Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

Е. Н. Симарова

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ЛИСТЬЕВ В ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ СВЯЗНОГО ГРАФА С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 6

§1. Введение

В этой статье мы будем рассматривать связный граф без петель и кратных ребер, в котором степень каждой вершины хотя бы 6. Обсудим стандартные обозначения, которые будут использованы в этой работе. Количество вершин графа G обозначим $v(G)$, а минимальную степень вершин графа G – через $\delta(G)$.

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $n(G)$ максимальное число висячих вершин в остовном дереве графа.*

Определение 2. *Для связного графа G обозначим через $t(G)$ отношение максимального числа висячих вершин в остовном дереве графа G к количеству вершин графа.*

Начиная с 1981 было опубликовано несколько работ, в которых доказывались оценки снизу на $n(G)$ и $t(G)$. В 1981 году Линиал в своей работе предположил, что $n(G) \geqslant \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G) + c$, при $\delta(G) \geqslant 3$, а константа $c \geqslant 0$ зависит только от $\delta(G)$. И в самом деле, для любого $d \geqslant 3$ несложно построить бесконечную серию примеров $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ с $\delta(G_n) = d$, где $\lim_{n->\infty} t(G_n) = \frac{d-2}{d+1}$, исходя из чего можно понять то, что для тех $\delta(G)$, для которых оценка Линиала выполняется, она же является асимптотически точной.

Для $\delta(G) = 3$ эта задача была решена в 1991 году Клейтманом и Вестом. В своей статье [2] они доказали оценку $n(G) \geqslant \frac{1}{4}v(G) + 2$. Эта оценка – точная, она достигается на бесконечной серии примеров. Там же была доказана оценка для $\delta(G) = 4$, равная $n(G) \geqslant \frac{2}{5}v(G) + \frac{8}{5}$. Позже Карпов [4] доказал, что более сильная оценка $n(G) \geqslant \frac{2}{5}v(G) + 2$ верна для всех графов с минимальной степенью вершин $\delta(G) = 4$, кроме

Ключевые слова: дистанционный граф, число независимости, Турановские оценки.

трех графов-исключений, и достигается на бесконечной серии примеров. В 1992 году Григгс и Ву [1] доказали оценку $n(G) \geqslant \frac{1}{2}v(G) + 2$ для $\delta(G) = 5$. Отсюда мы видим, что для малых $\delta(G)$ оценка Линиала верна. Все эти оценки были получены с помощью метода мертвых вершин, о котором будет рассказано чуть позже. Но для $\delta(G) \geqslant 6$ оценки Линиала (да и какие-то другие точные оценки) на настоящий момент не доказаны. Более того, из работ Алона [3] и других математиков следует, что при больших $\delta(G)$ эта оценка просто неверна. Однако вопрос о том, как обстоит дело при малых $\delta(G)$, и когда оценка Линиала перестает быть верной, остается открытым до сих пор.

В этой работе мы будем доказывать, что $t(G) \geqslant \frac{11}{21}$ для связного графа G с $\delta(G) = 6$. Данная оценка не является точной, но это наиболее точная нижняя оценка из доказанных на настоящий момент. При этом, верхняя оценка до сих пор остается получаемой из гипотезы Линиала, то есть $\frac{4}{7}$.

Как уже было сказано, все доказанные до сих пор оценки были получены с помощью метода мертвых вершин. Мы будем применять этот же метод и в данной работе. Он заключается в последовательном конструировании остовного дерева с постепенным "омертвением" висячих вершин из уже построенного поддерева. Будем последовательно строить дерево, по шагам добавляя в него вершины.

Определение 3. *Будем называть поддеревом уже построенное дерево и обозначать множество его вершин через S. Множество вершин, не входящих в поддерево, будем обозначать через T.*

Определение 4. *Мертвыми называются вершины, добавленные в остовное поддерево S, которые являются в этом поддереве висячими вершинами и не имеют смежных вершин вне поддерева.*

Будем последовательно добавлять вершины в множество S. Заметим, что при последовательном построении остовного дерева, если вершина стала мертвой, то она не перестанет быть мертвой в дальнейшем, и, что более важно, останется висячей, как бы мы не добавляли дальнейшие вершины в поддерево.

Теперь будем рассматривать формулу

$$\frac{8}{5}u(S) + \frac{1}{5}b(S) - v(S),$$

где $u(S)$ – висячие вершины поддерева S, $b(S)$ – мертвые вершины, а $v(S)$ – количество вершин поддерева S. Будем последовательно строить поддерево, удовлетворяющее следующим свойствам: на каждом шагу будем стараться добавлять вершины так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{8}{5}u_1 + \frac{1}{5}b_1 - v_1 \geqslant 0,$$

где u_1 – это приращение количества висячих вершин после добавления, b_1 – это количество мертвых вершин, появившихся после текущего добавления, а v_1 – это приращение количества вершин в S. Если бы нам удалось все время так добавлять вершины, то у нас получилась бы оценка $t(G) \geqslant \frac{5}{9}$. К сожалению, есть случаи, когда так добавлять вершины не получается, поэтому оценка получается меньше.

§2. Начальные построения. Некоторые общие случаи добавления вершин

2.1. Начальное дерево. Возьмем вершину и 6 смежных с ней. У нас есть 7 вершин, 6 висячих вершин. Тогда $\frac{8}{5}u + \frac{1}{5}b - v = \frac{8}{5} \cdot 6 - 7 = \frac{13}{5}$.

2.2. Добавление к S вершины, которая смежна с вершиной из S, не являющейся висячей. Добавляем ее к данной вершине. Получается, что $u_1 = 1, b_1 \geqslant 0, v_1 = 1$, а значит, $\frac{8}{5} - 1 \geqslant 0$, и неравенство сохраняется.

