

Е. С. Краско

## ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НЕПОМЕЧЕННЫХ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ МАКСИМАЛЬНОГО РОДА

### ВВЕДЕНИЕ

*Хордовой диаграммой* называется окружность с равномерно расположеными на ней  $2n$  точками, разбитыми на пары *хордами* (рис. 1(а)). С комбинаторной точки зрения хордовые диаграммы изоморфны картам с одной гранью на поверхностях некоторого рода: любая хордовая диаграмма определяет способ попарно склеить стороны  $2n$ -угольника так, что в результате получится ориентируемая поверхность с уложенной на ней картой с одной гранью, образованной вершинами и ребрами многоугольника (рис. 1(б)). Каждая пара сторон склеивается без переворота, как показано стрелками на рис. 1(б). На подобных рисунках важна лишь относительная ориентация стрелок в каждой паре.

Понятие *двойственной карты* позволяет заменить грани вершинами, а вершины гранями, так что хордовые диаграммы оказываются изоморфны и картам с одной вершиной. *Родом* хордовой диаграммы называется род поверхности, на которую уложена соответствующая карта.

Хордовые диаграммы и их свойства изучались многими авторами. Классическая теорема перечислительной комбинаторики утверждает, что количество плоских (рода 0) хордовых диаграмм, построенных на  $n$  хордах, равно числу Каталана  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Уолш и Леман доказали [1, (14)], что в другом предельном случае когда род карты с одной гранью, имеющей  $2n$  ребер, является максимально возможным, то есть равным  $g$ , перечислительная формула также оказывается необыкновенно простой:  $\mu_{2g} = \frac{(4g)!}{4^g (2g+1)!}$ . Формула Харера и Загира [2, Theorem 2] позволяет найти количество хордовых диаграмм заданного рода  $g$  при фиксированном числе ребер  $n$ .

---

*Ключевые слова:* хордовые диаграммы; карты на поверхностях; перечисление непомеченных объектов.

Кори и Маркус назвали хордовые диаграммы рода  $g$ , имеющие  $2g$  хорд, *максимальными* и нашли перечислительную формулу для количества классов эквивалентности таких диаграмм [3]. Использованное ими отношение эквивалентности включало только вращения окружности, на которой построена диаграмма.

Естественно попытаться обобщить этот результат и перечислить максимальные диаграммы относительно действия наиболее полной группы симметрий – группы диэдра  $D_n$ . Эта задача может быть переформулирована как задача перечисления карт рода  $g$ , имеющих в точности одну грань и одну вершину, с точностью до всех гомеоморфизмов поверхности – как сохраняющих, так и не сохраняющих ее ориентацию.

На сегодняшний день известно не так много результатов, касающихся перечисления карт с точностью до всех гомеоморфизмов. Существует формула [4] для количества всех рассечений многоугольника (объектов, изоморфных планарным деревьям), два различных подхода [5, 6] к перечислению карт на сфере произвольного вида, однако ни один из этих результатов не был обобщен на карты более высокого рода. В этой заметке мы решим задачу перечисления максимальных хордовых диаграмм рода  $g$  с точностью до всех изоморфизмов, получив таким образом и решение соответствующей комбинаторной задачи для карт.

## ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы начнем с того, что запишем *лемму Бернсайда*, которая утверждает, что количество  $|X/G|$  классов эквивалентности объектов во множестве  $X$  относительно действия группы  $G$  выражается как

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_g(X)|,$$

где  $\text{Fix}_g(X)$  – множество элементов  $X$ , неподвижных относительно действия элемента  $g$ . Как следствие, для заданного класса  $\mathcal{D}$  хордовых диаграмм с  $n$  ребрами, последовательности  $d_n^*$  и  $d_n^\circ$ , перечисляющие классы эквивалентности, соответственно, относительно вращений и

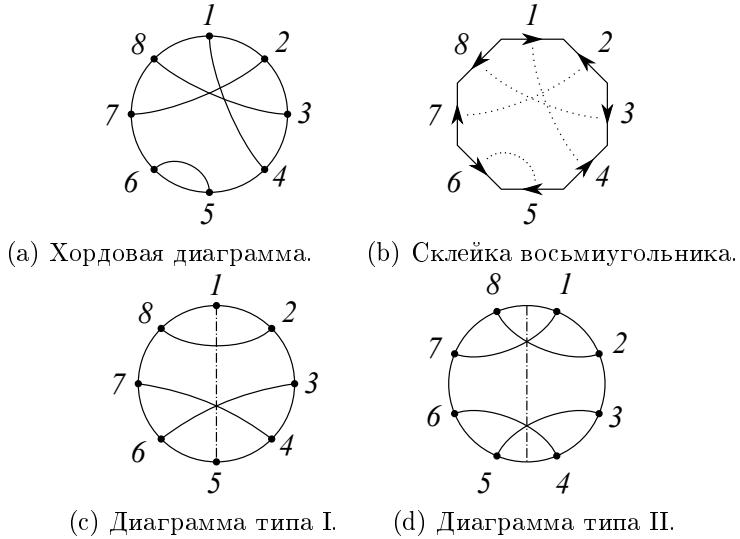


Рис. 1. Хордовые диаграммы и склейки многоугольников.

