Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

А. В. Пастор

О КРИТИЧЕСКИХ ТРЕХСВЯЗНЫХ ГРАФАХ РОВНО С ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ СТЕПЕНИ 3. ЧАСТЬ 1

§1. Введение

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. В основном мы будем использовать обозначения, принятые в работах [2,6,7]. Ниже мы приведем основные определения и обозначения, принятые в данной работе.

Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v в графе G обозначается через $d_G(v)$. Там, где это не может приводить к неоднозначности, мы вместо $d_G(v)$ будем писать просто $d(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается через $\delta(G)$, а наибольшая из степеней его вершин – через $\Delta(G)$.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A. Для $X \subset V(G) \cup E(G)$ через $G - X$ мы будем обозначать граф, полученный из G удалением всех вершин и ребер множества X, а также всех ребер, инцидентных вершинам из X (в частности, при $A \subset V(G)$ мы получаем $G - A = G(V(G) \setminus A)$, а при $B \subset E(G)$ получаем, что $G - B$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$). Для $x \in V(G) \cup E(G)$ положим $G - x = G - \{x\}$.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.

Ключевые слова: связность, трёхсвязные графы, критические трехсвязные графы.

Исследования выполнены при частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-9721.2016.1 и правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

Мы будем называть две вершины графа G *связанными*, если между ними существует путь. Подмножество $S \subset V(G)$ мы будем называть *связным*, если любые две его вершины связаны. Под *компонентой связности* графа в данной работе подразумевается максимальное по включению связное подмножество множества его вершин. В дальнейшем, для удобства изложения, вместо "*компонента связности*" будем говорить просто "*компонента*".

Замечание 1. Отметим, что приведенное выше определение компоненты связности отличается от общепринятого: как правило, в работах по теории графов компонентой связности называют максимальный по включению связный подграф данного графа.

1.1. Разделяющие множества и разрезы.

Определение 1. *Вершинной связностью* графа G называется мощность наименьшего подмножества $S \subset V(G)$, такого, что граф $G - S$ несвязен или тривиален (т. е. состоит ровно из одной вершины). Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$. Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$.

Пусть $\kappa(G) = k$, $V(G) = V$ и $E(G) = E$. Введем следующие обозначения.

$$\mathfrak{M}_i(G) = \{S \mid S \subset V \cup E, |S| = k, |S \cap E| = i \text{ и граф } G - S \text{ несвязен}\},$$

$$\mathfrak{M}(G) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i(G) \text{ и } \mathfrak{M}^+(G) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{M}_i(G).$$

Определение 2. Множество $S \in \mathfrak{M}_0(G)$ мы будем называть *k-разделяющим множеством*, а множество $T \in \mathfrak{M}(G)$ – *разрезом* графа G.

Определение 3. Множество $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ можно *дополнить* ребром xy, если $x \in S$ и множество $(S \setminus \{x\}) \cup \{xy\}$ является разрезом.

Множество $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ мы будем называть *максимальным*, если его нельзя дополнить никаким ребром. Множество всех максимальных элементов $\mathfrak{M}^+(G)$ мы будем обозначать $\mathfrak{M}^*(G)$.

Замечание 2. Легко видеть (см. например [4, замечание 1]), что для любого разреза S графа G граф $G - S$ имеет ровно две компоненты, причем концы любого ребра $e \in S$ принадлежат разным компонентам. Кроме того, никакая вершина $v \in S$ не может быть инцидентна никакому ребру $e \in S$.

Определение 4. Пусть $M \in \mathfrak{M}^+(G)$. Тогда множество всех входящих в M вершин мы будем обозначать через $V_0(M)$, а множество всех вершин, входящих в M либо инцидентных ребрам из M – через $V(M)$.

Замечание 3. В частности, для $R \in \mathfrak{M}_0(G)$ имеем $V(R) = V_0(R) = R$.

Определение 5. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Пусть $X \subset V(G)$. Множество R *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте графа $G - R$.

2) Пусть $U, W \subset V(G)$. Множество R *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте графа $G - R$.

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R *отделяет* вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R *отделяет* вершину u от вершины w.

1.1.1. *Части разбиения.* Понятие части разбиения k-связного графа набором его k-разделяющих множеств было введено в работе [1]. В работах [4, 7] были даны некоторые обобщения этого понятия.

Определение 6. Пусть $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ и $U_1, \dots, U_m$ – компоненты графа $G - S$. Назовем множества $H_i = U_i \cup V_0(S)$ *частями разбиения* графа G множеством S. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, \dots, H_m\}$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(S)$ мы также будем называть *частями S-разбиения* графа G.

Границей части H_i мы будем называть множество $\mathrm{Bound}(H_i) = H_i \cap V(S)$, *внутренностью* части H_i – множество $\mathrm{Int}(H_i) = H_i \setminus V(S)$ и *окрестностью* части H_i – множество $\mathrm{Nb}(H_i) = H_i \cup V(S)$.

Замечание 4. 1) Если множество S является разрезом, то, как уже отмечалось в замечании 2, граф $G - S$ имеет ровно две компоненты. Следовательно, частей S-разбиения также будет две. Границы этих частей мы также будем называть *границами* разреза S.