2.3. Наличие вершины в S, имеющей хотя бы трех соседей из T. Если их ровно 3, то подвесим их на данную вершину. Здесь $u_1 = 2, b_1 \geqslant 0, v_1 = 3$, приращение составит $\frac{8 \cdot 2}{5} - 3 = \frac{1}{5} \geqslant 0$. Если их более трех, то добавим таким образом три вершины, а все остальные вершины, соседствующие с данной, после этой операции будут соседствовать уже не с висячей вершиной в поддереве, мы сможем добавить эти вершины по пункту 2.2.

2.4. Наличие вершины из T, смежной с вершиной из S и с хотя бы четырьмя вершинами из T. Если данная вершина (назовем ее a) смежна с 5 вершинами из T, то добавим их в S (см. рис. 1). Получим $u_1 = 4, b_1 \geqslant 0, v_1 = 6$, а $\frac{8}{5} \cdot 4 - 6 = \frac{2}{5} \geqslant 0$. Если данная вершина смежна более чем с 5 вершинами, в начале добавим пять вершин, а потом все остальные с помощью пункта 2.2.

Остался случай, когда вершина a смежна ровно с четырьмя вершинами из T. Так как степень данной вершины хотя бы 6, то есть хотя

бы 2 вершины из S, которые смежны с a (назовем их b и c). Они будут висячими в поддереве, так как иначе мы смогли бы добавить вершину к поддереву по пункту 2.2. Если среди этих вершин есть та, которая в T смежна только с a или ее соседями (пусть это b), то добавим a и ее соседей, прикрепив a к c. Тогда b станет мертвой и неравенство сохранится: $\frac{8}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} - 5 = 0$.

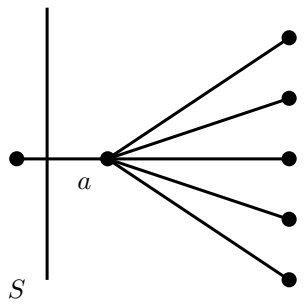

Рис. 1

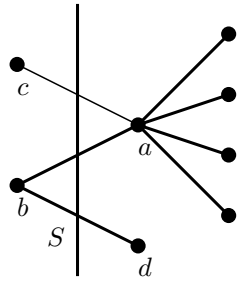

Рис. 2

Если b не станет мертвой, то она имеет соседа d, отличного от a и ее соседей (см. рис. 2). Тогда, прикрепив a и d к b, а смежные с a к a, получится, что $u_1 = 4$, $b_1 \geqslant 0$, $v_1 = 6$, и $\frac{8 \cdot 4}{5} - 6 = \frac{2}{5} \geqslant 0$, а значит неравенство сохранится.

§3. Есть вершина из T, несмежная с S

Ранжируем все вершины по удаленности от S (граф связный, поэтому так можно сделать). Есть вершина, несмежная с S, поэтому уровней будет хотя бы 2. Возьмем вершину на втором уровне (назовем ее b). Тогда она будет смежна с какой-то вершиной уровня 1 (назовем ее a), а a будет смежна с какими-то вершинами поддерева.

3.1. У a есть хотя бы один сосед из T, который не является смежным с b. Тогда, если мы подвесим a к поддереву, к a подвесим b и соседей a, не являющихся соседями b, а к b всех его оставшихся 5 соседей, то всего добавим к S 8 вершин, одна вершина перестанет быть висячей, но появится 6 новых висячих вершин (5 соседей b, все, кроме a, и сосед a, не смежный с b). Получится $\frac{8 \cdot 5}{5} - 8 = 0$. (см. рис. 3)

Значит, все смежные с a вершины вне поддерева смежны также и с b.

3.2. У вершины a есть сосед из S, который имеет двух соседей из T. Назовем этого соседа d. Тогда у d есть сосед из T, отличный от a. Пусть это e. Рассмотрим 2 случая.

3.2.1. *e не является соседом b.* Тогда, если мы подвесим к d вершины a и e, к a подвесим b, а к b всех его оставшихся 5 соседей, то всего добавим к S 8 вершин, одна вершина d перестанет быть висячей, но появится 6 новых висячих вершин (e и 5 соседей b, все, кроме a). Получится $\frac{8\cdot 5}{5} - 8 = 0$ (см. рис. 4).

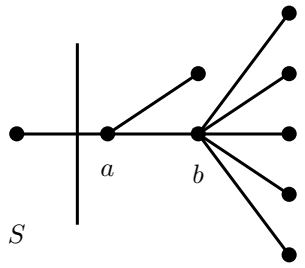

Рис. 3

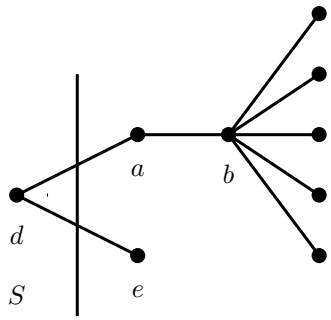

Рис. 4

3.2.2. *e является соседом b.* Теперь a и e симметричны. Если у e есть сосед из S, который смежен с вершиной из T, не являющейся соседом b, то по предыдущему пункту мы можем добавить 8 вершин с сохранением неравенства.

Значит, все вершины из S, смежные с a или e, могут быть смежны только с a, e, b и соседями b. Таким образом, если мы подвесим a на одну из вершин, на a подвесим b, а на b оставшиеся 5 вершин его соседей, то все вершины, которые были в S смежны с a или e, за исключением той, на которую мы подвесили a, станут мертвыми. Предположим, что суммарно вершин из S, смежных с a или e было хотя бы 4 (см. рис. 5). Тогда при добавлении вышеуказанной конструкции добавятся 7 вершин, она из вершин S перестанет быть висячей, 3 оставшиеся вершины, которые были смежны с a или e, станут мертвыми и появятся 5 новых висячих вершин (соседи b кроме a). То есть $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{1\cdot 3}{5} - 7 = 0$.

