Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова

ОСНАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ

§1. Введение

Проблема, которой посвящена настоящая работа, может быть сформулирована следующим образом. Для любого пространственного графа построить редукцию задачи изотопической классификации его оснащения к проблеме изотопической классификации соответствующего ему вершинного оснащения (то есть части оснащения, являющейся объединением пространственного графа с попарно непересекающимися круговыми окрестностями его вершин).

Оснащённые, также как и вершинно оснащённые пространственные графы, – объекты не новые. Первые изучались М. Н. Гусаровым [1], В. Г. Тураевым [7] и др., вторые – Л. Кауффманом [2] и др. Несмотря на естественность сформулированной выше проблемы, авторам не известно публикаций, в которых она ставилась и/или решалась.

Основное содержание этой статьи заключается в построении искомой редукции для конечных связных пространственных графов, какие-нибудь остовы которых могут быть *оснащены парами хорд* в смысле [3].

Настоящая статья продолжает серию статей [3–6], посвящённых изучению (частично или полностью) оснащённых графов. Для понимания этой статьи знакомство с [3–6] не обязательно, поскольку мы приводим все необходимые формулировки. (В частности, определение упомянутого выше оснащения остова графа парами хорд воспроизведено в пункте 2.1.)

§2. Предварительный материал

2.1. Допустимые графы. *Графом* называется клеточное пространство размерности не большей единицы. Нульмерные клетки графа называются его *вершинами*, одномерные – его *ребрами*. *Циклом* графа называется подпространство графа, гомеоморфное окружности. *Остовом* графа называется (какое-нибудь) максимальное (по включению) подпространство графа, не содержащее ни одного цикла.

Ключевые слова: пространственные графы, классические узлы, оснащения.

Пусть G – конечный связный граф и H – какой-нибудь его остов. Назовём рёбра графа G, содержащиеся в остове H, *ветвями*, не содержащиеся в этом остове – *хордами*. Назовём цикл *элементарным*, если он содержит в точности одну хорду; заметим, что, как нетрудно видеть, *любая хорда содержится в элементарном цикле и этот цикл единственный.*

Обозначим через b число ветвей графа G и через c число его хорд. Мы будем говорить, что остов H *оснащён парами хорд*, если задана тройка, состоящая из:

(i) нумерации ветвей натуральными числами, не превосходящими числа b;

(ii) нумерации хорд натуральными числами, не превосходящими числа c;

(iii) (инъективного) отображения

$$\varphi : \{1, 2, \ldots, b\} \to \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant c\},$$

такого что если $\varphi(k) = (i, j)$, то пересечение элементарных циклов, хорды которых занумерованы числами i и j, состоит из ветви с номером k и, быть может, каких-то ветвей с меньшими номерами. Отображение φ мы будем называть *поводком* этого оснащения остова H.

Назовём конечный связный граф *допустимым*, если существует остов, который может быть оснащён парами хорд.

2.2. Оснащения графов. Назовём граф *гладким*, если каждое его ребро снабжено структурой гладкого одномерного многообразия. (Под гладкостью мы понимаем C^∞-гладкость.)

Пусть G – гладкий конечный связный граф. Обозначим через m число вершин графа G, занумеруем (как-нибудь) их числами $1, 2, \ldots, m$ и для каждого натурального числа $i \leqslant m$ обозначим через d_i степень i-ой вершины (то есть число полурёбер графа G, растущих из этой вершины). Далее, обозначим через D стандартный замкнутый круг в плоскости $\mathbb{R}^2$, снабжённый естественной гладкой структурой и естественной ориентацией. Для каждого натурального числа $i \leqslant m$ рассмотрим круг $D \times i$, выберем и зафиксируем в нём какие-нибудь d_i попарно различных (замкнутых) радиусов, обозначим через $V(i)$ объединение этих радиусов и выберем какие-нибудь топологические вложения

$$\psi_i : V(i) \to G,$$

обладающие следующими свойствами:

(i) вложение ψ_i отображает центр круга $D \times i$ в i-ую вершину графа G и пространство $V(i)$ на какую-нибудь (замкнутую) окрестность i-ой вершины;

(ii) сужение вложения ψ_i на каждый радиус круга $D \times i$, содержащийся в пространстве $V(i)$, является гладким вложением;

(iii) образы отображений ψ_i и ψ_j при $i \neq j$ (где i и j – натуральные числа, не превосходящие m) не пересекаются.