2) Если $S \in \mathfrak{M}_0(G)$, то границы всех частей S-разбиения совпадают с множеством S. В этом случае каждая часть S-разбиения совпадает со своей окрестностью, а ее внутренностью является соответствующая компонента связности графа $G - S$.

Определение 7. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$. Назовем *квазичастями* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ множества вида

$$H = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} H_S, \quad \text{где} \quad H_S \in \mathrm{Part}_G(S). \tag{1}$$

Частями разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ мы также будем называть *частями $\mathfrak{S}$-разбиения* графа G. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы вместо $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}_G(S)$ будем писать $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}(S)$, соответственно.

Определение 8. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ и $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Границей* части H назовем множество

$$\mathrm{Bound}(H) = H \cap \left(\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} V(S) \right).$$

Внутренностью части H назовем множество $\mathrm{Int}(H) = H \setminus \mathrm{Bound}(H)$.

Вершины, принадлежащие границе части, мы будем называть *граничными*, а вершины, принадлежащие внутренности, – внутренними.

Определение 9. Назовем часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, и *непустой* в противном случае. Назовем часть A *малой*, если $|A| < k$, и *нормальной*, если $|A| \geqslant k$.

Замечание 5. 1) Легко видеть, что пересечение двух различных частей $H_1, H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ является подмножеством множества $V_0(S)$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$.

2) Также нетрудно проверить, что граница $\mathrm{Bound}(H)$ состоит из всех вершин части H, имеющих смежные вершины вне H и, в случае, если $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, отделяет $\mathrm{Int}(H)$ от $V(G) \setminus H$.

1.1.2. *Зависимые и независимые разделяющие множества.* Понятие независимых k-разделяющих множеств впервые было введено в работах [5, 11]: k-разделяющие множества S и T называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В работе [4] было дано определение независимых разрезов, а в работе [7] это определение было применено к произвольным множествам из $\mathfrak{M}^+(G)$.

Определение 10. Множества $S, T \in \mathfrak{M}^+(G)$ называются *независимыми*, если можно так задать нумерацию частей S- и T-разбиения $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, что

$$A_1 \supset \bigcup_{i=2}^{m} B_i \quad \text{и} \quad B_1 \supset \bigcup_{i=2}^{n} A_i.$$

В противном случае множества S и T называются *зависимыми*.

Замечание 6. 1) В случае, если $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$, данное определение полностью согласуется с классическим: легко видеть, что множества S и T будут независимы тогда и только тогда, когда ни одно из них не разделяет другое.

2) Несколько сложнее дело обстоит с разрезами. Разделяющее множество S, независимое с разрезом T, может разделять множество $V(T)$. Но при этом множество S не будет разделять как минимум одну из границ разреза T, а именно в терминологии определения 10 множество S не будет разделять границу части B_2.

Определение 11. Множество $T \in \mathfrak{M}_0(G)$ называется *одиночным*, если оно независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{M}_0(G)$.

Разбиение графа парой зависимых k-разделяющих множеств описывается следующей леммой.

Лемма 1 ([2, лемма 7]). *Пусть G – k-связный граф, а множества $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$ зависимы. Пусть* $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_n\}$, *а* $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \dots, H_m\}$. *Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$ введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\dots,n\},\, j \in \{1,\dots,m\}}, \qquad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$.

1.1.3. *Дерево разбиения двусвязного графа.* В 1966 году Татт [13] предложил конструкцию дерева блоков для двусвязного графа. Эта конструкция фактически описывала взаимное расположение 2-разделяющих множеств двусвязного графа и части, на которые эти множества разделяют граф. Более простое и современное описание аналогичной конструкции было предложено Д. В. Карповым в работе [3]. Ниже будут приведены основные определения и свойства, относящиеся к этой конструкции.

Пусть G – двусвязный граф. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных 2-разделяющих множеств графа G. Рассмотрим двудольный граф $\mathrm{BT}(G)$, определяемый следующим образом: вершины одной доли – это множества из $\mathfrak{O}(G)$, вершины другой доли – части $\mathfrak{O}(G)$-разбиения графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$

смежны тогда и только тогда, когда $S \subset A$. Основные свойства графа $\mathrm{BT}(G)$, доказанные в работе [3] (см. теорему 1), перечислены в следующей теореме.

Теорема 1. 1) *Граф* $\mathrm{BT}(G)$ *является деревом.*

2) *Для каждого множества* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *выполняется* $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(S)|$. *Более того, для каждой части* $A \in \mathrm{Part}(S)$ *существует единственная часть* $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$, *такая что* $B \subset A$ *и* B *смежна с* S *в* $\mathrm{BT}(G)$. *Все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$.

3) *Множество* S *разделяет в графе* G *части* $B, B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *тогда и только тогда, когда* S *разделяет* B *и* B' *в* $\mathrm{BT}(G)$.

Следствие 1. *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *и* $N_{\mathrm{BT}(G)}(A) = \{S_1, \dots, S_m\}$. *Тогда* $\mathrm{Bound}(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$.