Заметим, что у a есть сосед из S, значит их хотя бы 3 (иначе выполнен пункт 2.4). Аналогично с e. Если получилось, что суммарно с

a и с e смежны не более 3-х вершин из S, значит их ровно 3, и эти 3 вершины смежны и с a, и с e и больше из T соседей не имеют. Если мы подвесим a на одну из вершин, на a подвесим b, а на b оставшиеся 5 ее соседей, то оставшиеся 2 вершины станут мертвыми. Также заметим, что e тоже станет мертвой, так как, аналогично случаю с a, все ее соседи вне поддерева будут смежны с b, то есть будут добавлены. Тогда мертвых вершин все равно станет 3 и $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{1\cdot 3}{5} - 7 = 0$ (см. рис. 6).

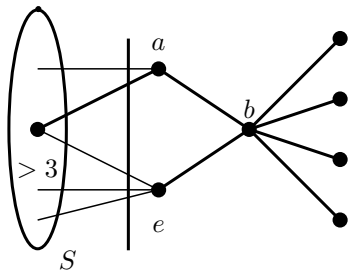

Рис. 5

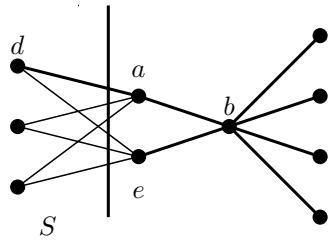

Рис. 6

3.3. У вершины a все соседи из S не имеют смежных из T, кроме a. Значит, все вершины из S, которые смежны с a, не имеют больше соседей вне S. Если их хотя бы 4, добавим к S конструкцию, в которой a добавлено с помощью одной из этих вершин, к a добавлено b, а к b добавлены все ее соседи (см. рис. 7). Получится, что одна вершина перестанет быть висячей, но появится 5 новых висячих вершин (5 соседей b, все кроме a) и 3 мертвых (соседи a из S, к которым мы ничего не крепили). Получится $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{1\cdot 3}{5} - 7 = 0$.

Таким образом, единственный оставшийся вариант: есть ровно 3 вершины, смежные с a из S и 3 вершины, смежные с a из T (b и еще две, назовем их c и d).

Лемма 1. *Вершины b, c, d попарно смежны и не смежны с S.*

Доказательство. Заметим, что по пункту 3.1 c и d соседствуют с b. Поймем, что c, d не могут быть смежны с S. Предположим, что c будет смежна с какой-то вершиной из S (см. рис. 8). Эта вершина не будет смежна ни с чем, кроме c, иначе будет выполнен пункт 3.2. Тогда при добавлении a к S, b к a, а соседей b к b, получится, что у нас появились две мертвые вершины из-за a и еще хотя бы одна мертвая вершина

из-за c. Получится $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{1\cdot 3}{5} - 7 = 0$. Значит, c и d тоже несмежны с S, следовательно по пункту 3.1 c и d смежны друг с другом. □

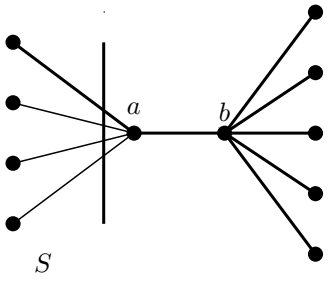

Рис. 7

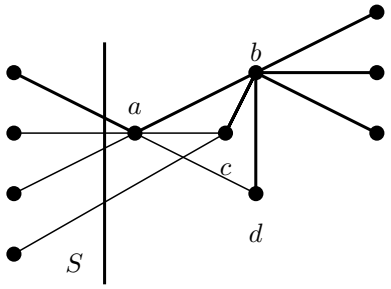

Рис. 8

Лемма 2. *У каждой из вершин b, c, d ровно 6 соседей.*

Доказательство. Если бы у какой-то из вершин b, c, d было хотя бы 7 соседей, то мы смогли бы добавить их все, подвесив эту вершину к a, а a к S, и получилось бы $\frac{8\cdot 5}{5} + \frac{2}{5} - 8 \geqslant 0$. □

Лемма 3. *Любой сосед b, кроме a, не может иметь соседей из S.*

Доказательство. Предположим противное, обозначим соседа b, смежного с S, через e. По лемме 1 это не c и не d. Тогда подвесим e к поддереву, b к e, соседей b к b (см. рис 9). Все соседи a из S при таком добавлении станут мертвыми, поэтому $u_1 = 4, b_1 \geqslant 3, v_1 = 7$, и приращение будет равно $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{3}{5} - 7 \geqslant 0$. Таким образом, соседи b, кроме a, не могут быть смежны с вершинами из S. □

Лемма 4. *Любой сосед b, за исключением a, может иметь не более двух соседей, не смежных с b.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и вершина e, являющаяся соседом b, имеет хотя бы трех соседей, не смежных с b (по лемме 3 они все из T). Тогда мы прикрепляем a к S, b и всех его оставшихся соседей к a, а к e прикрепляем еще 3-х новых соседей (см. рис 10). Получится $\frac{8\cdot 6}{5} + \frac{2}{5} - 10 = 0$. □

Следствие 1. *Любой сосед b смежен хотя бы с одной из вершин c и d.*

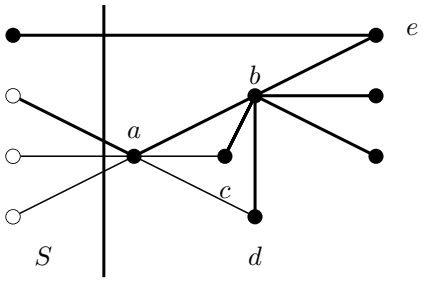

Рис. 9

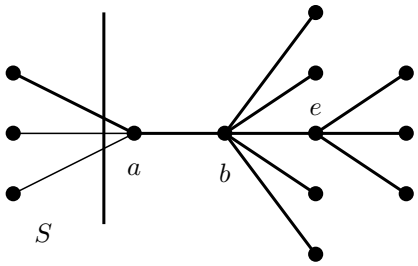

Рис. 10

Доказательство. Предположим, что это не так, и один из соседей b не смежен ни с c, ни с d, обозначим его через e. Тогда вершина e не смежна ни с одной из вершин a, c, d. Следовательно у e будет еще хотя бы 3 соседа, не смежных с b, а это противоречит леммам 3 и 4. □

Аналогично, в условиях леммы 4 и следствия 1 вместо b могут быть подставлены вершины c и d.

