Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

Л. Э. Шабанов

ТУРАНОВСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ В ТОНКОЙ СЛОЙКЕ

§1. Введение

Классическую теорему Турана [10] можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Минимальное количество ребер в графе на n вершинах с числом независимости α достигается на графе, состоящем из дизъюнктного объединения α полных графов, чьи размеры отличаются не более, чем на* 1.

Один из важнейших классов графов, возникающих в комбинаторной геометрии, это *дистанционные графы* $\Gamma = (V, E)$ в метрическом пространстве (F, ρ), где

$$V \subset F, \quad E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\}.$$

С одной стороны, дистанционные графы естественным образом связаны с проблемой Нельсона–Хадвигера о хроматическом числе пространства (см. определение в [8]) и их числа независимости активно изучаются (см. [1, 4, 5]). С другой стороны, многие вопросы, касающиеся количества ребер в дистанционных графах, восходят к работам Эрдёша (см. [1–4, 6, 9, 11, 13–18]).

В предыдущей работе [7] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При $\lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{7}\right]$ минимальное количество ребер в дистанционном графе в $\mathbb{R}^2$ на n вершинах и с числом независимости $\alpha \leqslant \lambda n$ ограничено снизу величиной $\frac{19-50\lambda}{3} n$.*

Результат теоремы 2 гораздо сильнее результата теоремы 1. Например, при $\lambda = \frac{1}{4}$ получается, что ребер не меньше, чем $\frac{13}{6} n$, в то время как оценка в теореме 1 имеет величину $1.5n$. При $\lambda = \frac{2}{7}$ теорема 1 дает оценку $\frac{9}{7} n$, а по теореме 2 получается $\frac{11}{7} n$, причем при n, кратном 7, эта оценка точна и достигается на дизъюнктном объединении $\frac{n}{7}$ экземпляров так называемого веретена Мозера (рис. 1).

Ключевые слова: дистанционный граф, число независимости, Турановские оценки.

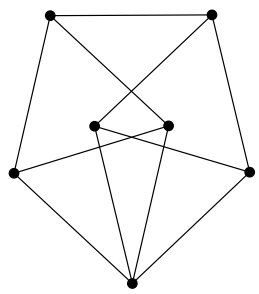

Рис. 1. Веретено Мозера.

Отметим, что с помощью веретена Мозера доказывается классическая оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$ (см. [8]). Кроме того, известно, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, и это лучшие на сегодняшний день оценки. В настоящей работе мы исследуем дистанционные графы в так называемой слойке над двумерным пространством ($(2, n, \varepsilon)$-слойке).

Определение 1. Назовем (n, k, ε)-*слойкой* множество точек $(x_1, \ldots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k}$, для которых координаты $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ по модулю не превосходят ε.

Данный тип метрических пространств на первый взгляд не сильно отличается от $\mathbb{R}^n$, однако оценки хроматического числа, представленные в работе [12], сильнее уже для $(2, 1, \varepsilon)$-слойки и $\chi(\mathbb{R}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \geqslant 5$ при произвольном $\varepsilon > 0$. Для $(2, 2, \varepsilon)$-слойки результат еще сильнее, $\chi(\mathbb{R}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2) \geqslant 6$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

Оказывается, что результат работы [7] остается неизменным при переходе к слойке любой размерности, несмотря на то, что в доказательстве теоремы 4 используется недистанционность в $\mathbb{R}^2$ графов $K_{3,2}$ и полузвездчатого графа (W_5 без одной спицы), которые при любых $d \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ являются дистанционными в $(2, d, \varepsilon)$-слойке.

Теорема 3. *Для любого натурального d существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{7}\right]$ минимальное количество ребер в дистанционном графе в $(2, d, \varepsilon)$-слойке на n вершинах и с числом независимости $\alpha \leqslant \lambda n$ ограничено снизу величиной $\frac{19-50\lambda}{3} n$.*

Далее работа организована следующим образом: во второй части дается более общая формулировка задачи, в третьей части доказывается ключевая лемма, а в четвертой части из ключевой леммы выводятся теоремы 3 и 4.

§2. Общая постановка задачи

Дан граф $\Gamma = (W, E)$. Будем называть *конфигурацией* графа Γ вектор $(|W|, \alpha(\Gamma), |E|)$, где $\alpha(\Gamma)$ – число независимости графа Γ, и обозначать его $\mathrm{Config}(\Gamma)$.

Будем называть вектор (a, b, c) *хорошим*, если он принадлежит множеству линейных комбинаций с целыми неотрицательными коэффициентами следующих векторов:

$$(0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (2,1,1), (3,1,3), (4,1,9), (5,1,15),$$
$$(6,1,22), (7,2,11), (7,1,28), (n+1, 1, [3n^2/4]), \quad \text{где} \quad n \geqslant 7.$$

Если взять веретено Мозера, то в нем можно провести дополнительное ребро тремя способами (с точностью до изоморфизма). В одном из трех получившихся графов будет K_4 в качестве подграфа, два других назовем $MS{+}_1$ и $MS{+}_2$. (рис. 2, 3)

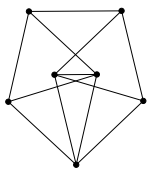

Рис. 2. $MS{+}_1$.

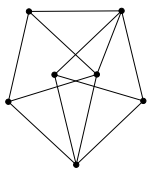

Рис. 3. $MS{+}_2$.

Докажем, что в достаточно тонкой слойке графы K_4 (полный граф на 4 вершинах), W_5 (колесо с 5 спицами), $MS{+}_1$, $MS{+}_2$ не являются дистанционными, т.е. для любого d существует $\varepsilon(d) > 0$ такое, что они не являются дистанционными в $(2, d, \varepsilon)$ слойке. Для этого докажем, что граф, являющийся дистанционным при некотором d в $(2, d, \varepsilon)$ слойке для всех ε является дистанционным на плоскости, если разрешить двум разным вершинам отображаться в одну точку, а также разрешить двум несмежным вершинам быть на расстоянии 1.

Для графа Γ назовем отображение $f : V(\Gamma) \to \mathbb{R}^2$ *δ-дистанционным*, если расстояние между любыми двумя смежными вершинами лежит в интервале $[1-\delta, 1+\delta]$. При этом 0-дистанционное отображение будем называть просто дистанционным.

Если положить граф связным, то пространство δ- дистанционных отображений, рассматриваемых с точностью до движения будет компактным.

Заметим, что рассмотрев проекцию на плоскость дистанционного отображения графа в $(2, d, \varepsilon)$-слойку мы получим $d\varepsilon$-дистанционное отображение.

Докажем, что если для любого $\varepsilon > 0$ есть ε-дистанционное отображение графа Γ, то есть и дистанционное отображение. Рассмотрим последовательность отображений графа Γ, где n-ое отображение является $1/n$-дистанционным. Тогда поскольку пространство 1-дистанционных вложений компактно, то найдется предельное отображение. Так как предел ε-дистанционных отображений является ε-дистанционным отображением, то полученное предельное отображение является ε-дистанционным для любого $\varepsilon > 0$, а значит, является дистанционным.

Тогда для доказательства недистанционности графов в слойке осталось доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Для графов K_4, W_5, $MS+_1$, $MS+_2$ не существует дистанционных отображений в плоскость.*

Граф K_4. Рассмотрим какие-нибудь три вершины K_4. При любом дистанционном отображении K_4 в плоскость они образуют правильный треугольник со стороной 1. Четвертая вершина при этом равноудалена от первых трех, а значит, она отобразится в центр описанной окружности этого треугольника. Но радиус описанной окружности правильного треугольника со стороной 1 равен $\sqrt{1/3}$, а не 1.

Граф W_5. Заметим, что при любом вложении W_5 (см. рис. 4) в плоскость углы $\angle AFB$, $\angle BFC$, $\angle CFD$, $\angle DFE$ равны $60°$. Тогда $\angle AFE$ равен $0°$ или $120°$, чего не может быть, так как он тоже должен быть равен $60°$.

Графы $MS+_1, MS+_2$. Рассмотрим веретено Мозера (рис. 5) и докажем, что для него дистанционное отображение в плоскость единственно.

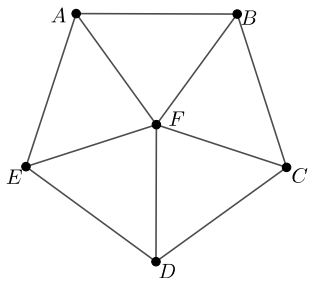

Рис. 4. W_5.

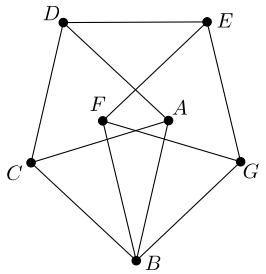

Рис. 5. Веретено Мозера.

Заметим, что расстояния BD и BE могут быть равны либо 0 либо $\sqrt{3}$. Однако, если хотя бы одно из них 0, то DE не может равняться 1. Значит, $BD = BE = \sqrt{3}$. При фиксированном положении вершин B, D, E положение вершин A, C, F, G восстанавливается однозначно.

Тогда $AG = CF = \sqrt{\frac{1}{3}}, AF = \sqrt{\frac{7}{6} - \sqrt{\frac{11}{12}}}$, $CG = \sqrt{\frac{7}{6} + \sqrt{\frac{11}{12}}}$, а значит для $MS{+}_1$ нет дистанционного отображения в плоскость.