Доказательство. Из определения очевидно, что $\mathrm{Bound}(A) \supset \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$. Докажем, что никакая вершина $x \in A \setminus (\cup_{i=1}^{m} S_i)$ не может быть граничной. Предположим противное: пусть $x \in S$, где $S \in \mathfrak{O}(G)$. Тогда найдется множество S_i, разделяющее A и S в $\mathrm{BT}(G)$. Но в этом случае S_i разделяет A и S также и в G (по пункту 3 теоремы 1 множество S_i разделяет A и любую часть разбиения, содержащую S, следовательно, A и S оно тоже разделяет). Таким образом, S не может содержать вершину $x \in A \setminus S_i$. Противоречие. $\square$

Определение 12. Граф $\mathrm{BT}(G)$ называется *деревом разбиения* двусвязного графа G.

Для описания структуры входящих в $\mathrm{BT}(G)$ частей разбиения, а также неодиночных 2-разделяющих множеств графа G используется следующая конструкция. Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ и $N_{\mathrm{BT}(G)}(A) = \{S_1, \dots, S_m\}$. Рассмотрим граф $G'(A)$, определяемый следующим образом: нужно взять индуцированный подграф $G(A)$ и добавить к нему все ребра вида $a_i b_i$, где $S_i = \{a_i, b_i\}$. В случае, если вершины a_i и b_i несмежны в графе G, мы будем называть ребро $a_i b_i$ графа $G'(A)$ *виртуальным.*

Теорема 2 (см. [3, теорема 2 и следствие 1])**.** *Для каждой части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *граф* $G'(A)$ *либо трехсвязен, либо является простым циклом.*

Определение 13. Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ – простой цикл и *блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A. Если часть A – блок, то граф $G'(A)$ мы также будем называть *блоком*.

Замечание 7. Всякий раз, когда мы будем говорить о каких-либо графских свойствах блока A (например о том, что блок A изоморфен K_4) мы будем иметь ввиду свойства соответствующего ему графа $G'(A)$.

Лемма 2 (см. [3, лемма 7]). 1) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *– цикл длины хотя бы* 4. *Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное* 2*-разделяющее множество графа* G*, которое делит граф* G *ровно на две части.*

2) *Любое неодиночное* 2*-разделяющее множество графа* G *лежит в части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$*, являющейся циклом длины хотя бы* 4*, и состоит из двух несоседних вершин этого цикла.*

1.2. Критические k-связные графы.

Определение 14. k-связный граф G с $v(G) \geqslant k+2$ называется *критическим*, если для любой вершины $x \in V(G)$ граф $G - x$ не является k-связным.

Очевидно, что для любого графа G выполнено неравенство $\delta(G) \geqslant \kappa(G)$, поэтому имеет смысл изучать вершины k-связного графа, имеющие степень k. В критическом k-связном графе такие вершины есть не всегда, однако из результата работы [8] следует, что при $k = 2$ и $k = 3$ такие вершины обязательно найдутся. Случай $k = 2$ исследовался в работах [3, 12]. L. Nebeský [12] доказал, что любой критический двусвязный граф на хотя бы шести вершинах содержит хотя бы четыре вершины степени 2. Д. В. Карпов [3] дал классификацию всех критических двусвязных графов, содержащих ровно четыре вершины степени 2.

Для случая $k = 3$ в работе [9] было доказано, что любой критический трехсвязный граф содержит хотя бы две вершины степени 3, и были приведены примеры, доказывающие точность этой оценки. Нашей целью является классификация всех критических трехсвязных графов, содержащих ровно две вершины степени 3. В данной работе мы дадим классификацию таких графов в случае, когда вершины степени 3 смежны. Во второй части, которая будет опубликована позже, мы рассмотрим случай, когда эти две вершины несмежны.

§2. Общие сведения

Всюду начиная с этого места через G будет обозначаться критический трехсвязный граф, содержащий ровно две вершины степени 3. В данном разделе мы получим ряд общих результатов, которые будут полезны как для случая смежных, так и для случая несмежных вершин степени 3.

Лемма 3. *Пусть $R \in \mathfrak{M}^+(G)$ и $H \in \mathrm{Part}(R)$. Тогда часть H содержит вершину степени 3.*

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{F} = \{F \subset H \mid \exists\, M \in \mathfrak{M}^+(G)\ (F \in \mathrm{Part}(M))\},$$

F_0 – минимальный по включению элемент множества $\mathfrak{F}$ и $F_0 \in \mathrm{Part}(S)$, где $S \in \mathfrak{M}^+(G)$. Докажем, что F_0 содержит вершину степени 3, из этого будет следовать утверждение леммы. Рассмотрим два случая: часть F_0 может быть пустой или не пустой.

1. $\mathrm{Int}(F_0) = \varnothing$. Тогда S – разрез и в F_0 найдется вершина, инцидентная одному из его ребер. Эта вершина, очевидно, имеет степень 3. Более подробно структура *вырожденных* разрезов (то есть разрезов, у которых одна из частей разбиения пуста) описана в работе [6] (см. определение 8 и замечание 6).