Наконец, обозначим через F топологическое пространство, полученное приклеиванием к графу G всех кругов $D \times i$ по отображениям ψ_i.

В дальнейшем мы будем отождествлять граф G и круги $D \times i$ с соответствующими подпространствами пространства F и будем считать, что:

(i) первое подпространство унаследовало клеточную структуру графа G, при этом его одномерные клетки унаследовали ещё и гладкие структуры рёбер графа G;

(ii) компоненты связности второго подпространства унаследовали гладкие структуры и ориентации дисков $D \times i$.

Заметим, что, как нетрудно видеть, пересечения рёбер графа с приклеенными дисками являются гладкими подмногообразиями как соответствующих рёбер этого графа, так и соответствующих дисков.

Топологическое пространство F, подпространства G и $D \times i$ с $1 \leqslant i \leqslant m$ которого снабжены упомянутыми структурами, мы будем называть *вершинным оснащением* графа G, пару (F, G) – *вершинно оснащённым графом.*

Пусть G и F – те же, что и выше в этом подпункте. Обозначим через n число рёбер графа G и через E гладкое связное компактное ориентированное двумерное многообразие с краем, такое что:

(i) $E \supset F (\supset G)$;

(ii) сужения ориентации многообразия E на круги $D \times i (\subset F)$ совпадают с уже имеющимися на них ориентациями;

(iii) существует сохраняющий ориентации гомеоморфизм

$$\psi : \mathrm{Cl}(E \setminus F) \to (I \times [-1,1] \times 1) \cup (I \times [-1,1] \times 2) \cdots \cup (I \times [-1,1] \times n)$$

(Cl – замыкание), отображающий множество $\mathrm{Cl}(E \setminus F) \cap G$ на множество

$$(I \times 0 \times 1) \cup (I \times 0 \times 2) \cup \cdots \cup (I \times 0 \times n).$$

То, что такое многообразие существует – очевидно: достаточно к многообразию $\mathrm{Cl}(F \setminus G)$ подклеить (с учётом ориентаций) двумерные ручки, осями которых являются компоненты связности многообразия $\mathrm{Cl}(G \setminus \mathrm{Cl}(F \setminus G))$.

Пару (E, F) будем называть *оснащением* графа G, тройку (E, F, G) – *оснащённым графом*.

Заметим, что *оснащение графа определяет его вершинное оснащение* и что *вершинное оснащение графа определяет его оснащение с точностью до диффеоморфизма, неподвижного на графе*. Первое очевидно, второе проверяется простыми стандартными рассуждениями.

§3. Основная теорема

Пусть G – гладкий конечный связный граф. Как и в параграфе 2, через m и n условимся обозначать число вершин и число рёбер графа G соответственно.

Выберем какое-нибудь оснащение (E, F) графа G и возьмём какое-нибудь топологическое вложение

$$f : F \to \mathbb{R}^3,$$

сужение которого на каждое ребро графа G и на каждый диск $D \times i$ (для $1 \leqslant i \leqslant m$) является гладким вложением. Рассмотрим множество всех гладких вложений $E \to \mathbb{R}^3$, продолжающих вложение f, разобьём его на гладкие (объемлющие) изотопические классы, изотопия неподвижна на F, и обозначим через $\mathcal{E}(f)$ множество этих классов. Вычислению именно этого множества посвящена настоящая работа.