Обозначим трех оставшихся соседей b, кроме a, c, d, через e, f, g.

Лемма 5. *Вершины e, f, g попарно смежны.*

Доказательство. Не умаляя общности, e и f несмежны. Тогда e, f должны быть смежны с каждым из b, c, d (иначе у этой вершины должно быть хотя бы 3 соседа кроме соседей b, что уже разбиралось). Вершина g должна быть смежна или с c, или с d, или с обеими (по тем же причинам). Предположим, что g смежна с c. Тогда у c уже есть 6 соседей, а значит, при добавлении к S конструкции, в которой a подвешивается к S, b подвешивается к a, а c, d, e, f, g подвешиваются к b, получается, что $v_1 = 7$, $u_1 = 4$, $b_1 \geqslant 3$, так как мертвыми становятся 2 вершины из S, смежные с a и вершина c (см. рис. 11). Получаем приращение $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{3}{5} - 7 = 0$. Значит, e, f, g – попарно смежны. □

Теперь рассмотрим соседей b и c, кроме a, b, c, d. У b и у c их по 3 штуки. По лемме 3 они не из S. Предположим, что b и c не имеют общих соседей. Тогда крепим a к S, b, c, d к a, соседей b к b, соседей c к c (см рис 12). Хотим прикрепить 10 вершин, появятся 6 висячих вершин $(+7-1)$, 2 мертвые вершины (соседи a из S), итого $\frac{8\cdot 6}{5} + \frac{2}{5} - 10 = 0$.

Предположим, что соседи b и c пересекаются по одной вершине (e, f, g – соседи b, а g, h, i – соседи c). По следствию 1 тогда e, f, h, i

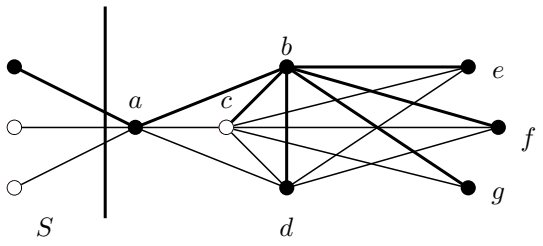

Рис. 11

будут соседями d. Таким образом, у d будут соседями a, b, c, e, f, h, i, а это противоречит лемме 2.

Если среди этих вершин две вершины – общие (e, f, g – соседи b, а f, g, h – соседи c), тогда по следствию 1 вершины e, h будут соседями d. Также среди соседей d будет либо f, либо g (так как по следствию 1 все соседи d будут также соседями b или c), не умаляя общности, будем считать, что это f. Заметим, что по лемме 5 вершины e, f, g – попарно смежны (как соседи b), e, f, h – попарно смежны (как соседи c), f, g, h – попарно смежны (как соседи d). Тогда у f уже будет 6 соседей, а именно b, c, d, e, g, h. Предположим, что у f больше нет соседей. Посмотрим на вершину e, она не может быть смежна с вершинами a и c. Из уже обозначенных вершин e смежна с вершинами b, d, f, g, h. Значит, у e еще есть хотя бы один сосед, кроме уже обозначенных вершин, обозначим его через i. По лемме 3 мы имеем $i \in T$. Заметим, что если добавить вершину a к S, вершины b, c, d к a, вершины e, f, g к b и вершины h, i к e (см. рис. 13), то мы добавим 9 вершин, 5 новых висячих вершин ($+6-1$), 5 мертвых вершин (2 соседа a из S, а также вершины c, d, f). Получится, что $\frac{8\cdot 5}{5} + \frac{5}{5} - 9 = 0$.

Теперь перейдем к случаю, когда у f есть еще хотя бы 1 сосед, обозначим его через k. Если вершина k смежна еще хотя бы с тремя вершинами кроме уже названных, то подвесим вершину a к S, вершины b, c, d к a, вершины e, f, g к b, вершины k, h к f, а трёх соседей k к k. Тогда мы добавим 12 вершин, 7 новых висячих вершин ($+8-1$), 4 мертвых вершины (2 соседа a из S, а также вершины c, d). Получится, что $\frac{8\cdot 7}{5} + \frac{4}{5} - 12 = 0$.

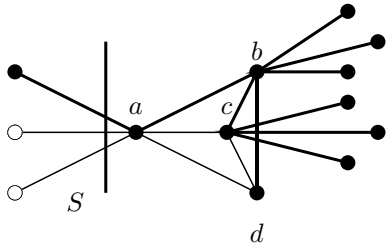

Рис. 12

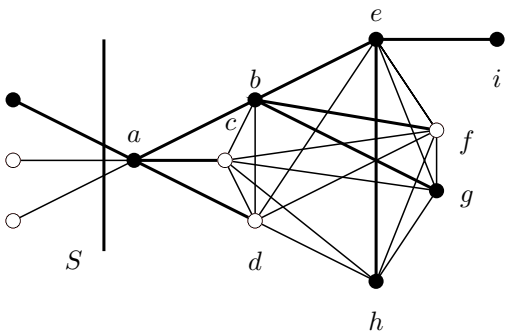

Рис. 13

Также поймем, что вершина k не может быть смежна с вершинами из S. Если это не так, тогда у нас ситуация, когда вершина k смежна с S и с f, а f смежна с 7 вершинами из T. Это симметрично нашим случаям добавления для a и b. Случаи добавления a и b мы умеем рассматривать все, кроме того, когда у a ровно 3 соседа из S, и они все смежны в T только с a. Это как раз случай, рассматриваемый в этом подпараграфе. По лемме 2 у b должно быть ровно 6 соседей, иначе мы умеем увеличивать S с сохранением неравенства. Но у f уже 7 соседей, значит мы умеем рассматривать и этот случай.