2. $\mathrm{Int}(F_0) \neq \varnothing$. Тогда не умаляя общности можно считать, что $S \in \mathfrak{M}_0(G)$. Действительно, если S – разрез, то одна из его границ отделяет множество $\mathrm{Int}(F_0)$ от остальных вершин графа и мы можем вместо S рассмотреть эту границу.

Предположим, что в $\mathrm{Int}(F_0)$ нет вершины степени 3. Тогда очевидно, что $|\mathrm{Int}(F_0)| \geqslant 2$. Рассмотрим произвольную вершину $u \in \mathrm{Int}(F_0)$. Поскольку граф G критический, найдется 3-разделяющее множество T, содержащее u. Заметим, что множества S и T зависимы, поскольку в противном случае одна из частей T-разбиения содержится в F_0, что противоречит минимальности F_0. Введем обозначения, аналогичные обозначениям из леммы 1:

$$\mathrm{Part}(S) = \{F_0, F_1, \dots, F_n\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{H_1, \dots, H_m\},$$

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j,$$

где $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда по лемме 1

$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\},\, j \in \{1,\dots,m\}}, \quad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{0, \dots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$. Поскольку $|S| = |T| = 3$, мы получаем также, что каждое из множеств S_i и T_j может состоять либо из одного, либо из двух элементов, причем все S_i, очевидно, не могут быть двухэлементными. Не умаляя общности будем считать, что $|S_1| = 1$. Далее мы рассмотрим следующие два подслучая: множество T_0 может совпадать или не совпадать с $\mathrm{Int}(F_0)$.

2.1. $T_0 = \mathrm{Int}(F_0)$. Тогда $|T_0| = 2$, следовательно, $n = 1$, $P = \varnothing$ и $|T_1| = 1$. В этом случае, $\mathrm{Int}(F_0) \subset T$, то есть $\mathrm{Int}(G_{0,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,1}) = \varnothing$. Тогда $|H_1| = 1$ и единственная вершина этой части принадлежит F_0 и имеет степень 3.

2.2. $T_0 \subsetneq \mathrm{Int}(F_0)$. Тогда одна из частей $G_{0,j}$ не пуста, следовательно, ее граница содержит хотя бы 4 вершины (в противном случае получаем противоречие с минимальностью F_0). Тогда легко видеть, что $|T_0| = 2$, откуда как и в случае **2.1.** получаем, что $n = 1$, $P = \varnothing$ и $|T_1| = 1$. Таким образом, часть $G_{1,1}$ пуста. Далее, $|\mathrm{Bound}(G_{0,1})| = |T_0| + |S_1| = 3$, следовательно, часть $G_{0,1}$ также пуста (в противном случае мы снова получим противоречие с минимальностью F_0). Но тогда так же как и в предыдущем случае мы получаем, что $|H_1| = 1$ и единственная вершина этой части принадлежит F_0 и имеет степень 3. $\square$

Следствие 2. *Любое 3-разделяющее множество графа G делит его ровно на две части.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $R \in \mathfrak{M}_0(G)$ и H_1, H_2, $H_3 \in \mathrm{Part}(R)$. Тогда по лемме 3 в каждой из этих частей есть вершина степени 3. Поскольку в графе G таких вершин ровно две, вершина степени 3 должна содержаться в множестве R. Пусть в R ровно k вершин степени 3. Обозначим их $x_1, \dots, x_k$. Легко видеть, что каждая вершина x_i имеет хотя бы одну смежную вершину во внутренности любой из частей R-разбиения графа G. Но поскольку $d(x_i) = 3$, мы получаем, что $\mathrm{Part}(R) = \{H_1, H_2, H_3\}$ и во внутренности каждой из этих частей есть ровно одна вершина, смежная с x_i. Обозначим вершину из $\mathrm{Int}(H_j)$ смежную с x_i через y_{ij}. Тогда для каждого j множество R можно дополнить всеми ребрами вида $x_i y_{ij}$. Обозначим получившийся разрез через M_j, а часть M_j-разбиения, содержащуюся в H_i, – через H_i'. Тогда по лемме 3 в каждой из частей H_i' также есть вершина степени 3. Заметим, что по построению разные части вида H_i'

не могут иметь общих вершин степени 3. Таким образом, в графе G должно быть хотя бы три вершины степени 3. Противоречие. □

§3. Случай смежных вершин степени 3

Обозначим вершины степени 3 графа G через u и v. Всюду, начиная с этого места, мы будем считать, что вершины u и v смежны.

Лемма 4. *Каждое 3-разделяющее множество графа G содержит ровно одну из вершин u и v. Более того, это множество можно дополнить ребром uv.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathfrak{M}_0(G)$. По лемме 3 в каждой из частей T-разбиения графа G должна содержаться вершина степени 3. Однако, поскольку вершины u и v смежны, они не могут принадлежать внутренностям различных частей T-разбиения. Следовательно, как минимум одна из них принадлежит границе части, то есть множеству T.