$CE = DG = \sqrt{\frac{11}{4} + \sqrt{\frac{11}{12}}}, AE = DF = \sqrt{\frac{11}{4} - \sqrt{\frac{11}{12}}}$, а значит для $MS{+}_2$ нет дистанционного отображения в плоскость.

Будем называть граф *корректным*, если он не содержит K_4, W_5, $MS{+}_1$, $MS{+}_2$.

Теорема 4. *Конфигурация корректного графа является хорошим вектором.*

Доказательство теоремы 4 базируется на ключевой лемме.

Ключевая лемма. *Из любого корректного графа* Γ *можно удалить несколько вершин и все исходящие из них ребра таким образом, чтобы для оставшегося графа* Γ' *вектор* $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ *был хорошим.*

В следующем разделе мы докажем ключевую лемму, а в четвертом разделе выведем из нее теоремы 3 и 4.

§3. Доказательство ключевой леммы

3.1. Вступление.

Предложение 2. *Векторы*

$$\begin{gathered}(1,1,0),(2,1,1),(3,1,3),(4,1,9),(5,1,15),(5,2,8),(6,1,22),\\(6,2,9),(6,2,12),(7,1,28),(7,2,11),(7,2,14),(7,2,18),(7,2,21),\\(7,3,14),(8,2,18),(8,2,20),(8,2,22),(8,3,16),(8,3,20),(9,2,24),\\(9,3,18),(9,3,23),(9,3,27),(10,2,30),(10,3,20),(10,3,25),\\(10,3,30),(11,3,22),(11,3,28),(11,3,33),(12,3,26),(12,3,30),\\(12,3,36),(13,3,33),(13,3,39),(4n,n,10n),(4m+1,m,10m+3),\\(k+1,1,\lceil 3k^2/4\rceil)\quad \textit{при}\quad n,m,k\in\mathbb{Z};\ n,m\geqslant 3;\ k\geqslant 7\end{gathered}$$

являются хорошими.

Доказательство. Векторы

$$(1,1,0),\ (2,1,1),\ (3,1,3),\ (4,1,9),\ (5,1,15),\ (7,2,11),\ (6,1,22),\\(7,1,28),(k+1,1,\lceil 3k^2/4\rceil)\quad \text{для}\quad k\geqslant 7$$

являются хорошими по определению. Покажем, что остальные векторы тоже являются хорошими:

- $(5,2,8)=(2,1,1)+(3,1,3)+4\cdot(0,0,1)$;
- $(6,2,9)=(6,2,6)+(0,0,3)=2\cdot(3,1,3)+3\cdot(0,0,1)$;
- $(6,2,12)=(6,2,6)+(0,0,6)=2\cdot(3,1,3)+6\cdot(0,0,1)$;
- $(7,2,14)=(7,2,11)+3\cdot(0,0,1)$;
- $(7,2,18)=(7,2,11)+7\cdot(0,0,1)$;
- $(7,2,21)=(7,2,11)+10\cdot(0,0,1)$;
- $(7,3,14)=2\cdot(2,1,1)+(3,1,3)+9\cdot(0,0,1)$;

- $(8,2,18) = 2\cdot(4,1,9)$;
- $(8,2,20) = 2\cdot(4,1,9) + 2\cdot(0,0,1)$;
- $(8,2,22) = 2\cdot(4,1,9) + 4\cdot(0,0,1)$;
- $(8,3,16) = 2\cdot(3,1,3) + (2,1,1) + 9\cdot(0,0,1)$;
- $(8,3,20) = 2\cdot(3,1,3) + (2,1,1) + 13\cdot(0,0,1)$;
- $(9,2,24) = (4,1,9) + (5,1,15)$;
- $(9,3,18) = 3\cdot(3,1,3) + 9\cdot(0,0,1)$;
- $(9,3,23) = 3\cdot(3,1,3) + 14\cdot(0,0,1)$;
- $(9,3,27) = 3\cdot(3,1,3) + 18\cdot(0,0,1)$;
- $(10,2,30) = 2\cdot(5,1,15)$;
- $(10,3,20) = (7,2,11) + (3,1,3) + 6\cdot(0,0,1)$;
- $(10,3,25) = (7,2,11) + (3,1,3) + 11\cdot(0,0,1)$;
- $(10,3,30) = (7,2,11) + (3,1,3) + 16\cdot(0,0,1)$;
- $(11,3,22) = (4,1,9) + (7,2,11) + 2\cdot(0,0,1)$;
- $(11,3,28) = (4,1,9) + (7,2,11) + 8\cdot(0,0,1)$;
- $(11,3,33) = (4,1,9) + (7,2,11) + 13\cdot(0,0,1)$;
- $(12,3,26) = (5,1,15) + (7,2,11)$;
- $(12,3,30) = (5,1,15) + (7,2,11) + 4\cdot(0,0,1)$;
- $(12,3,36) = (5,1,15) + (7,2,11) + 10\cdot(0,0,1)$;
- $(13,3,33) = 2\cdot(4,1,9) + (5,1,15)$;
- $(13,3,39) = 2\cdot(4,1,9) + (5,1,15) + 6\cdot(0,0,1)$;
- $(15,3,45) = 3\cdot(5,1,15)$;
- $(4n,n,10n) = (4n,n,9n) + (0,0,n) = n\cdot((4,1,9) + (0,0,1))$;
- $(4m+1,m,10m+3) = (4m+1,m,9m+6) + (0,0,m-3) = (m-1)\cdot(4,1,9) + (5,1,15) + (m-3)\cdot(0,0,1)$ для $m \geqslant 3$.

$\square$

Будем говорить, что вектор (a_1,b_1,c_1) *мажорирует* вектор (a_2,b_2,c_2) и писать $(a_1,b_1,c_1) \succeq (a_2,b_2,c_2)$, если $a_1 = a_2, b_1 \geqslant b_2, c_1 \geqslant c_2$.

Предложение 3. *Если $(a_1,b_1,c_1) \succeq (a_2,b_2,c_2)$ и (a_2,b_2,c_2) – хороший, то (a_1,b_1,c_1) также хороший.*

Доказательство.

$$(a_1,b_1,c_1) = (a_2,b_2,c_2) + (b_1-b_2)(0,1,0) + (c_1-c_2)(0,0,1). \qquad \square$$

Пусть A – вершина минимальной степени в корректном графе Γ. Рассмотрим разные случаи в зависимости от значения $\deg A$.

3.2. Случай $\deg A = 0$**.** Удалим из Γ вершину A. Так как она не была смежна ни с одной из оставшихся вершин Γ, то $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') = (1, 1, 0)$.

3.3. Случай $\deg A = 1$**.** Удалим из Γ вершину A и единственную смежную с ней вершину B. Тогда число независимости уменьшится на 1, а число ребер – хотя бы на 1, т.е.

$$\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (2, 1, 1).$$

3.4. Случай $\deg A = 2$**.** Удалим из Γ вершину A и обе смежные с ней вершины B, C. Заметим, что при этом будет удалено не менее трех ребер: AB, AC и ребро из вершины B, отличное от AB. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (3, 1, 3)$.

3.5. Случай $\deg A = 3$**.**

3.5.1. *Вступление.* Пусть B, C, D – три вершины, смежные с A. Из того, что в Γ нет K_4, следует, что в подграфе на вершинах B, C, D не более двух ребер, и можно считать, что вершины B, D не смежны. Посмотрим на количество ребер в графе на вершинах B, C, D.

3.5.2. *Два ребра между вершинами B, C, D.* Посмотрим на количество вершин, смежных с B или D. Их не меньше, чем три, так как степень вершины B не меньше трех. Если их три, четыре или пять, то удалим вершины B, D и все вершины, смежные с ними. Тогда поскольку вершины B, D не смежны ни с одной из оставшихся вершин, а также не смежны между собой, то число независимости уменьшилось не меньше, чем на два. Общее число удаленных вершин равно пяти, шести или семи. Поскольку степень каждой из удаленных вершин не меньше трех, то количество удаленных ребер будет не меньше, чем 8, 9 или 11 соответственно.[1] Тогда вектор $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует вектор $(5, 2, 8), (6, 2, 9)$ или $(7, 2, 11)$ соответственно.

Если число вершин, смежных с B и D, не меньше, чем шесть, то число ребер, исходящих из этих вершин, не меньше восьми, поскольку вершины A и C смежны и с B и с D. Удалим в этом случае вершины A, B, C, D. Число ребер уменьшилось не меньше, чем на 9, так как удалено не менее восьми ребер из вершин B, D и ребро AC, в то

[1]Здесь и далее работает следующее соображение. Если удалено n вершин и степень каждой из них не меньше, чем k, то количество удаленных ребер будет не меньше, чем $\frac{nk}{2}$.

время как число независимости уменьшилось как минимум на 1, поскольку вершина A не смежна с вершинами графа Γ'. Следовательно, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (4, 1, 9)$.

3.5.3. *Одно ребро между вершинами B, C, D.* Не ограничивая общности, будем считать, что единственное ребро в подграфе на вершинах B, C, D это BC.