Предположим ещё, что граф G является допустимым. Выберем (какой-нибудь) его остов, допускающий оснащение парами хорд, и обозначим этот остов через H. Далее, возьмём (какое-нибудь) оснащение остова H парами хорд и обозначим (с учётом нумераций) через $e_1, e_2, \ldots, e_b$ ветви и через $e'_1, e'_2, \ldots, e'_c$ хорды графа G, через φ – поводок этого оснащения. (Ясно, что $b + c = n$.) Наконец, из всех хорд графа G выберем хорды, номера которых встречаются хотя бы один раз в какой-нибудь из пар чисел $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(b)$, и снабдим их (какими-нибудь) ориентациями.

Для каждого натурального числа $i \leqslant n$ определим отображение

$$\lambda_i \ : \mathcal{E}(f) \to \mathbb{Z}$$

следующим образом.

Пусть $x \in \mathcal{E}(f)$ и $\xi : E \to \mathbb{R}^3$ – какой-нибудь представитель класса x.

Предположим сначала, что $i \leqslant b$. Пусть $\varphi(i) = (j,k)$. В графе G возьмём элементарные циклы, содержащие хорды e'_j и e'_k, снабдим эти циклы ориентациями, индуцированными ориентациями хорд e'_j и e'_k соответственно, и обозначим их через z_j и z_k. Мы полагаем $\lambda_i(x)$ равным коэффициенту зацепления кривой $f(z_j)$ и кривой, полученной сдвигом кривой $f(z_k)$ по нормали в положительном направлении к поверхности $\xi(E)$.

Предположим теперь, что $b < i \leqslant b + c$. В графе G возьмём элементарный цикл, содержащий хорду e'_{i-b}, снабдим его какой-нибудь ориентацией, и обозначим через z'_{i-b}. (Ясно, что цикл z'_{i-b} либо совпадает с циклом z_{i-b}, либо получается из цикла z_{i-b} обращением ориентации.) Мы полагаем $\lambda_i(x)$ равным коэффициенту зацепления кривой $f(z'_{i-b})$ и кривой, полученной сдвигом кривой $f(z'_{i-b})$ по нормали в положительном направлении к поверхности $\xi(E)$.

Корректность этого определения (число $\lambda_i(x)$ не зависит ни от выбора представителя ξ класса x, ни (при $b < i \leqslant b + c$) от выбора ориентации цикла z'_{i-b}) очевидна.

Определим отображение

$$\lambda \ : \mathcal{E}(f) \to \mathbb{Z}^n$$

формулой

$$\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x))$$

(для любого $x \in \mathcal{E}(f)$).

Теорема *Отображение λ определено корректно и является биекцией.*

§4. Доказательство основной теоремы

Корректность определения отображения λ очевидна. Мы докажем, что отображение λ является биекцией.

Начнём с замечания. Согласно пункту 2.2, гладкое многообразие E может быть получено приклеиванием к гладкому многообразию $\mathrm{Cl}(F \setminus G)$ двумерных ручек h_i с $1 \leqslant i \leqslant n$, осями которых при $1 \leqslant i \leqslant b$ являются многообразия $\mathrm{Cl}(e_i \setminus \mathrm{Cl}(F \setminus G))$ и при $b+1 \leqslant i \leqslant b+c$ многообразия $\mathrm{Cl}(e'_{i-b} \setminus \mathrm{Cl}(F \setminus G))$. (Ручки h_i с осями $\mathrm{Cl}(e_i \setminus \mathrm{Cl}(F \setminus G))$ или $\mathrm{Cl}(e'_{i-b} \setminus \mathrm{Cl}(F \setminus G))$ – это пары $(I \times [-1,1] \times i, I \times 0 \times i)$.)