Не умаляя общности предположим, что $u \in T$. Пусть $T = \{x, y, u\}$ и $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}$ (по следствию 2 в $\mathrm{Part}(T)$ ровно две части). Очевидно, что вершина u смежна как минимум с одной из вершин каждого из множеств $\mathrm{Int}(H_1)$ и $\mathrm{Int}(H_2)$. Но поскольку $d(u) = 3$, хотя бы в одном из множеств $\mathrm{Int}(H_1)$ и $\mathrm{Int}(H_2)$ будет ровно одна вершина смежная с u. Не умаляя общности будем считать, что u смежна ровно с одной вершиной множества $\mathrm{Int}(H_1)$, и обозначим эту вершину через z. Легко видеть, что тогда множество $T_1 = \{x, y, uz\}$ является разрезом и $H_1' = H_1 \setminus \{u\} \in \mathrm{Part}(T_1)$. Тогда по лемма 3 множество H_1' содержит вершину v. Поскольку вершины u и v смежны, вершина v должна совпадать с одной из вершин x, y, z.

Если $v = z$, то мы доказали все, что требуется. Рассмотрим оставшиеся случаи: пусть не умаляя общности $v = y$. Тогда $d(z) > 3$, следовательно, обе части $H_1', H_2 \in \mathrm{Part}(T_1)$ имеют непустые внутренности. Но тогда вершина v должна быть смежна хотя бы с одной вершиной каждого из множеств $\mathrm{Int}(H_1')$, $\mathrm{Int}(H_2)$ и с вершиной $u \in V(T_1)$. Таким образом, вершина v смежна ровно с одной вершиной множества $\mathrm{Int}(H_1')$ (обозначим эту вершину через t). Но тогда множество $T_2 = \{x, vt, uz\}$ является разрезом, а множество $H_1 \setminus \{u, v\}$ – частью T_2-разбиения, не содержащей вершин степени 3, а это противоречит лемме 3. □

Далее мы рассмотрим граф $G_1 = G - uv$ и изучим его структуру. После того, как мы дадим детальное описание структуры графа G_1, мы сможем вернуться обратно к графу G, просто соединив ребром вершины u и v.

3.1. Структура графа G_1.

Лемма 5. *Граф G_1 является двусвязным и обладает следующими свойствами.*

1) *Каждая вершина графа G_1, кроме u и v, входит в 2-разделяющее множество. Вершины u и v не входят ни в какие 2-разделяющие множества.*

2) *Каждое 2-разделяющее множество графа G_1 делит его ровно на две части. Внутренность одной из этих частей содержит вершину u, а внутренность другой – v.*

3) *Пусть $\{x, y\}$ – 2-разделяющее множество графа G_1. Тогда множество $\{x, y, uv\}$ – разрез графа G, делящий его на те же части, на которые $\{x, y\}$ делит G_1. Более того, полученное соответствие между 2-разделяющими множествами графа G_1 и разрезами графа G, содержащими единственное ребро uv, является биекцией.*

Доказательство. Пусть $x \in V(G)$. Заметим, что

$$G_1 - x = G - \{x, uv\}.$$

Этот граф связен, поскольку граф G трехсвязен. Следовательно, граф G_1 – двусвязен. Докажем требуемые свойства.

1) Пусть $x \notin \{u, v\}$. Тогда вершина x содержится в некотором 3-разделяющем множестве графа G. По лемме 4 это множество содержит ровно одну из вершин u, v и может быть дополнено ребром uv. Получаем разрез $\{x, y, uv\} \in \mathfrak{M}_1(G)$. Но тогда очевидно, что множество $\{x, y\}$ является 2-разделяющим в графе G_1.

Докажем, что вершины u и v не входят ни в какие 2-разделяющие множества. Действительно, пусть множество $\{u, x\}$ является разделяющим в графе G_1. Тогда рассмотрим компоненту графа $G_1 - \{u, x\}$, не содержащую v. Очевидно, что эта же компонента будет отделяться множеством $\{u, x\}$ и в графе G, что противоречит его трехсвязности.

2), 3) Пусть $T = \{x, y\}$ – 2-разделяющее множество графа G_1, $M = \{x, y, uv\}$ и $G^* = G - M = G_1 - T$. Заметим, что граф G^* несвязен, следовательно, $M \in \mathfrak{M}_1(G)$. Тогда (см. замечание 2), граф G^*

имеет ровно две компоненты, одна из которых содержит u, а другая – v. Эти компоненты являются внутренностями частей разбиения $\mathrm{Part}_{G_1}(T)$, следовательно, этих частей также две, внутренность одной из них содержит u, а внутренность другой – v.

Заметим, что части разбиения $\mathrm{Part}_G(M)$, равно как и части разбиения $\mathrm{Part}_{G_1}(T)$, получаются из компонент графа G^* добавлением вершин x, y. Следовательно, $\mathrm{Part}_G(M) = \mathrm{Part}_{G_1}(T)$. Обратно, если $M = \{x, y, uv\} \in \mathfrak{M}_1(G)$, то множество $\{x, y\}$, очевидно, является разделяющим в графе G_1. Таким образом, построенное соответствие – биекция. $\square$

Поскольку граф G_1 двусвязен, рассмотрим его дерево разбиения $\mathrm{BT}(G_1)$. В следующей теореме мы докажем основные свойства этого дерева.