Посмотрим на возможное число ребер, исходящих из вершин B, D. Если ребер 6, то удалим вершины B, D и все смежные с ними вершины. Всего будет удалено 6 или 7 вершин, число независимости уменьшится не меньше, чем на 2, так как вершины B, D не смежны ни между собой, ни с остальными вершинами. Из того, что степень каждой вершины не меньше трех, следует, что удалено было не менее девяти или одиннадцати ребер соответственно. Значит, вектор $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует вектор $(6, 2, 9)$ или $(7, 2, 11)$ соответственно.

Если ребер, исходящих из вершин B, D, не меньше семи, то удалим вершины A, B, C, D. Число независимости уменьшилось не меньше, чем на 1, поскольку вершина A не смежна с оставшимися вершинами графа, а удалено оказалось не менее девяти ребер: не менее семи ребер, исходящих из B, D, и еще не менее двух ребер помимо ребра BC, исходящих из вершины C. Итого вектор $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует вектор $(4, 1, 9)$.

3.5.4. *Нет ребер между вершинами B, C, D.* Удалим вершины A, B, C, D. Из того, что вершины B, C, D имеют степень не меньше, чем три, и попарно несмежны, следует, что удалено будет не менее девяти ребер. Число независимости уменьшится не меньше, чем на 1, так как ни одна из оставшихся вершин не смежна с A. Итого

$$\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (4, 1, 9).$$

3.6. Случай $\deg A = 4$**.**

3.6.1. *Вступление.* Пусть B, C, D, E – вершины, смежные с A. Рассмотрим подграф на вершинах B, C, D, E. Поскольку в изначальном графе не было K_4, то в графе на вершинах B, C, D, E не может быть треугольников. Тогда получается 7 возможных типов подграфов на вершинах B, C, D, E (см. рис. 6 –12, изображены вместе с вершиной A): если ребер нет, то тип 1, если одно ребро, то тип 2, если два ребра, то они могут иметь общую вершину (тип 3), а могут не иметь (тип 7). Если 3 ребра, то поскольку нет треугольника, то возможны

либо цепочка из трех ребер (тип 4), либо три ребра из одной вершины (тип 6). Если 4 ребра, то из-за отсутствия треугольника это только цикл длины 4 (тип 5), 5 или 6 ребер уже гарантируют треугольник.

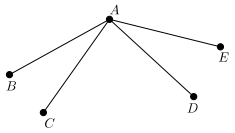

Рис. 6. Тип 1.

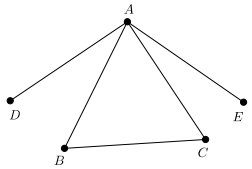

Рис. 7. Тип 2.

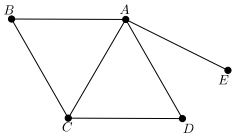

Рис. 8. Тип 3.

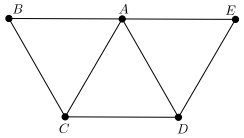

Рис. 9. Тип 4

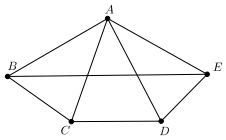

Рис. 10. Тип 5.

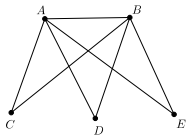

Рис. 11. Тип 6.

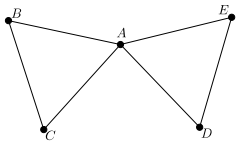

Рис. 12. Тип 7.

3.6.2. *Вершины типов* 1 *и* 2. Удалим вершины A, B, C, D, E. Число независимости уменьшится как минимум на 1. Число ребер уменьшится не меньше, чем на 15, так как каждая из вершин B, C, D, E имеет степень не ниже 4, а между ними не более 1 ребра. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5, 1, 15)$.

3.6.3. *Вершина типа* 3. Если среди вершин B, C, D, E есть вершина степени не меньше пяти, то удалим вершины A, B, C, D, E. Число независимости уменьшится не меньше, чем на 1, а число ребер – не меньше, чем на 15, так сумма степеней не меньше, чем 21, а внутренних ребер шесть. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5, 1, 15)$.

Если количество вершин, смежных хотя бы с одной из вершин B, D, E, не больше, чем 8, то удалим вершины B, D, E и все смежные с ними вершины. Число независимости уменьшится как минимум на три. Всего удалено 8, 9, 10 или 11 вершин, поскольку удалены вершины B, C, D, E и еще 4 смежных с E и возможно какие-то другие вершины, а так как степень каждой не меньше четырех, то удалено не меньше, чем 16, 18, 20 или 22 ребра соответственно. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(8, 3, 16)$, $(9, 3, 18)$, $(10, 3, 20)$, $(11, 3, 22)$.

Иначе назовем вершину A *особой* и получим граф, изображенный на рис. 13:

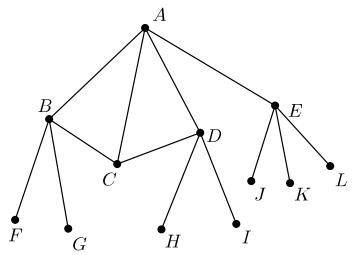

Рис. 13. Особая вершина типа 3.

Если четвертое ребро из вершины C это CF, CG, CH или CI, то вершина C степени 4 и типа 4, этот случай будет рассмотрен позже. Тогда если вершины B, D, E имеют тип, отличный от 1 и 2, то получаем граф на рис. 14.

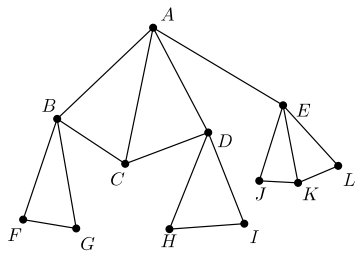

Рис. 14. Особая вершина типа 3.

На рис. 14 изображено 11 ребер подграфа на вершинах A, B, C, D, F, G, H, I. Среди неизображенных могут присутствовать только FH, FI, GH, GI, причем все четыре присутствовать не могут из-за отсутствия K_4. Тогда в нем не более четырнадцати ребер. Удалим вершины A, B, C, D, F, G, H, I, число независимости уменьшится не меньше, чем на 2, так как вершины B, D не смежны ни между собой, ни с оставшимися вершинами графа. Число ребер уменьшится не меньше, чем на 18, так как сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 32, а между ними не более четырнадцати ребер. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

3.6.4. *Вершина типа* 4. Если среди вершин B, C, D, E есть две вершины степени 5 или есть вершина степени не ниже шести, то удалим вершины A, B, C, D, E. Число независимости уменьшится не меньше, чем на 1, а число ребер – не меньше, чем на 15, так как сумма степеней не меньше, чем 22, а между удаленными вершинами 7 ребер. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5, 1, 15)$.

Значит, не ограничивая общности, можно считать, что вершины B, D степени 4, а вершины C, E степени не выше пяти.

Если есть третья вершина, смежная и с B и с D, то удалим вершины B, D и все вершины, смежные с ними. Удалено будет 7 вершин, число

независимости уменьшится не меньше, чем на два, а число ребер хотя бы на 14, поскольку все удаленные вершины имели степень не меньше четырех. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (7, 2, 14)$.

Остается случай, изображенный на рис. 15.

На рис. 15 проведено 10 ребер. Если между вершинами F, G, H не более одного ребра, то из вершин F, G, H исходит не менее восьми ребер, не проведенных на рис. 15. Тогда удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H. Число ребер уменьшится не меньше, чем на 18, а число независимости – не меньше, чем на 2, так как B и D не смежны ни с оставшимися вершинами, ни между собой. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

Значит, не ограничивая общности, можно считать, что есть ребро FH (рис. 16).

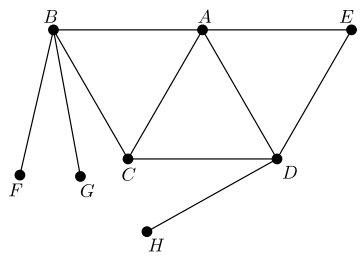

Рис. 15. Вершина типа 4.

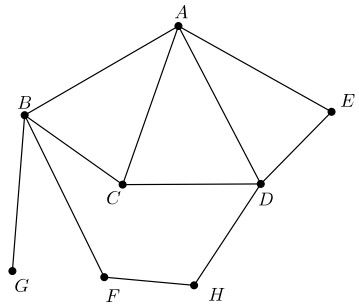

Рис. 16. Наличие ребра FH.

Рассмотрим 6 различных случаев относительно наличия ребер CF, CG, FG:

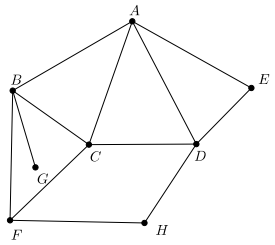

Рис. 17. Случай 2.

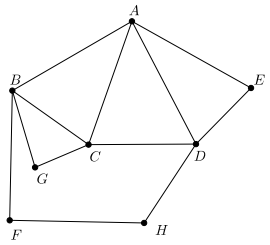

Рис. 18. Случай 3.

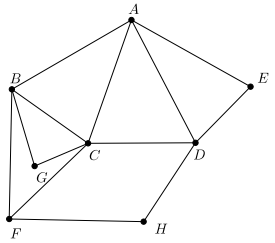

Рис. 19. Случай 4.

