в пределах от -1 до 1, отвечают разные собственные значения u. И ни при каких значениях величины $|z|^2 - |w|^2$ собственное значение u не становится равным 1.

Таким образом, мы видим, что для каждой пары чисел z и w, таких, что $|z|^2 + |w|^2 = 1$, можно построить решение уравнения (32). А значит, множество решений уравнения (32) третьего вида совпадает с множеством ортогональных проекторов ранга 1 в пространстве $\mathbb{C}^2$, то есть со сферой Римана или с проективным пространством $\mathbf{CP}^1$.

Резольвента оператора, соответствующего решению U_3, строится по формуле, аналогичной (36). Однако, теперь, из-за наличия у U_3 собсвенного значения равного 1, ранг матрицы $\beta_{ab}(i\rho^2)$ равен 1, а не

2

$$\beta(i\rho^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi i\rho}(V_3 - I)\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi i\rho}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}(V_3 - I)\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2} = \frac{u}{4\sqrt{2}\pi i\rho}(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)\cdot(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)^*,$$

и матрицы, обратной к $\beta_{ab}(i\rho^2)$ не существует. Матрицу $\beta_{ab}(\lambda)$ из формулы (36) необходимо искать из уравнения

$$\beta_{ab}(\lambda) = \beta_{ab}(i\rho^2) + (\lambda - i\rho^2)\beta_{ac}(\lambda)(D^c_{\bar\lambda}, D^d_{i\rho^2})\beta_{db}(i\rho^2),$$

где аналитические векторы и скалярное произведение $(D^c_{\bar\lambda}, D^d_{i\rho^2})$ по-прежнему не зависят от параметра U_3 и определяются формулами (34)–(35), (37)–(39). Представим матрицу $\beta_{ab}(\lambda)$ в следующем виде

$$\beta_{ab}(\lambda) = \kappa(\lambda)(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_a\overline{(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_b},$$

тогда для коэффициента $\kappa(\lambda)$ получается линейное уравнение

$$\kappa(\lambda) = \frac{u}{4\sqrt{2}\pi i\rho}\Big(1 + (\lambda - i\rho^2)\kappa(\lambda)\overline{(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_c}(D^c_{\bar\lambda}, D^d_{i\rho^2})(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_d\Big),$$

из которого можно найти величину, обратную к $\kappa(\lambda)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa(\lambda)} &= \frac{4\sqrt{2}\pi i\rho}{u} - (\lambda - i\rho^2)\overline{(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_c}(D^c_{\bar\lambda}, D^d_{i\rho^2})(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_d \\ &= 4\sqrt{2}\pi i\rho\Big(\frac{1}{u} - \frac{|z|^2}{\sqrt{2}i + \xi - \bar\xi}\big(i\frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} - i\jmath + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}\big) \\ &\qquad - \frac{|w|^2}{\sqrt{2}i + \bar\xi - \xi}\big(i\frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} - i\jmath - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{i\jmath\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}\big)\Big).\end{aligned}$$

Ядро резольвенты R_3 при этом выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}R_3(x,y;\lambda) &= R_1(x,y;\lambda) + \kappa(\lambda)(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_a\overline{(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_b}D^a_\lambda(x)\overline{D^b_{\bar\lambda}(y)} \\ &= R_1(x,y;\lambda) + \kappa(\lambda)\Big(\frac{zD^1_\lambda(x)}{(1-\frac{\xi-\bar\xi}{\sqrt{2}i})^{\frac12}} + \frac{wD^2_\lambda(x)}{(1-\frac{\xi-\bar\xi}{\sqrt{2}i})^{\frac12}}\Big) \\ &\qquad\times\Big(\frac{\overline{zD^1_{\bar\lambda}(y)}}{(1-\frac{\xi-\bar\xi}{\sqrt{2}i})^{\frac12}} + \frac{\overline{wD^2_{\bar\lambda}(y)}}{(1-\frac{\xi-\bar\xi}{\sqrt{2}i})^{\frac12}}\Big).\end{aligned}$$

§4. Заключение

Мы рассмотрели множество замкнутых расширений квадратичной формы оператора Лапласа в трехмерном пространстве, порожденных взаимодействием с двухточечным сингулярным потенциалом и удовлетворяющих свойствам однородности (ковариантнтости по отношению к дилатации). Помимо тривиального, расширения, удовлетворяющие перечисленным свойствам разбиваются на два типа: первый содержит единственное расширение, определяемое унитарным оператором (33), в то время как расширения второго типа параметризуются точкой на сфере Римана и определяются унитарным оператором (41) с нетривиальным собстенным значением (42). Для указанных расширений были получены выражения для ядер резольвент соответствующих самосопряженных операторов.

Литература

1. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом.* — Доклады АН СССР, **137**, вып. 5 (1961), 1011–1014.
2. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators.* Cambridge University Press, 2000.
3. K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren.* — Math. Ann. **109**, 1934, 465–487.
M. Stone, in: *Linear Transformations in Hilbert spaces and their Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, 1932; также см. теорему X.23 в [4].
4. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность.* М. Мир, 1978.
5. M. G. Krein, *The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications.* — Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **20** (62) (1947), 431–495; Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **21** (64) (1947), 365–404.
6. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве.* М. Наука, 1966.

Bolokhov T. A. Homogeneous extensions of the quadratic form of Laplace operator for the field interacting with two point-like particles.

We consider the set of the closed homogeneous extensions of the quadratic form of Laplace operator, generated by interaction with two point-like sources. We show that this set consists of the trivial (maximal) extension, one point and the subset equivalent to the Riemann sphere.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 29 ноября 2017 г.