Теорема 3. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G_1)$ *является простой цепью. Висячие вершины этой цепи являются частями разбиения, входящими в* $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G_1))$. *Одна из этих частей содержит вершину* u, *а другая –* v. *Более того, указанные выше висячие части разбиения являются треугольниками (т. е. циклами длины* 3*).*

Далее мы будем обозначать входящие в $\mathrm{BT}(G_1)$ *части разбиения и одиночные* 2*-разделяющие множества через* $H_0, \dots, H_m$ *и* $T_1, \dots, T_m$ *соответственно, где* $u \in H_0$, $v \in H_n$ *и множество* T_i *смежно в* $\mathrm{BT}(G_1)$ *с частями* H_{i-1} *и* H_i.

2) *Для висячих частей-треугольников выполняются соотношения* $\mathrm{Int}(H_0) = \{u\}$ *и* $\mathrm{Int}(H_n) = \{v\}$. *При* $0 < i < n$ *выполнено* $\mathrm{Int}(H_i) = \varnothing$ *и* $H_i = T_i \cup T_{i+1}$. *Все части-блоки* $\mathrm{BT}(G_1)$ *изоморфны* K_4, *а входящие в него части-циклы могут иметь длину либо* 3, *либо* 4.

3) *Назовем две части разбиения, входящие в* $\mathrm{BT}(G_1)$, соседними, *если их номера отличаются на* 1. *Тогда соседями части-цикла длины* 4 *могут быть только части-блоки, а соседями части-треугольника – либо части-блоки, либо части-треугольники. Более того, соседями висячих частей-треугольников могут быть только части-блоки.*

4) *Пусть* $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$. *Тогда* x *может входить в две или три части разбиения, являющиеся последовательными в нашей нумерации. Если частей* 3, *то средняя из них – треугольник.*

5) *Вершины одиночного* 2*-разделяющего множества, которое смежно в* $\mathrm{BT}(G_1)$ *с двумя частями-блоками, могут быть как смежны,*

так и несмежны в графе G. Во всех остальных случаях вершины одиночного 2-разделяющего множества смежны.

Доказательство. 1) Как было доказано в лемме 5, каждое 2-разделяющее множество графа G_1 делит его ровно на две части и, следовательно, имеет в $\mathrm{BT}(G_1)$ степень 2. Докажем, что каждая часть разбиения в $\mathrm{BT}(G_1)$ также имеет степень не более двух – из этого будет следовать, что $\mathrm{BT}(G_1)$ – простая цепь. Пусть часть $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G_1))$ имеет в $\mathrm{BT}(G_1)$ степень d. Тогда часть F содержит d одиночных 2-разделяющих множеств. Обозначим эти множества $S_1, \dots, S_d$, и для каждого $i \leqslant d$ обозначим через F_i часть S_i-разбиения графа G_1, не содержащую F. Поскольку все множества S_i одиночны, они попарно независимы. Следовательно, внутренности частей F_i попарно не пересекаются. По лемме 5 каждая из этих внутренностей содержит ровно одну из вершин u и v. Таким образом, $d \leqslant 2$.

Итак, $\mathrm{BT}(G_1)$ является простой цепью. Докажем, что вершина u принадлежит части разбиения, являющейся висячей вершиной $\mathrm{BT}(G_1)$, и что эта часть является треугольником. Для вершины v доказательство аналогично. Введем следующие обозначения: $N_G(u) = \{v, x, y\}$, $T_1 = N_{G_1}(u) = \{x, y\}$ и $H_0 = \{u, x, y\}$. Очевидно, что $H_0 \in \mathrm{Part}_{G_1}(T_1)$ и, поскольку по лемме 5 вершина u не входит ни в какое 2-разделяющее множество графа G_1, имеем $T_1 \in \mathfrak{O}(G_1)$ и $H_0 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G_1))$. Поскольку часть H_0 содержит ровно одно 2-разделяющее множество T_1, она является висячей вершиной в $\mathrm{BT}(G_1)$. Эта часть является циклом длины 3, поскольку вершина u смежна с x и y, а если x и y не смежны, то между ними будет проведено виртуальное ребро (но на самом деле ниже мы докажем, что x и y обязательно смежны).

2) Из сказанного выше очевидно, что $\mathrm{Bound}(H_0) = T_1$. Следовательно, $\mathrm{Int}(H_0) = H_0 \setminus T_1 = \{u\}$. Аналогично, $\mathrm{Int}(H_n) = \{v\}$.

Пусть $0 < i < n$. Предположим, что $\mathrm{Int}(H_i) \neq \varnothing$. Рассмотрим вершину $x \in \mathrm{Int}(H_i)$. По определению она не входит ни в какие одиночные 2-разделяющие множества графа G_1 и не смежна ни с какими вершинами не из H_i. Если H_i блок, это означает, что x не входит вообще ни в какие 2-разделяющие множества графа G_1, что противоречит лемме 5. Если же H_i – цикл, то $d_G(x) = 2$, что также невозможно.