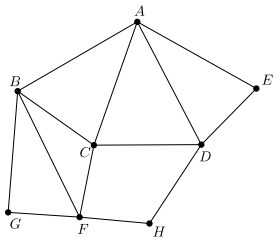

Рис. 20. Случай 5.

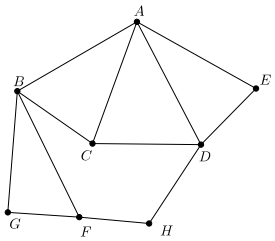

Рис. 21. Случай 6.

1. $(-CF)$,$(-CG)$,$(-FG)$

Вершина B имеет тип 1, рассмотрим ее вместо A.

2. $(+CF)$,$(-CG)$,$(-FG)$ (рис. 17)

Вершина B имеет тип 3. Ребра DG быть не может, поскольку вершина D имеет степень 4, а значит, смежные с ней вершины это A, C, E, H. Если есть ребро GE или ребро GH, то вершина B неособая типа 3 и рассмотрим ее вместо A. Если ребер GE и GH нет, то удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H. Число независимости уменьшится как минимум на 2, число ребер уменьшится как минимум на 18, так как из вершины G исходит не менее трех ребер наружу, а остальные ребра дают вклад не меньше, чем 29 в сумму степеней удаленных вершин, то есть, их не менее пятнадцати. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

3. $(-CF)$,$(+CG)$,$(-FG)$ (рис. 18)

Вершина B имеет тип 3. Если есть какие-то из ребер GH, GE, EF, то вершина B является неособой вершиной типа 3 и ее можно рассмотреть вместо A в качестве вершины минимальной степени. Если ни одного из этих ребер нет, то удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H. Между ними было не более четырнадцати ребер (12 на рис. 18 и еще, возможно, CH и EH, других быть не могло). Значит, удалено было не меньше, чем 18 ребер, поскольку сумма степеней не меньше, чем 32, а число независимости уменьшилось хотя бы на 2. Таким образом, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

4. $(+CF)$,$(+CG)$,$(-FG)$ (рис. 19)

Если среди вершин F, G есть вершина степени 5 или более, удалим вершины A, B, C, F, G. Число независимости уменьшится хотя бы на 1, так как B не смежна ни с одной из оставшихся вершин. Между удаленными вершинами 7 ребер, а сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 22, значит удалено будет не менее пятнадцати ребер, а тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5, 1, 15)$.

Если вершины F и G степени 4, то удалим вершины A, F, G, а также все вершины, смежные с ними. Всего будет удалено 8, 9, 10 или 11 вершин (8 вершин $A - H$ и еще, возможно, не более двух вершин, смежных с G и не более одной, смежной с F). Число независимости уменьшится хотя бы на 3, а поскольку степени всех вершин не меньше четырех, то удалено будет не меньше, чем 16, 18, 20 или 22 ребра соответственно. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов: $(8, 3, 16)$, $(9, 3, 18)$, $(10, 3, 20)$, $(11, 3, 22)$.

5. $(+FG)(+CF)$ (рис. 20)

Ребра CG нет из-за отсутствия K_4, ребер EH, GH быть не может, так как в первом случае все изображенные вершины, кроме G образуют $MS{+}_1$, а во втором аналогично все вершины, кроме E. Если проведено ребро CH, то образуется W_5 с центром в C. Тогда удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H. При этом будет удалено не менее восемнадцати ребер, так как между вершинами не более четырнадцати ребер (13 ребер на рис. 20 и, возможно, EG), а их сумма степеней не меньше, чем 32. В то же время число независимости уменьшится как минимум на 2. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

6. $(+FG)(-CF)$ (рис. 21)

Посмотрим на наличие ребра GH.

6.1. *Ребра GH нет.*

Пусть M – множество вершин, состоящее из вершин A, G, H и всех вершин, смежных с ними. В множестве M не меньше восьми вершин.

Если в множестве M не больше, чем 11 вершин, то удалим из графа все вершины этого множества. Оказалось, что мы удалили 8, 9, 10 или 11 вершин, а поскольку каждая из удаленных вершин имеет степень не меньше четырех, то оказалось удалено не меньше, чем 16, 18, 20 или 22 ребра соответственно. Из того, что вершины A, G, H не смежны ни между собой, ни с оставшимися вершинами графа, следует, что число независимости уменьшилось хотя бы на 3. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов: $(8, 3, 16)$, $(9, 3, 18)$, $(10, 3, 20)$, $(11, 3, 22)$.

Если вершин в множестве M не менее двенадцати, то из вершин G, H выходит не менее четырех ребер за пределы множества вершин A, B, C, D, E, F, G, H. Тогда удалим эти вершины. Число независимости уменьшилось хотя бы на 2, поскольку вершины B и D не смежны ни друг с другом, ни с вершинами, оставшимися в графе. При этом оказалось, что удалено не менее восемнадцати ребер, так как сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 32, но не менее четырех удаленных ребер дают вклад 1 в эту сумму. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

6.2. *Ребро GH есть.*

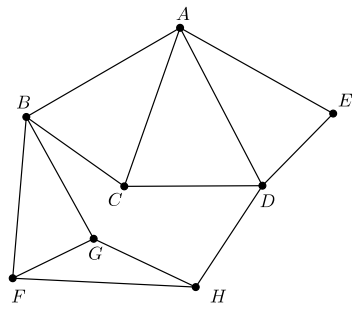

Рис. 22. Наличие ребра GH

Заметим, что вершины, кроме E, образуют веретено Мозера, а значит все ребра, соединяющие две вершины, отличные от E, изображены на рис. 22. Ребер BE, CE быть не может из конструкции вершин, смежных с A, поэтому среди непроведенных на рис. 22 ребер могут присутствовать только EF, EG, EH, причем не более одного из них, так как если есть EF и EH, то вершины, кроме G, образуют $MS{+}_1$ (рис. 23), аналогично если есть EG и EH, то вершины, кроме F, образуют $MS{+}_1$, если есть EF и EG, то вершины, кроме H, образуют $MS{+}_2$ (рис. 24).

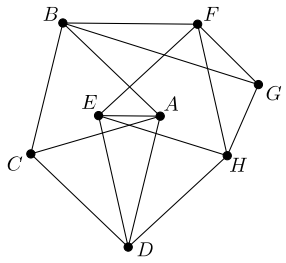

Рис. 23. Ребра EF, EH.

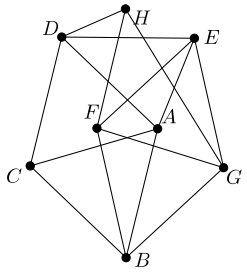

Рис. 24. Ребра EF, EG.

Таким образом, при удалении вершин A, B, C, D, E, F, G, H будет удалено не менее восемнадцати ребер, так как сумма степеней

удаленных вершин не меньше, чем 32, а ребер между удаленными вершинами не больше четырнадцати. Число независимости уменьшится как минимум на 2, значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

3.6.5. *Вершина типа* 5. Если вершины B, D обе степени 4, то удалим B, D и все вершины, смежные с ними. Удалено будет 6 или 7 вершин, а значит, как минимум 12 или 14 ребер соответственно. Так как число независимости уменьшилось хотя бы на 2, то $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов: $(6, 2, 12), (7, 2, 14)$.

Если сумма степеней вершин B, C, D, E не менее девятнадцати, то удалим вершины A, B, C, D, E. Сумма степеней удаленных вершин будет не меньше, чем 23, а между ними всего 8 ребер, значит, из них исходит не менее пятнадцати ребер. Число независимости уменьшится хотя бы на 1, поскольку вершина A была смежна только с удаленными. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5, 1, 15)$.

Значит, можно считать, что вершины B, E степени 4, а вершины C, D степени 5.

Пусть F – четвертая вершина, смежная с B.

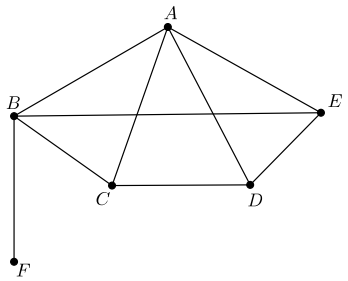

Рис. 25. Вершина F.

Если нет хотя бы одного из ребер CF, EF, то вершина B будет типа 3 или 4. Значит, есть CF и EF. Если нет DF, то вершина E будет иметь тип 4. Тогда получаем граф на рис. 26.

Удалим вершины B, D и все вершины, смежные с ними. Удалено будет 7 вершин и не менее четырнадцати ребер, число независимости уменьшится хотя бы на 2, а значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (7, 2, 14)$.

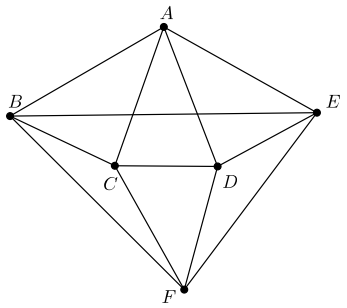

Рис. 26. Смежные с вершиной F.