Таким образом, k смежна не более чем с двумя еще не названными вершинами из T и не смежна с вершинами из S. Из уже названных вершин она может быть смежна только с e, f, g, h, значит смежна со всеми ними. Посмотрим на вершину e. Она смежна с h и с k, но по лемме 4 не может иметь более двух смежных кроме соседей b, значит

больше ни с кем не смежна. Аналогично g, h. Таким образом, если мы добавим вершину a к S, вершины b, c, d к a, вершины e, f, g к b и вершины k, h к f, то прибавится 9 вершин, из них 5 висячих $(+6-1)$ и 7 мертвых (2 соседа a, а также вершины c, d, e, g, h). Получится, что $\frac{8\cdot 5}{5} + \frac{7}{5} - 9 \geqslant 0$ (см. рис.14).

Остался случай, когда у b и c соседи совпадают (назовем их e, f, g). Поймем, что они же будут и соседями d. По следствию 1 соседи d будут смежны либо с b, либо с c, а еще их должно быть ровно 3, значит это ровно e, f, g (см. рис.15). Тогда, если добавить вершину a к S, вершины b, c, d к a, вершины e, f, g к b, то получится, что мы добавили 7 вершин, увеличили число висячих вершин на 4 и получили еще 4 мертвых вершины (2 вершины из S, смежные с a, а еще c, d). Итого: $\frac{8\cdot 4}{5} + \frac{4}{5} - 7 \geqslant 0$.

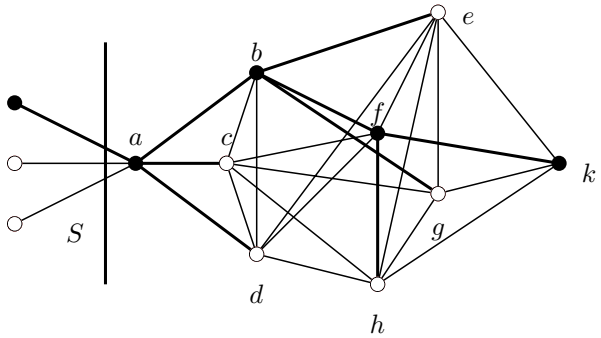

Рис. 14

§4. Невосполнимые потери

4.1. Новые обозначения и общая концепция. Давайте добавим всевозможные конструкции, при которых нужное неравенство

$$\frac{8}{5}u_1 + \frac{1}{5}b_1 - v_1 \geqslant 0$$

выполняется. Если все вершины добавились, то все хорошо. Предположим, что в некоторый момент у нас ситуация, когда мы не можем добавить вершины ни одним из вышеперечисленных способов, и $T \neq \varnothing$. Тогда все вершины из T смежны с уже построенным поддеревом S,

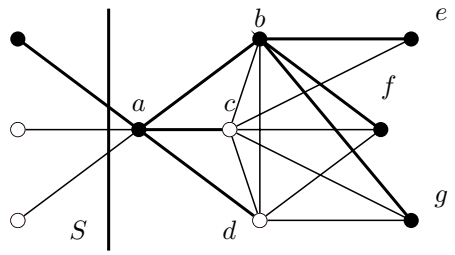

Рис. 15

причем по пункту 2.4 у каждой вершины из T хотя бы 3 соседа в S. Вершины из S смежны не более чем с 2-мя вершинами из T по пункту 2.3. Нам хочется, чтобы они были смежны не более чем с одной.

Определение 5. *Назовем* галкой *три вершины: вершину из S и две вершины из T, смежные с первой.*

Выделим минимальное число непересекающихся галок таким образом, чтобы все вершины из S, не входящие ни в одну из галок, были смежны не более чем с одной вершиной из T, не входящей в выделенные галки.

Введем новые обозначения. Множеством A назовем множество вершин из S, которые входят в галки, множеством B назовем множество вершин из T, которые входят в галки, множеством C назовем множество вершин из S, которые не входят в галки и смежны с какими-то вершинами из T, множеством D назовем множество вершин из T, которые не входит в галки. Назовем E множество вершин из D, смежных с B, положим $F = D \setminus E$.

Заметим, что любая вершина из множества A принадлежит некоторой галке, которая содержит ее и двух ее соседей из T. Как мы заметили ранее, у любой вершины из S (в частности, у любой вершины из A) может быть не более двух соседей из множества T, поэтому, любая вершина из множества A имеет ровно двух соседей из T, находящихся с ней в одной галке, и больше соседей из множества T не имеет. Таким образом, вершины из множества A могут быть смежны с вершинами из B и не смежны с вершинами из множества D. К тому же, любая вершина из множества B смежна ровно с одной вершиной

из множества A (а именно с той, с которой находится в одной галке). Любая вершина из множества T имеет хотя бы трех соседей в S, следовательно вершина из множества B смежна еще хотя бы с двумя вершинами из множества C. Любая вершина из C имеет ровно одного соседа в D (потому что мы так строили наши множества).