Итак, мы доказали, что $\mathrm{Int}(H_i) = \varnothing$. Применив следствие 1 получаем, что $H_i = \mathrm{Bound}(H_i) = T_i \cup T_{i+1}$. Следовательно, $|H_i| \leqslant 4$. Тогда граф $G_1'(H_i)$ может быть либо циклом длины 3 или 4, либо трехсвязным графом. Но единственным трехсвязным графом на не более чем четырех вершинах является K_4.

3) Пусть H_i – цикл длины 4, входящий в $\mathrm{BT}(G_1)$, и H_j – соседняя с H_i часть разбиения. Не умаляя общности будем считать, что $j = i + 1$. В предыдущем пункте было доказано, что $\mathrm{Int}(H_i) = \varnothing$ и $T_i \cup T_{i+1} = H_i$. Тогда $T_i \cap T_{i+1} = \varnothing$. Далее заметим, что в H_{i+1} содержится не более одного одиночного 2-разделяющего множества, отличного от T_{i+1} (это может быть только множество T_{i+2}, в том случае, если H_{i+1} – не висячая вершина $\mathrm{BT}(G_1)$). Но тогда найдется вершина $x \in T_{i+1}$, которая принадлежит ровно двум частям $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G_1))$, а именно H_i и H_{i+1}. Поскольку H_i – цикл, вершина x смежна не более чем с одной вершиной множества T_i. С другой стороны, поскольку $x \notin \{u, v\}$, имеем $d_{G_1}(x) \geqslant 4$. Следовательно, $d_{G_1'(H_{i+1})}(x) \geqslant 3$, но такая вершина может быть только в блоке.

Итак, соседом цикла длины 4 может быть только блок. Это, в частности, означает, что цикл длины 4 не может быть соседом треугольника. Следовательно, соседями треугольника могут быть либо блоки, либо треугольники.

То, что соседом висячего треугольника может быть только блок, доказывается аналогично (при $i = 0$ множества T_i нет, но все равно в T_{i+1} найдется вершина, принадлежащая ровно двум частям разбиения).

4) Заметим сначала, что поскольку $x \notin \{u, v\}$, вершина x принадлежит какому-либо одиночному 2-разделяющему множеству и, следовательно, принадлежит хотя бы двум частям разбиения. По доказанному в пункте 2) при $0 < k < m$ имеем $\mathrm{Int}(H_k) = \varnothing$ и $H_k = T_k \cup T_{k+1}$.

Пусть $x \in H_i \cap H_j$, где $i < j$. Тогда очевидно, что $x \in T_k$ для любых $k \in \{i + 1, \dots, j\}$. Следовательно, все части $H_{i+1}, \dots, H_{j-1}$ – треугольники. Предположим, что $j - i > 2$. Тогда рассмотрим отличную от x вершину $y \in T_{i+2}$. Заметим, что $y \notin T_{i+1} \cup T_{i+3}$, следовательно, вершина y не принадлежит никаким другим частям разбиения, кроме H_{i+1} и H_{i+2}. Но тогда $d_G(y) \leqslant 3$, что невозможно.

5) Пусть вершины множества T_i несмежны. Заметим, что хотя бы одна вершина этого множества принадлежит ровно двум частям разбиения: H_{i-1} и H_i. Действительно, в противном случае по доказанному выше обе части H_{i-1} и H_i – треугольники, но тогда две оставшиеся

вершины этих треугольников образуют разделяющее множество, зависимое с T_i, что противоречит его одиночности. Обозначим такую вершину через x. Поскольку $d_G(x) \geqslant 4$ и x не смежна с другой вершиной множества T_i, она должна быть смежна со всеми остальными вершинами частей H_{i-1} и H_i, а это возможно только в том случае, если обе эти части – блоки.

То, что для двух соседних блоков возможны оба варианта, видно из примера, изображенного на рисунке 1. □

Следствие 3. *В рассматриваемом случае,* $\Delta(G) \leqslant 6$.

Доказательство. Пусть $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Докажем, что $d_G(x) = d_{G_1}(x) \leqslant 6$. Действительно, по пункту 4) теоремы 3 вершина x может входить не более, чем в три части разбиения $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G_1))$. Занумеруем части так, как это было сделано в пункте 1) теоремы 3. Пусть i и j – наименьший и наибольший номера частей, содержащих x, соответственно. Докажем, что $N_G(x) \subset (H_i \cup H_j) \setminus \{x\}$. При $j = i+1$ это очевидно. Пусть $j = i+2$. Тогда по пункту 2) теоремы 3 имеем $H_{i+1} = T_{i+1} \cup T_{i+2} \subset H_i \cup H_{i+2}$. Следовательно,

$$N_G(x) \subset (H_i \cup H_{i+1} \cup H_{i+2}) \setminus \{x\} = (H_i \cup H_{i+2}) \setminus \{x\}.$$

Таким образом,

$$d_G(x) = |N_G(x)| \leqslant |(H_i \cup H_j) \setminus \{x\}| \leqslant |H_i| + |H_j| - 2 \leqslant 6. \qquad \square$$

Пример критического трехсвязного графа с двумя смежными вершинами степени 3 изображен на рисунке 1.