3.6.6. *Вершина типа* 6. Если вершин, смежных с хотя бы одной из вершин C, D, E, не больше, чем 8, то удалим вершины C, D, E и все смежные с ними вершины. Удалено будет 7, 8, 9, 10 или 11 вершин, а значит, не меньше, чем 14, 16, 18, 20 или 22 ребра соответственно. Число независимости уменьшится хотя бы на 3, значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов: $(7,3,14)$, $(8,3,16)$, $(9,3,18)$, $(10,3,20)$, $(11,3,22)$. А поскольку вершины C, D, E все смежны и с A и с B, то их сумма степеней не меньше тринадцати.

Если $\deg B + \deg C + \deg D + \deg E \geqslant 18$, то удалим вершины A, B, C, D, E. Из того, что сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 22, а между ними 7 ребер, следует, что удалено будет не менее пятнадцати ребер. Число независимости уменьшится хотя бы на 1, а значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (5,1,15)$.

Тогда остается случай, когда вершина B степени 4, а сумма степеней вершин C, D, E равна 13. Не ограничивая общности будем считать, что $\deg D = \deg E = 4$, а $\deg C = 5$, причем вершины C, D, E не имеют попарно общих соседей, кроме A и B (рис. 27):

Рассмотрим подграф на вершинах A, B, D, E, I, J, K, L. Все ребра этого подграфа, исходящие из вершин A, B, D, E, изображены на рис. 27. Тогда поскольку в нем нет K_4, то в нем не более четырнадцати ребер (9 изображенных на рис. 27 и не более пяти между вершинами I, J, K, L). Тогда удалим вершины A, B, D, E, I, J, K, L. Из того, что вершины D, E были смежны только с удаленными вершинами и не были смежны между собой, следует, что число независимости уменьшится хотя бы на 2. Число ребер уменьшится как минимум на 18, так как

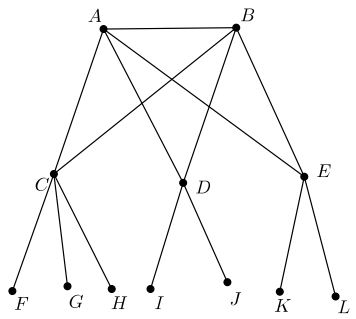

Рис. 27. Смежные с вершинами C, D, E.

сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 32, а ребер между ними не более четырнадцати. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

3.6.7. *Вершина типа* 7. Если степень одной из вершин B, C, D, E хотя бы 5, то удалим вершины A, B, C, D, E. Так как сумма степеней вершин B, C, D, E не меньше семнадцати, а между ними только два ребра, то удалено не менее пятнадцати ребер. Число независимости уменьшится не меньше, чем на 1, поскольку вершина A не смежна ни с одной из оставшихся. Итого вектор $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует $(5, 1, 15)$.

Вершину графа степени 4, типа 7, все вершины, смежные с которой, так же имеют степень 4, будем называть *ключевой*. Если все вершины графа ключевые, то будем называть граф *ключевым*.

Предложение 4. *Если в связном графе есть вершина степени* 4 *и все вершины степени* 4 *являются ключевыми, то граф ключевой.*

Доказательство предложения очевидно. Случаи, когда в Γ есть вершина степени 4, отличная от ключевой, рассмотрены выше. Поэтому для разбора случая $\deg A = 4$ достаточно разобрать случай ключевого графа.

Посмотрим на кратчайший цикл длины больше трех. Он есть, так как в нашем графе $2n$ ребер, а в графе на n вершинах без циклов длины больше, чем 3 не больше, чем $3n/2 - 3/2$ ребер. Заметим, что вершины цикла, не являющиеся соседними в цикле, не смежны. Если длина цикла больше четырех, то образуется цикл, у которого длина

меньше длины исходного, но больше трех. Если длина цикла равна четырем, то наличие ребра внутри цикла противоречит условию, что все вершины ключевые.

Посмотрим, как устроены вершины, смежные с циклом: пусть P – некоторая вершина из цикла, Q, R – соседние с ней по циклу, S, T – две другие смежные с ней вершины. Тогда среди Q, R, S, T две пары смежных вершин и это не $(Q, R), (S, T)$. Не ограничивая общности можно считать, что это $(Q, S), (R, T)$. Посмотрим на вершины, смежные с вершиной Q: с ней смежны P, S и еще 2 вершины, которые также смежны между собой, но не смежны с вершинами P, S, одна из этих вершин входит в цикл. Переходя к следующей вершине цикла и так далее, мы получим, что все ребра, исходящие из вершин цикла, выглядят как на рис. 28.

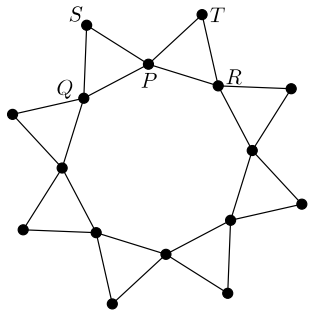

Рис. 28. Минимальный цикл длины больше трех в ключевом графе.

Рассмотрим разные случаи длины цикла.

Цикл длины 4 (рис. 29). Заметим, что из неотмеченных на рисунке ребер между отмеченными вершинами могут быть только EG и FH, поэтому в подграфе на вершинах A, B, C, D, E, F, G, H не более четырнадцати ребер. Тогда при удалении вершин A, B, C, D, E, F, G, H будет удалено не менее восемнадцати ребер, так как сумма степеней 32 и есть не более четырнадцати ребер между удаленными вершинами. Число независимости уменьшилось как минимум на 2, поскольку вершины A и C не смежны ни между собой, ни с одной из оставшихся вершин. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 18)$.

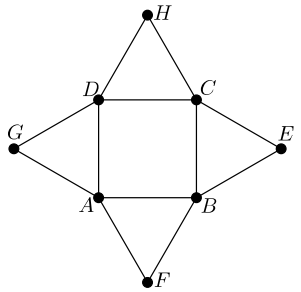

Рис. 29. Цикл длины 4.

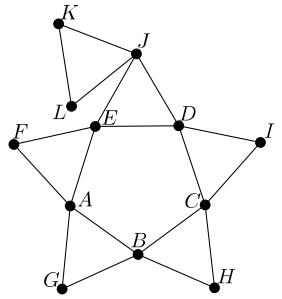

Рис. 30. Цикл длины 5.

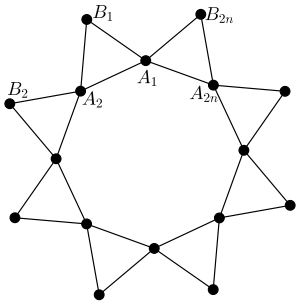

Рис. 31. Цикл длины $2n$.

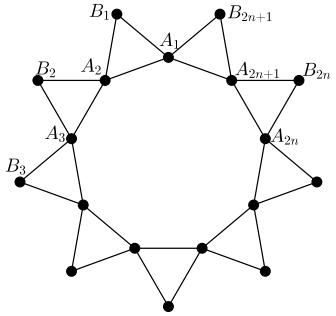

Рис. 32. Цикл длины $2n+1$.

Цикл длины 5 **(рис.** 30**).** Пусть K, L – смежные с J вершины (исходный цикл $ABCDE$). Поскольку в графе нет циклов длины 4, то две вершины среди $A - J$ смежны только в том случае, если ребро есть на рис. 30. Из этого следует, что вершины K и L не совпадают с остальными, при этом среди непроведенных на рисунке ребер могут быть только по два ребра из вершин K и L. Тогда удалим 12 вершин: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L. Сумма степеней 48 и не больше, чем 22 ребра между удаленными вершинами, поэтому удалено не меньше, чем 26 ребер. Число независимости уменьшилось хотя бы на 3, так как вершины A, C, J не смежны ни с неудаленными вершинами, ни между собой. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (12, 3, 26)$.

Цикл длины $2n$, $n \geqslant 3$ (рис. 31). Пусть цикл состоит из вершин $A_1, \ldots, A_{2n}$, а $B_1, \ldots, B_{2n}$ – смежные с ним вершины. Заметим, что все ребра, соединяющие отмеченные на рисунке вершины, отмечены, поскольку иначе образуется более короткий цикл длины больше трех. Удалим вершины $A_1, \ldots, A_{2n}, B_1, \ldots, B_{2n}$. Число независимости уменьшится не меньше, чем на n, поскольку вершины $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ не смежны ни с одной из оставшихся вершин, ни между собой. Число ребер уменьшится на $10n$, так как сумма степеней $16n$ и $6n$ ребер между удаленными вершинами. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (4n, n, 10n)$.

Цикл длины $2n+1$, $n \geqslant 3$ (рис. 32). Пусть цикл состоит из вершин $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, а $B_1, \ldots, B_{2n+1}$ – смежные с ним вершины. Заметим, что все ребра, соединяющие отмеченные на рисунке вершины, отмечены, поскольку иначе образуется более короткий цикл длины больше трех. Удалим вершины $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, $B_1, \ldots B_{2n}$. Число независимости уменьшится не меньше, чем на n, так как вершины $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ не смежны ни с одной из оставшихся вернин, ни между собой. Число ребер уменьшится на $10n+3$, поскольку сумма степеней $16n+4$ и $6n+1$ ребро между удаленными вершинами. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (4n+1, n, 10n+3)$.

3.7. Случай $\deg A = 5$.