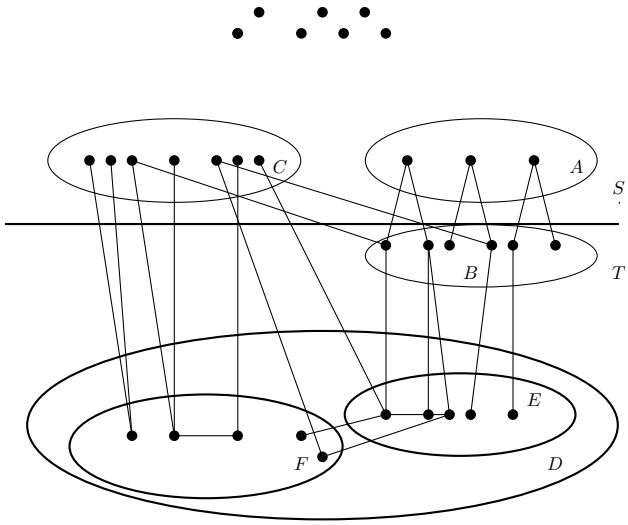

Рис. 16

В конце этого параграфа произойдет *глобальное добавление вершин*, в результате которого вершины из множества B будут добавлены к S с помощью уже выделенных галок, то есть они будут подвешены к вершинам множества A. Поэтому, если после некоторой операции добавления окажется, что у некоторой висячей вершины из множества C остался в T только один сосед, который к тому же лежит в множестве B, то после глобального добавления эта вершина станет мертвой. Поэтому давайте посчитаем ее мертвой уже после первой операции добавления, когда все ее соседи из множества T лежат в множестве B. При этом, когда происходит операция с добавлением вершин из B, то все вершины из C, которые станут мертвыми в результате добавления вершин из множества B, мы не будем учитывать в мертвых вершинах, ведь их омертвение будет учитываться в другом

месте. **Все это происходит только в рамках раздела 4**, когда он закончится, то мы вернемся к нашим обычным добавлениям и будем учитывать омертвения вершин только в те моменты времени, когда они происходят.

Замечание. Мы сейчас будем добавлять вершины в S, поэтому наши выделенные множества будут меняться. При наших локальных добавлениях (это все добавления, произведенные в этом параграфе, кроме глобального), если мы будем добавлять вершины из A или B, то только со всеми их соседями. При этом, если вершина из множества B добавлена в S, то будет добавлена в S вся галка, причем она будет добавлена таким образом, чтобы вершины этой галки, которые были в множестве B, подвешены к вершине галки из множества A. Тогда эту галку мы исключаем из множеств A и B. При таком добавлении нужно следить, чтобы мы не считали мертвыми вершины из C, которые становятся мертвыми в связи с добавлением вершин из галки, но мы так и делаем.

Поймем, что происходит, когда мы добавляем какие-то вершины из D. После локального добавления множество S увеличивается, и все вершины, смежные с оставшимся T мы относим к множеству C. При этом, свойство, заключающееся в том, что вершина из C смежна ровно с одной вершиной из D, могло нарушиться. Давайте поймем, что можно сделать еще несколько добавлений, после которых множество C опять будет удовлетворять этому свойству (в результате этих добавлений, множество C тоже меняется). Предположим, что в множестве C теперь есть вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из D, обозначим эту вершину через x, она смежна с $y_1, \dots y_m$ из D. Заметим, что каждая из вершин $y_1, \dots, y_m$ смежна еще хотя бы с тремя вершинами из C, которые после добавления $y_1, \dots, y_m$ к x будут иметь соседей в T только из множества B (потому что любая вершина из D исходно имела хотя бы трех соседей из C, удовлетворяющих этим свойствам). Если учитывать омертвение этих вершин сейчас, а не после глобального добавления,то получится, что стало хотя бы $3m$ мертвых вершин. Поэтому наше приращение составит $\frac{8\cdot(m-1)}{5} + \frac{3\cdot m}{5} - m = \frac{6m-8}{5} \geqslant 0$ при $m \geqslant 2$. После этой операции мы опять добавляем в C все вершины, которые смежны с T и убираем те, которые уже не смежны с T. Так как вершин из множества T конечное число, то этот процесс когда-нибудь завершится, а значит, нужное условие будет выполнено. При этом, множества A и B не увеличиваются.

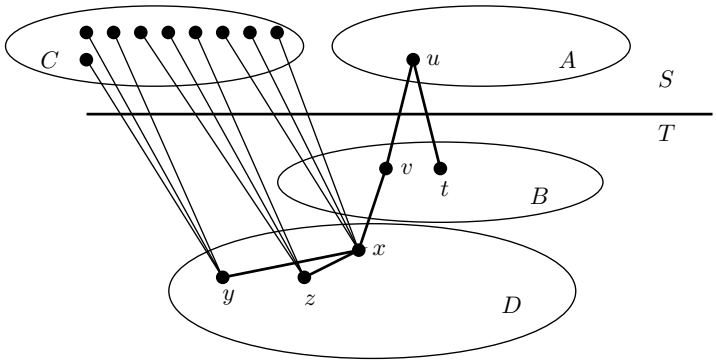

Рис. 17

4.2. Локальные добавления вершин.

4.2.1. *Если вершина из B соединена хотя бы с двумя вершинами из E.* Рассмотрим эту вершину, назовем ее x, она входит в некоторую галку, также в эту галку входят вершины t, u (u из поддерева). Также x смежна хотя бы с двумя вершинами из E, обозначим их через $y_1, \ldots, y_m$. Тогда добавим t, x прикрепленные к u, а $y_1, \ldots, y_m$ прикрепим к x. Заметим, что $y_1, \ldots, y_m$ из D (см. рис. 17), поэтому у каждого из них есть хотя бы 3 соседа из C. После данного добавления все эти соседи из T будут смежны только с вершинами из B и их можно считать мертвыми уже сейчас.