Определим следующим образом отображение

$$\mu \ : \mathbb{Z}^n \to \mathcal{E}(f).$$

Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – какой-нибудь элемент множества $\mathbb{Z}^n$. В следующем абзаце мы построим последовательность продолжающих друг друга гладких вложений

$$f_i \ : F \cup h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_i \to \mathbb{R}^3, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

обладающих следующими свойствами:

(0) $f_0 = f$;

(1) если $\varphi(i) = (j, k)$ (для $1 \leqslant i \leqslant b$), то коэффициент зацепления замкнутой кривой $f(z_j)$ и замкнутой кривой, полученной сдвигом только той части кривой $f(z_k)$, которая расположена в поверхности $\mathrm{Cl}(F \setminus G) \cup h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_i$, по нормали в положительном направлении к этой поверхности, равен d_i;

(2) для $b + 1 \leqslant i \leqslant b + c$ коэффициент зацепления замкнутой кривой $f(z'_{i-b})$ (расположенной в поверхности $\mathrm{Cl}(F \setminus G) \cup h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_i$) и замкнутой кривой, полученной сдвигом этой кривой по нормали в положительном направлении к поверхности $\mathrm{Cl}(F \setminus G) \cup h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_i$, равен d_i;

(3) для $1 \leqslant i \leqslant n$ вложение f_i вложением f_{i-1} и числом d_i определено однозначно с точностью до изотопии пространства $\mathbb{R}^3$, неподвижной на образе вложения f_{i-1}.

Класс вложения f_n и будет по нашему определению образом элемента $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ при отображении μ. То, что это определение корректно, следует из свойств (1)-(3).

Построение является индуктивным. Начало индукции тривиально: мы положим $f_0 = f$. Предположим, что $i \geqslant 1$ и что вложение f_{i-1} со свойствами (1)-(3) уже имеется. Продолжим вложение f_{i-1} до (какого-то) вложения $F \cup h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_i \to \mathbb{R}^3$, гладкого на ручке h_i; существование такого продолжения очевидно. Далее, вычислим коэффициент зацепления замкнутых кривых, о которых говорилось в свойствах (1) или (2). (Выбирается свойство (1) или свойство (2) в зависимости от того, число i меньше, чем число $b+1$, или нет). Если упомянутый коэффициент зацепления равен числу d_i, то через f_i обозначим полученное продолжение. Если же он отличен от числа d_i, то подправим сужение вложения на ручку h_i, оставив вложение неподвижным на оси ручки и подкрутив ручку вокруг её оси на целое кратное число полных оборотов, так чтобы коэффициент зацепления упомянутых замкнутых кривых стал равным числу d_i, и через f_i обозначим полученное

вложение. Осталось заметить, что в любом случае продолжение f_i – искомое: оно, очевидно, будет удовлетворять также и свойству (3).

Наша основная теорема следует из того, что, как нетрудно видеть,

$$\mu \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathcal{E}(f)} \quad \text{и} \quad \lambda \circ \mu = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}.$$

Литература

1. М. Н. Гусаров, *Вариации заузленных графов. Геометрическая техника n-эквивалентности.* — Алгебра и анализ **12**, No. 4 (2000), 79–125.
2. L. H. Kauffman, *Invariants of graphs in three-space.* — Trans. Amer. Math. Soc. **311**, No. 2 (1989), 697–710.
3. Ю. В. Маслова, В. М. Нежинский, *Оснащения максимальных деревьев парами хорд.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **415** (2013), 91–102.
4. В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова, *Вершинно оснащенные графы.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **415** (2013), 103–108.
5. В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова, *Зацепления вершинно оснащенных графов.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1. (2012), вып. 2, 57–60.
6. В. М. Нежинский, *Пространственные графы, тенглы и плоские деревья.* — Алгебра и анализ, в печати.
7. V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* — de Gruyter Studies in Mathematics, 18, Walter de Gruyter, Berlin, 1994, x + 588 pp.

Nezhinskij V. M., Maslova Yu. V. Framings of spatial graphs.

In the theory of spatial graphs an analogue of the theorem on the isotopic classification of the framings of classical knots is formulated and proved.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. д. 28;
198504 Петродворец,
Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки д. 48,
191186 С.-Петербург, Россия
E-mail: nezhin@pdmi.ras.ru

Поступило 28 ноября 2017 г.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки д. 48,
191186 С.-Петербург, Россия
E-mail: yuliapetrova@mail.ru