3.7.1. *Вступление.* Пусть B, C, D, E, F – вершины, смежные с A, Δ – подграф на вершинах B, C, D, E, F. Из того, что в исходном графе не было W_5, следует, что в графе Δ нет цикла длины 5. Так как в исходном графе нет K_4, то в Δ нет треугольников, а значит, по теореме 1 в нем не более шести ребер. Рассмотрим различные случаи в зависимости от значения $|E(\Delta)|$.

3.7.2. *Шесть ребер в Δ.* Тогда $\Delta \simeq K_{3,2}$ (рис. 33).

Если сумма степеней вершин B, C, D, E, F не меньше, чем 28, то удалим A, B, C, D, E, F. Число независимости уменьшится хотя бы на 1, а количество ребер хотя бы на 22, поскольку между удаленными вершинами 11 ребер, а их сумма степеней не меньше, чем 33. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6, 1, 22)$.

Если сумма степеней вершин B, D, F не превосходит 16, то удалим вершины B, D, F и все вершины, смежные с ними. Число независимости уменьшится хотя бы на 3, и удалено будет 8, 9, 10, 11, 12 или 13 вершин, а значит, не меньше, чем 20, 23, 25, 28, 30 или 33 ребра, так как

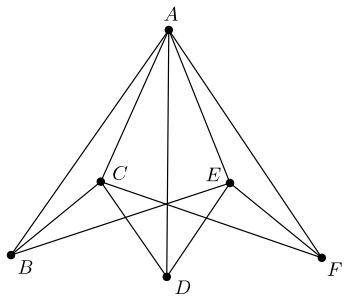

Рис. 33. 6 ребер в Δ.

степени вершин не меньше пяти. Следовательно, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов: $(8,3,20)$, $(9,3,23)$, $(10,3,25)$, $(11,3,28)$, $(12,3,30)$, $(13,3,33)$.

Таким образом, сумма степеней вершин B, D, F равна 17, а вершины C, E степени 5. Тогда удалим вершины C, E и все смежные с ними вершины. Число независимости уменьшится хотя бы на 2, удалено будет 7 или 8 вершин. Количество удаленных ребер будет не меньше, чем 18 или 20 соответственно. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(7,2,18), (8,2,20)$.

3.7.3. *Пять ребер в* Δ. Так как в Δ нет треугольников и циклов длины 5, то граф на вершинах A, B, C, D, E, F выглядит как на рис. 34.

Если сумма степеней вершин B, C, D, E, F не меньше, чем 27, то удалим вершины A, B, C, D, E, F. Число независимости уменьшится хотя бы на 1, а количество ребер хотя бы на 22, поскольку между удаленными вершинами 10 ребер, а их сумма степеней не меньше, чем 32. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6,1,22)$.

Если каждая из вершин B, D, F имеет степень 5, то удалим вершины B, D, F и все вершины, смежные с ними. Число независимости уменьшится хотя бы на 3, и удалено будет 9, 10, 11, 12 или 13 вершин, а значит, не меньше, чем 23, 25, 28, 30 или 33 ребра, так как степени вершин не меньше пяти. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(9,3,23)$, $(10,3,25)$, $(11,3,28)$, $(12,3,30)$, $(13,3,33)$.

Тогда сумма степеней вершин B, D, F равна 16, а вершины C, E степени 5.

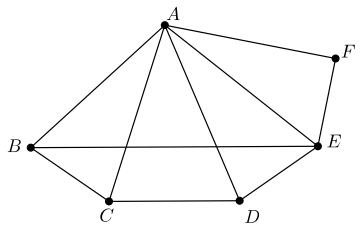

Рис. 34. 5 ребер в Δ.

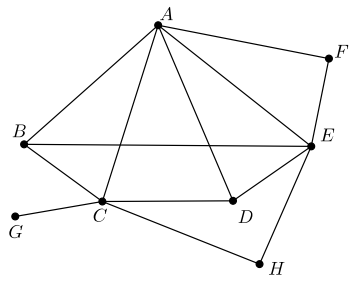

Рис. 35. 4 смежные с C, E.

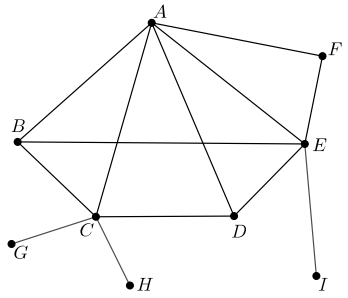

Рис. 36. 3 смежные с C, E.

Если у вершин C, E четыре общие смежные вершины (рис. 35), то удалим вершины C, E и все смежные с ними вершины. Будет удалено 8 вершин и не менее двадцати ребер. Число независимости уменьшится как минимум на 2. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 20)$.

Пусть у вершин C, E три общих смежных вершины (A, B и D), G, H – две другие вершины, смежные с C, а I – пятая вершина, смежная с E (рис. 36).

Если все ребра, исходящие из вершин A, B, C, D, E, F, G, H, I, ведут в это же множество вершин, то удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H, I. При этом мы удалим 9 вершин и не менее 23 ребер. Число

независимости уменьшится как минимум на 3, поскольку вершины B, D, F попарно не смежны. Конфигурация уменьшилась на вектор, мажорирующий $(9, 3, 23)$.

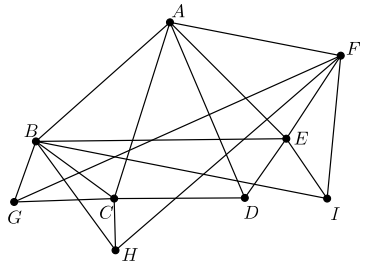

Рис. 37. Наличие новых ребер.

В этом случае вершины B и F имеют пять общих смежных вершин. Значит, при удалении вершин B, F и всех вершин, смежных с ними, число вершин уменьшится на 8, число независимости – как минимум на 2, а число ребер уменьшится хотя бы на 20. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (8, 2, 20)$.

Значит, есть ребро, исходящее из одной из вершин A, B, C, D, E, F, G, H, I в какую-нибудь из оставшихся вершин графа. Тогда удалим вершины A, B, C, D, E, F, G, H, I. Сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 46, причем как минимум одно из удаленных ребер дает вклад 1 в эту сумму степеней. Тогда число ребер уменьшилось хотя бы на 24. Число независимости уменьшилось как минимум на 2, так как вершины C, E были смежны только с удаленными и не были смежны между собой. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (9, 2, 24)$.

3.7.4. *Не более трех ребер в* Δ. Удалим вершины A, B, C, D, E, F. Число независимости уменьшится как минимум на 1, а количество ребер – как минимум на 22, поскольку сумма степеней удаленных вершин не меньше тридцати, а количество ребер между ними не больше восьми. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6, 1, 22)$.

3.7.5. *Четыре ребра в* Δ. Если одна из вершин B, C, D, E, F имеет степень больше пяти, то удалим вершины A, B, C, D, E, F. Число независимости уменьшится как минимум на 1, а количество ребер – как минимум на 22, так как сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 31, а количество ребер между ними равно 9. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6, 1, 22)$.

Тогда вершины B, C, D, E, F имеют степень 5.

Всего существует 4 типа вершины A в зависимости от вида графа Δ (Если есть цикл, то он длины 4 и это тип 1 (рис. 38), в противном случае, если есть вершина степени 4, то это тип 2 (рис. 39), если есть вершина степени 3, то тип 3 (рис. 40), иначе получается цепочка и тип 4 (рис. 41)):

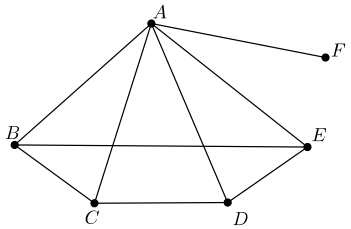

Рис. 38. Тип 1.

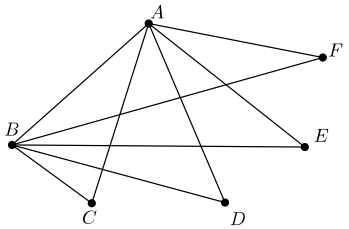

Рис. 39. Тип 2.

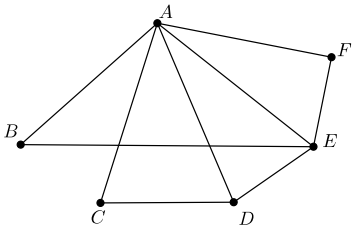

Рис. 40. Тип 3.

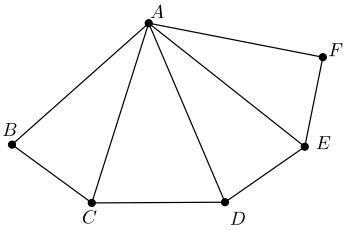

Рис. 41. Тип 4.

Вершина типа 1. Если у вершин B, D четыре или пять общих смежных вершин, то удалим вершины B, D вместе со всеми смежными с ними вершинами. Удалено 7 или 8 вершин, значит, число ребер уменьшилось не меньше, чем на 18 или 20 соответственно. Число независимости уменьшилось хотя бы на 2, тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует $(7, 2, 18)$ или $(8, 2, 20)$.

Иначе получаем граф на рис. 42.