Значит, наше приращение составит $\frac{8\cdot m}{5} + \frac{3m}{5} - (m+2) = \frac{6m-10}{5} \geqslant 0$ при $m \geqslant 2$. *Таким образом, каждая вершина из B смежна не более чем с одной вершиной из E*

4.2.2. *Если вершина из E имеет хотя бы двух соседей из D.* Рассмотрим эту вершину, назовем ее x, она смежна с какой-то вершиной из галки, назовем ее v, пусть также в эту галку входят вершины t, u (u из поддерева). Вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами из D, будем считать что ровно с двумя: y и z. Исходно у каждой оставшейся вершины есть хотя бы 3 смежные вершины из S, на момент, когда мы только начали эту процедуру (то есть, из A и C), а вершина из D смежна с A быть не может. Тогда у каждой из x, y, z хотя бы по 3 смежных вершины из C (см. рис 18) . Значит, при добавлении вершин в поддерево соответствующим образом: v, t крепятся к u, к v крепится

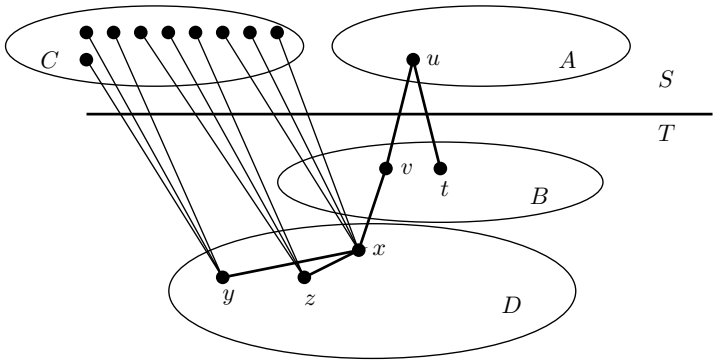

Рис. 18

x, а y, z крепятся к x, наше приращение будет равно $\frac{8\cdot 2}{5} + \frac{1\cdot 9}{5} - 5 = 0$. Таким образом, мы безболезненно добавили вершины вместе с галкой.

4.2.3. *Вершины множества R.* Пусть R – множество смежных с E вершин из F. Поймем, что в R могут находиться только вершины, у которых есть 5 смежных из множества C и ровно одна из E. Действительно, пусть в R есть вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из T, назовем ее x. Она смежна с двумя вершинами из T (обозначим их через y и z), значит, эти вершины находятся в D. Прикрепим x к S через одну из смежных вершин из C, а y, z к x. Получится, что $u_1 = 1, v_1 = 3, b_1 \geqslant 8$, потому что каждая вершина из D смежна хотя бы с тремя вершинами из C. Неравенство будет иметь вид: $\frac{8}{5} + \frac{8}{5} - 3 \geqslant 0$. Если же у вершины из R хотя бы 6 смежных из множества C, тогда прикрепим данную вершину на одну из смежных с ней из C и получим неравенство $\frac{8\cdot 0}{5} + \frac{5}{5} - 1 = 0$.

4.3. Глобальное добавление вершин. Предположим, что мы больше не можем делать предыдущие операции. Это значит, что вершины из B в T могут быть соединены не более чем с одной вершиной из E, а также могут быть соединены с вершинами из множества B. Вершины из множества E могут быть соединены только с вершинами из множеств B, C, R и E, причем, по пункту 4.2.2 любая вершина из E соединена суммарно не более чем с одной вершиной из множеств R или E. То есть, оставшиеся вершины из T никак не соединены с вершинами из групп A, B, E, R. Тогда мы подвесим вершины из B к вершинам

из A (то есть, как галки были, так и подвешиваем), вершины из E подвешиваем к вершинам из B (если у вершины из E несколько соседей из B, то подвешиваем ровно к одной), а вершины из R подвешиваем к вершинам из E. Вся эта система не смежна ни с одной из оставшихся вершин из D. Посмотрим, что стало после этих добавлений.

Пусть вершин из $A - x$, тогда вершин из $B - 2x$. Назовем *веткой вершины* q множество вершин, которые прикреплены в данном добавлении и имеют среди предков вершину q. Тогда появилось $2x$ веток, предками которых являются вершины из множества B. В каждой из веток в итоге будет хотя бы одна висячая вершина, поэтому новых висячих вершин стало хотя бы $2x$. Заметим, что эти вершины станут мертвыми (ибо вершины, которые остались в T, не будут смежны с вершинами из групп A, B, E, R), следовательно приращение количества висячих вершин хотя бы x и мертвых висячих минимум $2x$.

Теперь посмотрим на множество E. Пусть в нем y вершин, смежных хотя бы с двумя вершинами из множества B и z вершин, смежных ровно с одной вершиной из множества B. Каждая из этих вершин смежна хотя бы с тремя вершинами из C, потому что это верно для всех вершин множества D. Но посмотрим более внимательно на вершины, смежные ровно с одной вершиной из множества B. Каждая из них по пункту 4.2.2 может иметь не более одного соседа из множества D, а значит, имеет хотя бы четырех соседей из S. Все эти соседи лежат в C и станут мертвыми после добавления. Значит, количество мертвых вершин увеличится еще хотя бы на $3y + 4z$.

Если в множестве R есть r вершин, тогда у каждой из них хотя бы 5 соседей из C, поэтому добавится еще $5r$ висячих вершин. Тогда приращение будет равно $\frac{8x}{5} + \frac{2x+3y+4z+5r}{5} - 2x - y - r - z = -\frac{2y+z}{5}$. Мы уменьшили нашу сумму. К этому мы вернемся позже.

Замечание. Заметим, что предыдущая операция добавления с потерями может быть проведена только один раз. Докажем это от противного. Пусть в последующих случаях оказалось, что некоторая вершина из S имеет ровно двух соседей из T. Пусть вершина из S – это x, а y, z – вершины из T, смежные с x. Заметим, что y, z были в T и при прошлом добавлении, причем они были не из B, так как вершины из B уже были все добавлены. Поэтому у y и z есть по 3 смежные вершины из тогдашнего C, которые теперь смежны в T только с y или z. Значит, если мы прикрепим y, z к x, тогда $u_1 = 1, b_1 \geqslant 6, v_1 = 2$, и неравенство $\frac{8}{5} + \frac{6}{5} - 2 \geqslant 0$ выполнено.