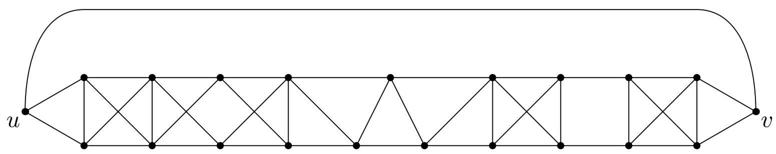

Рис. 1. Критический трехсвязный граф с двумя смежными вершинами степени 3.

Теорема 4. *Пусть граф* G_1 *и его вершины* u, v *удовлетворяют утверждениям* 1)–5) *теоремы* 3. *Тогда граф* G, *полученный из* G_1 *добавлением ребра* uv, *является критическим трехсвязным графом, в котором вершины* u *и* v *– единственные вершины степени* 3.

Доказательство. Докажем сначала, что граф G трехсвязен. Действительно, если множество T является 2-разделяющим в графе G, то оно является таковым и в графе G_1. Но по построению графа G_1 любое 2-разделяющее множество делит его ровно на две компоненты, одна из которых содержит вершину u, а другая – v. Однако в графе G вершины u и v смежны, следовательно, граф $G - T$ связен.

Далее докажем, что каждая вершина графа G входит в 3-разделяющее множество этого графа. Для вершин u и v это очевидно: $u \in N_G(v)$ и $v \in N_G(u)$. Пусть $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Тогда вершина x входит в одно из 2-разделяющих множеств графа G_1. Пусть это множество $\{x, y\}$. Тогда множество $\{x, y, uv\}$ является разрезом в графе G. Следовательно, хотя бы одно из множеств $\{x, y, u\}$ и $\{x, y, v\}$ будет 3-разделяющим.

Наконец докажем, что для любой вершины $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$ выполнено $d_G(x) \geqslant 4$. Для этого, занумеруем входящие в $\mathrm{BT}(G_1)$ компоненты и разделяющие множества так же, как это было сделано в пункте 1) теоремы 3. Пусть $x \in T_i$. Тогда $x \in H_{i-1}$ и $x \in H_i$. Обозначим вторую вершину множества T_i через y. Заметим, что в каждой из частей H_{i-1} и H_i заведомо есть вершина, смежная с x и отличная от y. Далее мы рассмотрим несколько случаев: части H_{i-1} и H_i могут быть обе блоками, блоком и циклом, или же двумя циклами.

1. Пусть H_{i-1} и H_i – блоки. Тогда в каждом из них есть по две вершины, отличные от y. Все эти вершины различны и смежны с x. Следовательно, $d_G(x) \geqslant 4$.

2. Пусть не умаляя общности, H_{i-1} – блок и H_i – цикл. Тогда вершина x смежна с тремя вершинами блока H_{i-1} (напомним, что в этом случае x обязана быть смежной с y) и еще с одной вершиной из H_i, которая отлична от y. Таким образом, снова получаем $d_G(x) \geqslant 4$.

3. Пусть, наконец, H_{i-1} и H_i – циклы. Тогда они треугольники, причем ни один из этих треугольников не может быть висячим. Пусть $H_{i-1} = \{w, x, y\}$ и $H_i = \{x, y, z\}$. Тогда вершина x заведомо смежна с вершинами w, y, z. Кроме того, поскольку части H_{i-1} и H_i не могут быть висячими, существуют части H_{i-2} и H_{i+1}. Поскольку H_{i-1} и H_i – треугольники, каждая из частей H_{i-2} и H_{i+1} содержит либо x, либо y. Но обе они содержать y не могут, в противном случае вершина y будет принадлежать сразу четырем частям. Тогда одна из этих частей содержит x и в ней найдется еще одна смежная с x вершина, отличная от w, y, z. Таким образом, и в этом случае мы получаем $d_G(x) \geqslant 4$. $\square$

Литература

1. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
2. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
3. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
4. Д. В. Карпов, *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 22–40.
5. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
7. А. В. Пастор, *О разбиении трехсвязного графа на циклически реберно-четырехсвязные компоненты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 109–150.
8. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
9. R. C. Entringer and P. J. Slater, *A theorem on critically 3-connected graphs.* — Nanta Math **11** (1978), no. 2, 141–145.
10. Y. O. Hamidoune, *On critically h-connected simple graphs.* — Discrete Math. **32** (1980), 257–262.
11. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
12. L. Nebeský, *On induced subgraphs of a block.* — J. Graph Theory **1** (1977), 69–74.
13. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
14. H. J. Veldman, *Non-κ-critical vertices in graphs.* — Discrete Math **44** (1983), 105–110.

Pastor A. V. On critically 3-connected graphs with exactly two vertices of degree 3. Part 1.

A graph G is *critically 3-connected*, if G is 3-connected and for any vertex $v \in V(G)$ the graph $G - v$ isn't 3-connected. R. C. Entringer and P. J. Slater proved that any critically 3-connected graph contains at least two vertices of degree 3. In this paper we classify all such graphs with one additional condition: two vertices of degree 3 are adjacent. The case of nonadjacent vertices of degree 3 will be investigated in the second part of the paper, which will be published later.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН;
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Поступило 24 ноября 2017 г.