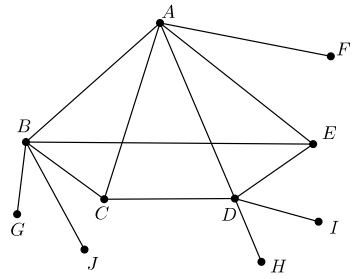

Рис. 42. Вершина типа 1

Пусть Γ_1 – подграф на вершинах A, B, C, D, E, G, H, I, J. Тогда среди ребер Γ_1, отсутствующих на рис. 42, не более двух ребер из вершины C, не более двух ребер из вершины E и не более пяти ребер между вершинами G, H, I, J. Итого не более девяти ребер. Тогда $|E(\Gamma_1)| \leqslant 21$. Удалим вершины графа Γ_1. Число независимости уменьшится минимум на 2, поскольку вершины B, D были смежны только с удаленными и не были смежду между собой, а число ребер уменьшилось не меньше, чем на 24, так как сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 45, а ребер между ними не больше, чем 21. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (9, 2, 24)$.

Вершина типа 2. Пусть G, H, I – оставшиеся вершины, смежные с C (рис. 43).

Если между вершинами, смежными с C, не более трех ребер, то удалим вершины A, B, C, G, H, I. Число независимости уменьшится как минимум на 1, а количество ребер – как минимум на 22, поскольку сумма степеней удаленных вершин не меньше тридцати, а количество

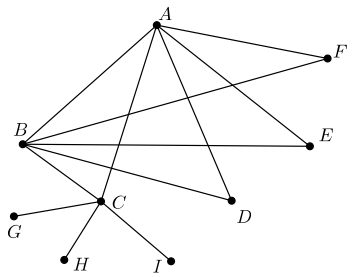

Рис. 43. Вершина типа 2.

ребер между ними не больше восьми. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6, 1, 22)$.

Если между вершинами, смежными с C, не менее четырех ребер, то так как вершины A, B степени 5, они не соединены ребрами с вершинами G, H, I. Тогда вершины G, H, I попарно смежны и получился K_4 на вершинах C, G, H, I.

Вершина типа 3. Если вершины B, F имеют общую смежную вершину, отличную от A и E, то удалим вершины B, D, F и все вершины, смежные с ними. Всего будет удалено 9, 10, 11, 12 или 13 вершин, а значит, не меньше, чем 23, 25, 28, 30 или 33 ребра соответственно. Число независимости при этом уменьшится как минимум на 3, значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(9, 3, 23), (10, 3, 25), (11, 3, 28), (12, 3, 30), (13, 3, 33)$.

Иначе пусть G, H, I – оставшиеся вершины, смежные с B, а J, K, L – оставшиеся вершины, смежные с F (рис. 44).

Если между смежными с B вершинами не более трех ребер, то удалим вершины A, B, E, G, H, I. Число независимости уменьшится как минимум на 1, а количество ребер – как минимум на 22, поскольку сумма степеней удаленных вершин не меньше тридцати, а количество ребер между ними не больше восьми. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (6, 1, 22)$.

Иначе, так как между вершинами G, H, I не более двух ребер из-за отсутствия K_4, а из вершины A уже проведены все 5 ребер, то вершина E смежна с одной из вершин G, H, I. Если вместо вершины

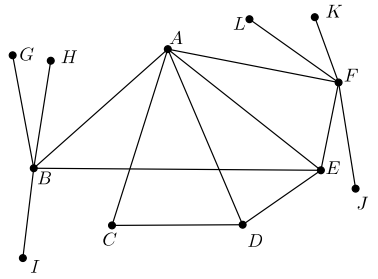

Рис. 44. Вершина типа 3.

B аналогично рассмотреть вершину F, то получим, что либо между вершинами, смежными с F, не более трех ребер и тогда аналогично удалим вершины A, E, F, J, K, L, либо E смежна с одной из вершин J, K, L, чего не может быть, поскольку из вершины E уже проведено 5 ребер.

Вершина типа 4. Назовем вершину *опорной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- имеет степень 5;
- между смежными с ней вершинами ровно 4 ребра;
- имеет тип 4;
- все смежные с ней вершины имеют степень 5.

Будем называть граф *опорным*, если все его вершины являются опорными.

Предложение 5. *Если в связном графе есть вершина степени* 5 *и все вершины степени* 5 *– опорные, то граф опорный.*

Доказательство предложения очевидно. Случаи, когда в графе есть вершина степени 5, отличная от опорной, рассмотрены выше. Поэтому для разбора случая $\deg A = 5$ достаточно разобрать случай опорного графа.

Для опорной вершины A будем называть вершины B, F *крайними* соседями A, а вершину D – *центральным* соседом A.

Предложение 6. *Если B является крайним соседом для A, то A является крайним соседом для B.*

Доказательство. Если вершины A, B смежны, то B является крайним соседом для A тогда и только тогда, когда A и B имеют одну общую смежную вершину. □

Предложение 7. *Если D является центральным соседом для A, то A не является центральным соседом для D.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда получаем граф на рис. 45.

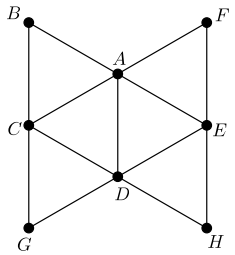

Рис. 45. A и D – центральные соседи.

Заметим, что A и D не являются для E крайними соседями. Так как F – крайний сосед для A, то A – крайний сосед для F. Тогда E – не крайний сосед для F, значит, F – не крайний сосед для E. Так как H – крайний сосед для D, то D – крайний сосед для H. Тогда E не крайний сосед для H, значит, H не крайний сосед для E. Итого у E четыре соседа, не являющихся крайними – противоречие. □

Рассмотрим вершины B, D, F. Если есть вершина, отличная от A, C, E смежная хотя бы с двумя из этих вершин, то удалим вершины B, D, F и все смежные с ними вершины. Удалено 9, 10, 11, 12 или 13 вершин. Значит, удалено не меньше, чем 23, 25, 28, 30 или 33 ребра соответственно. Тогда $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(9, 3, 23)$, $(10, 3, 25)$, $(11, 3, 28)$, $(12, 3, 30)$, $(13, 3, 33)$.

Тогда можно считать, что вершины B, D, F не имеют общих соседей, кроме A, C, E.

В этом случае назовем вершину A *суперопорной*. Если в графе есть вершина X, не являющаяся суперопорной, то пусть U, V, W – две

крайних и центральная вершины для X. Тогда аналогично удалим вершины U, V, W и все вершины, смежные с ними. Таким образом, можно считать, что все вершины в графе являются суперопорными.

Поскольку A не центральный сосед для D, то либо C либо E – крайний сосед для D. Не ограничивая общности, можно считать, что это E. Тогда D – крайний сосед для E, значит, F – центральный сосед для E, значит, у E и F есть общий сосед помимо A. Назовем его G.

Посмотрим на вершину F. Для нее вершина A является крайней, а значит, вершина G будет центральной. Так как вершина F – суперопорная, то у вершин A и G нет общих смежных вершин, кроме E и F.

Для вершины E вершина A является крайней, а вершина F – центральной, поэтому G – не крайний сосед для E. Тогда у E и G есть общий сосед помимо F, назовем его H.

Заметим, что вершины A и F – крайние соседи друг для друга, а тогда G – не крайний сосед для F, в этом случае у F и G есть общая смежная вершина помимо E, назовем ее I.

Так как H – крайний сосед для E, то E – крайний сосед для H, значит, G – не крайний сосед для H, а тогда у G и H есть общий сосед помимо E. Назовем его J. Итого получаем граф, изображенный на рис. 46.

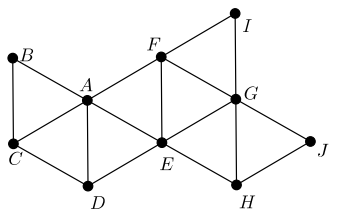

Рис. 46. Вершины G, H, I, J.

Вершины A, B, C, D, E, F очевидно различны. Вершины G и H отличны от A, D, E, F из построения и отличны от B и C, так как смежны с вершиной E. Вершина I не совпадает с вершинами B, C, D,

так как смежна с вершиной F, и не совпадает с A, потому что смежна с вершиной G. Из построения она не совпадает с E, F, G, H. Несложно заметить, что вершина J не может совпадать с вершинами E, F, G, H, I. Более того, вершины A и J различны, так как A не смежна с G, а J смежна. С вершинами B, C, D вершина J совпасть не может так как иначе получится, что у A и G три общих смежных. Этого не может быть, поскольку вершина F – суперопорная, а вершины A и G – крайняя и центральная для нее соответственно. Таким образом, все вершины на рис. 46 различны.

Более того, вершина I не смежна с E, так как пять вершин, смежных с E – это вершины D, A, F, G, H, не смежна с C, иначе вершины A, C, D, E, F, G, I образуют $MS{+}_1$, и не смежна с B, D, так как иначе у B и F или у D и F есть общая смежная, отличная от A, C, E, чего не может быть по предположению.