Поэтому, сделав не более чем одну операцию, приводящую нас к потерям, мы можем свести все к случаю, когда все вершины из S имеют не более чем одну смежную вершину из T.

§5. Все вершины поддерева имеют не более одного соседа из T

Заметим, что в данном случае, каждая из вершин имеет не более трех соседей из T, ибо случай четырех и более соседей уже обсуждался.

5.1. В T есть вершина, смежная ровно с тремя вершинами из T. Пусть это вершина x, она смежна ровно с тремя вершинами из T, назовем их a_1, a_2, a_3. Подвесим x к S, а к x подвесим a_1, a_2, a_3. Заметим, что каждая из этих четырех вершин смежна хотя бы с тремя вершинами из S, почти все из которых стали мертвыми после этого добавления (все кроме той вершины, к которой мы x подвешивали). Тогда неравенство выглядит так: $\frac{8\cdot 2}{5} + \frac{11}{5} - 4 \geqslant 0$.

Значит, каждая вершина из T имеет не более двух соседей в T, а следовательно, имеет хотя бы 4 смежные вершины из S.

5.2. В T есть вершина, смежная ровно с двумя вершинами из T. Пусть это вершина x, смежная ровно с двумя вершинами из T. Назовем их a_1, a_2. Подвесим x к S, а к x подвесим a_1, a_2. Заметим, что каждая из этих трех вершин смежна хотя бы с четырьмя вершинами из S, почти все из которых стали мертвыми после этого добавления (все кроме той вершины, к которой мы x подвешивали). Тогда неравенство выглядит так: $\frac{8}{5} + \frac{11}{5} - 3 \geqslant 0$.

Значит, каждая из вершин множества T имеет не более одного соседа в T, а следовательно, имеет хотя бы 5 смежных вершин из S.

5.3. В T есть вершина, не смежная с вершинами из T. Тогда у нее есть 6 соседей из S, мы подвесим эту вершину к S и 5 вершин станут мертвыми. Поэтому приращение будет равно $\frac{5}{5} - 1 = 0$.

5.4. В T все вершины смежны ровно с одной вершиной из T. Пусть это вершина x, смежная ровно с одной вершиной из T, назовем ее y. Подвесим x к S, а к x подвесим y. Заметим, что каждая из этих двух вершин смежна хотя бы с пятью вершинами из S, почти все из которых стали мертвыми после этого добавления (все кроме той вершины, к которой мы x подвешивали). Также вершина y тоже стала мертвой и тогда неравенство выглядит так: $\frac{10}{5} - 2 = 0$.

§6. Итоги

Рассмотрим момент, когда в S оказались все вершины графа G. Почти во всех случаях вершины к S добавлялись таким образом, что неравенство

$$\frac{8}{5}u + \frac{1}{5}b - v \geqslant 0$$

выполнялось. Проблемы могут возникают только в случае, когда мы добавляем галки. Причем, по замечанию, такую операцию мы проведем не более чем один раз. Давайте более подробно рассмотрим этот случай. Заметим, что по пункту 4.2.2 вершина множества E может быть соединена не более чем с одной вершиной не из S и не из B. Пусть $x(G)$ – количество вершин в A, $y(G)$ – количество вершин в E, имеющих хотя бы 2 соседа из B, а $z(G)$ – количество вершин в E, которые смежны ровно с одной вершиной из B. Тогда

$$\frac{8}{5}u + \frac{1}{5}b - v \geqslant -\frac{2y(G) + z(G)}{5}.$$

Заметим, что одному такому добавлению соответствуют $x(G)$ вершин из A, $2x(G)$ вершин из B, $y(G) + z(G)$ вершин из E, $3y(G) + 4z(G)$ вершин из C, которые после такого добавления стали мертвыми (по пункту 4.3). Таким образом, получится, что

$$\frac{8}{5}u(G) + \frac{1}{5}b(G) - v(G) \geqslant -\frac{2y(G) + z(G)}{5},$$

причем $v(G) \geqslant 3x(G) + 4y(G) + 5z(G)$. Еще одно замечание касается того, что в каждом из добавлений $2y(G) + z(G) \leqslant 2x(G)$, ибо все вершины множества E были смежны с B, а мы доказывали, что каждая вершина из B смежна не более чем с одной вершиной из E. Тогда заметим, что

$$\frac{9}{5}u(G) \geqslant \frac{8}{5}u(G) + \frac{1}{5}b(G) \geqslant v(G) - \frac{2y(G) + z(G)}{5}.$$

Это эквивалентно

$$\frac{u(G)}{v(G)} \geqslant \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2y(G) + z(G)}{v(G)}\right).$$

Для того, чтобы узнать нижнюю оценку на $\frac{u(G)}{v(G)}$, мы хотим минимизировать $1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2y(G)+z(G)}{v(G)}$, то есть максимизировать $\frac{2y(G)+z(G)}{v(G)}$.

Заметим, что

$$\frac{2y(G)+z(G)}{v(G)} \leqslant \frac{2y(G)+z(G)}{3x(G)+4y(G)+5z(G)}$$
$$= \frac{2y(G)+z(G)}{3x(G)+2(2y(G)+z(G))+3z(G)} \leqslant \frac{2x(G)}{7x(G)} = \frac{2}{7}.$$

Значит,

$$t(G) = \frac{u(G)}{v(G)} \geqslant \frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{9}\cdot\frac{33}{35} = \frac{11}{21}.$$

Литература

1. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.
2. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** (1991), No. 1, 99–106.
3. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
4. Д. В. Карпов, *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: новые нижние оценки через количество вершин степеней* 3 *и не менее* 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 67–94.

Simarova E. N. A bound on the number of leaves in a spanning tree of a connected graph of minimal degree 6.

It is proved, that a connected graph of minimal degree 6 has a spanning tree, such that at least $\frac{11}{21}$ of its vertices are leaves.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Katerina.1.14@mail.ru

Поступило 27 ноября 2017 г.