Удалим из графа вершины A, B, C, D, E, F. Число независимости уменьшилось как минимум на 1, а количество ребер – ровно на 21. В оставшемся графе вершина G имеет степень 3, так как G не смежна с B, C, D, поскольку иначе у вершин A и G будет три общих смежных вершины. а вершина I – степень 4, поскольку среди удаленных вершин только F смежна с I. Если в оставшемся графе есть вершина степени не выше 2, удалим ее вместе со всеми соседями. Итого получится, что $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(7, 2, 21)$, $(8, 2, 22)$ или $(9, 2, 24)$. Если в оставшемся графе все вершины имеют степень не менее трех, то удалим вершины G, H, I, J. Число независимости уменьшилось еще как минимум на 1, число ребер еще как минимум на 9, поскольку сумма степеней удаленных вершин не менее тринадцати, а между ними 4 ребра. Итого получится, что $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (10, 2, 30)$.

3.8. Случай $\deg A = 6$**.** Пусть B, C, D, E, F, G – вершины, смежные с вершиной A. Пусть H – подграф на вершинах B, C, D, E, F, G. Из того, что в исходном графе не было K_4, следует, что в H нет K_3. Тогда по теореме 1 в H не более девяти ребер.

Если в H не более восьми ребер, то удалим вершины A, B, C, D, E, F, G. Число независимости уменьшится как минимум на 1, а число ребер – не меньше, чем на 28, поскольку сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 42, а ребер между удаленными вершинами максимум 14. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (7, 1, 28)$.

Тогда в H 9 ребер и $H \simeq K_{3,3}$. Не ограничивая общности, считаем, что доли $\{B, C, D\}$ и $\{E, F, G\}$.

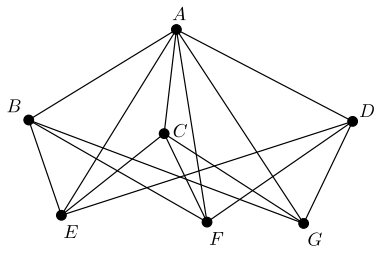

Рис. 47. Вершина степени 6.

Если среди вершин B, C, D, E, F, G есть вершина степени больше шести, то удалим вершины A, B, C, D, E, F, G. Число независимости при этом уменьшится хотя бы на 1, а число ребер – хотя бы на 28, так как сумма степеней удаленных вершин не меньше, чем 43, а ребер между удаленными вершинами 15. Итого $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (7, 1, 28)$.

Иначе удалим вершины B, C, D и все вершины, смежные с ними. Всего будет удалено k вершин, где $9 \leqslant k \leqslant 13$, поскольку удалены вершины A, B, C, D, E, F, G и помимо них от двух до шести остальных вершин, так как каждая из B, C, D имеет две смежных вершины вне множества $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, а значит, не меньше, чем $3k$ ребер. Число независимости при этом уменьшится хотя бы на 3. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ мажорирует один из векторов $(9, 3, 27)$, $(10, 3, 30)$, $(11, 3, 33)$, $(12, 3, 36)$, $(13, 3, 39)$.

3.9. Случай $\deg A = n \geqslant 7$**.** В подграфе на вершинах, смежных с A, нет K_3. Значит, по теореме 1 в нем не больше, чем $[n^2/4]$ ребер. Тогда удалим вершину A и все смежные с ней вершины. Количество ребер при этом уменьшится не меньше, чем на $\lceil 3n^2/4 \rceil$, поскольку сумма степеней вершин, смежных с A, не меньше, чем n^2, а ребер между ними не больше, чем $[n^2/4]$. Значит, $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma') \succeq (n + 1, 1, \lceil 3n^2/4 \rceil)$.

§4. Доказательство основных теорем

4.1. Доказательство теоремы 4. Основную теорему будем доказывать индукцией по количеству вершин.

База индукции. Граф, не содержащий вершин. Его конфигурация $(0,0,0)$ является хорошим вектором.

Шаг индукции. Воспользуемся ключевой леммой и удалим из графа Γ вершины так, чтобы вектор $\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')$ был бы хорошим. Тогда по предположению индукции вектор $\mathrm{Config}(\Gamma')$ хороший, так как Γ' – дистанционный граф с меньшим числом вершин. Поскольку сумма двух хороших векторов также является хорошим вектором, то вектор

$$\mathrm{Config}(\Gamma) = (\mathrm{Config}(\Gamma) - \mathrm{Config}(\Gamma')) + \mathrm{Config}(\Gamma')$$

– хороший. □

4.2. Доказательство теоремы 3.

Лемма 1. *Если вектор (u,v,w) – хороший, то он мажорирует вектор $(u,v,\frac{19}{3}u - \frac{50}{3}v)$.*

Доказательство леммы. Проверим лемму для базисных векторов:

$(0,0,1) \succeq (0,0,0)$
$(0,1,0) \succeq (0,1,-50/3)$
$(1,1,0) \succeq (1,1,-31/3)$
$(2,1,1) \succeq (2,1,-4)$
$(3,1,3) \succeq (3,1,7/3)$
$(4,1,9) \succeq (4,1,26/3)$
$(5,1,15) \succeq (5,1,15)$
$(6,1,22) \succeq (6,1,64/3)$
$(7,1,28) \succeq (7,1,83/3)$
$(7,2,11) \succeq (7,2,11)$

$(n+1,1,\lceil 3n^2/4\rceil) \succeq (n+1,1,19/3n - 31/3)$ при $n \geqslant 7$, так как при $n = 7$ вектор $(8,1,37) \succeq (8,1,34)$, а при увеличении n на 1 третья координата в левой части увеличивается как минимум на $\frac{3}{2}n - 1$, а в правой части на $19/3$.

Пусть для векторов u, v лемма верна. Из $a \succeq c, b \succeq d$ следует, что $a + b \succeq c + d$. Тогда из того, что векторы u и v мажорируют свои векторы, следует, что для $u + v$ лемма верна.

Из того, что при умножении векторов на положительную константу мажорирование сохраняется, следует, что если лемма верна для вектора u, то она верна для вектора λu при любом положительном λ.

Отношение мажорирования транзитивно, а значит, лемма верна для всех хороших векторов. $\square$

Из леммы следует, что конфигурация графа Г мажорирует вектор $(n, \lambda n, \frac{19-50\lambda}{3}n)$, значит, в графе на n вершинах не меньше, чем $\frac{19-50\lambda}{3}n$ ребер.

Литература

1. P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
2. A. Dainyak, *Independent sets in graphs.* A. Dainyak, A. Sapozhenko, *Discret. Math. Appl.*, **26**, No. 6, 323–346.
3. P. Erdős, *On sets of distances of n points.* – Amer. Math. Monthly **53** (1946), 248–250.
4. A. M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics **625** (2014), 93–109.
5. A. M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429–460.
6. A. M. Raigorodskii, *Combinatorial geometry and coding theory*, Fundamenta Informatica, 145 (2016), 359–369.
7. L. E. Shabanov, A. M. Raigorodskii, *Turán type results for distance graphs*, Discrete and Computational Geometry, Springer, 56 (2016), 814–832.
8. A. Soifer, *Mathemetical coloring book*, Springer, 2009.
9. M. Tikhomirov, *On computational complexity of length embeddability of graphs.* Tikhomirov M. Discret. Math. **339**, No. 11 (2016), 2605–2612.
10. P. Turán, *On an extremal problem in graph theory.* – Matematikai Fizikai Lapok, **48** (1941), 436–452 (in Hungarian).
11. А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, *О числах независимости дистанционных графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$. — Мат. заметки **86**, No. 5 (2009), 794–796.
12. А. Я. Канель-Белов, В. А. Воронов, Д. Д. Черкашин, *О хроматическом числе плоскости.* — Алгебра и анализ **29**, No. 5 (2017).
13. В. К. Любимов, А. М. Райгородский, *О нижних оценках чисел независимости дистанционных графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$. — Доклады РАН **427**, No. 4 (2009), 458–460.
14. Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, *Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$ *и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов.* — Матем. заметки **96**, No. 1 (2014), 138–147.

15. А. М. Райгородский, *Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов.* — Мат. сборник **196**, No. 1 (2005), 123–156.
16. А. А. Сагдеев, А. М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с запрещенным правильным симплексом.* — Докл. РАН **472**, No. 2 (2017), 127–129.
17. М. Тихомиров, *О задаче проверки дистанционной и мультидистанционной вложимости графа.* — Докл. Акад. Наук **468**, No. 3 (2016), 261-263.
18. Д. Д. Черкашин, А. М. Райгородский, *О хроматических числах пространств малой размерности.* — Докл. РАН **472**, No. 1 (2017), 11–12.

Shabanov L. E. Turán type results for distance graphs in infinitesimal plane layer.

In this paper we obtain the lower bound of number of edges in a unit distance graph Γ in an infinitesimal plane layer $\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^d$ which compares number of edges $e(\Gamma)$, number of vertices $\nu(\Gamma)$ and independence number $\alpha(\Gamma)$. Our bound $e(\Gamma) \geqslant \frac{19\nu(\Gamma)-50\alpha(\Gamma)}{3}$ is generalizing of previous bound for distance graphs in plane and a strong upgrade of Turán's bound when $\frac{1}{5} \leqslant \frac{\alpha(\Gamma)}{\nu(\Gamma)} \leqslant \frac{2}{7}$.

Московский Физико-технический институт
(государственный унверситет), ФИВТ,
Лаборатории продвинутой комбинаторики
и сетевых приложений МФТИ,
Институтский пер. д. 9
141700 Долгопрудный, Россия
E-mail: shabanovlev94@gmail.com

Поступило 3 ноября 2017 г.