относительно всех симметрий, можно связать так:

$$\begin{aligned} d_n^* &= \frac{1}{2n} \sum_{g \in C_{2n}} |\text{Fix}_g(\mathcal{D})|; \\ d_n^\circ &= \frac{1}{4n} \sum_{g \in D_{2n}} |\text{Fix}_g(\mathcal{D})|; \quad \Rightarrow \quad d_n^\circ = \frac{d_n^*}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{g \in D_{2n} \setminus C_{2n}} |\text{Fix}_g(\mathcal{D})|. \end{aligned}$$

Здесь  $C_{2n}$  и  $D_{2n}$  – это, соответственно, циклическая группа вращений и диэдральная группа вращений и отражений окружности, на которой равномерно расположены  $2n$  точек. Элементы множества  $D_{2n} \setminus C_{2n}$  – это отражения двух типов:  $n$  отражений относительно оси, проходящей через две противоположные точки, а также  $n$  отражений относительно оси, проходящей через середины двух противоположных дуг, на которые этими точками разделена окружность. Поскольку интересующий нас класс  $\mathcal{D}$  максимальных диаграмм замкнут относительно вращений, для любых двух отражений  $g$  и  $h$  одного и того же типа верно, что  $|\text{Fix}_g(\mathcal{D})| = |\text{Fix}_h(\mathcal{D})|$ . Таким образом, для максимальных

диаграмм

$$d_{2g}^{\circ} = \frac{d_{2g}^*}{2} + \frac{d_{2g}^{\perp} + d_{2g}^{\parallel}}{4}, \quad (1)$$

где  $d_{2g}^{\perp}$  – число хордовых диаграмм, в которых ось симметрии проходит через точки 1 и  $2g + 1$  (*диаграммы типа I*, рис. 1(c)),  $d_{2g}^{\parallel}$  – число хордовых диаграмм, в которых ось симметрии проходит через центры дуг  $(4g) - (1)$  и  $(2g) - (2g+1)$  (*диаграммы типа II*, рис. 1(d)). Для максимальных диаграмм явная формула для чисел  $d_{2g}^*$  была найдена в [3]. Далее мы сосредоточимся на поиске выражений для чисел  $d_{2g}^{\perp}$  и  $d_{2g}^{\parallel}$ . Вначале введем несколько определений.

**Определение 1.** Для заданной хордовой диаграммы обходом грани называется циклическая последовательность, состоящая из чередующихся хорд и дуг окружности, полученная обходом этой диаграммы, показанным на рис. 2(а).

Если представить ходовую диаграмму в виде полученной склейкой многоугольника карты с одной гранью, то каждый обход грани в исходной диаграмме будет отвечать циклическому обходу инцидентных некоторой вершине полуребер. В двойственной же карте с одной вершиной такой обход будет вновь отвечать обходу некоторой грани. Легко проверить, что максимальные хордовые диаграммы – это в точности те диаграммы, которые имеют лишь один обход грани.

**Определение 2.** Для заданной хордовой диаграммы и отражения, которое оставляет ее неподвижной, вертикальной хордой будем называть хордой, которая лежит на оси этого отражения. Горизонтальной хордой будем называть хордой, чьи концы меняются местами при действии такого отражения.

Для представления симметричной относительно отражения диаграммы в виде карты с одной гранью мы можем использовать понятие *фактор-карты*, введенное Лисковцом [6, Section 4].

**Определение 3.** Пусть  $S$  – поверхность рода  $g$  вместе со вложенной в нее картой; пусть  $\alpha$  – некоторый автоморфизм такого вложения (рис. 2(b)). Соответствующая фактор-карта – это результат отождествления точек каждой орбиты действия  $\alpha$  на  $S$  (рис. 2(c)).

Заметим, что для получения верного направления склейки, указанного на рис. 2(с), мы должны рассмотреть каждую пару симметричных хорд, которая отвечает склейке некоторых двух сторон многоугольника – если эти хорды пересекаются, то стороны будут склеены с переворотом; если нет – стороны будут склеены в прямом направлении. Склейвая стороны так, как показано на рис. 2(с), и принимая в расчет направление склейки, мы получим поверхность со вложенной картой, изображенную на рис. 2(д). В общем случае, если хотя бы одна пара сторон была склеена с переворотом, карта будет вложена в неориентируемую поверхность. Лисковец [6] показал, что понятие фактор-карты обобщает понятие карты на поверхности, и отметил некоторые дополнительные особенности, которые у фактор-карты могут присутствовать. Некоторые из них можно проанализировать на рис. 2(д): поверхность представляет собой цилиндр с заклеенным лентой Мебиуса отверстием; одна из граней этого цилиндра содержит ребро и вершину исходной карты, вторая же содержит только вершину.

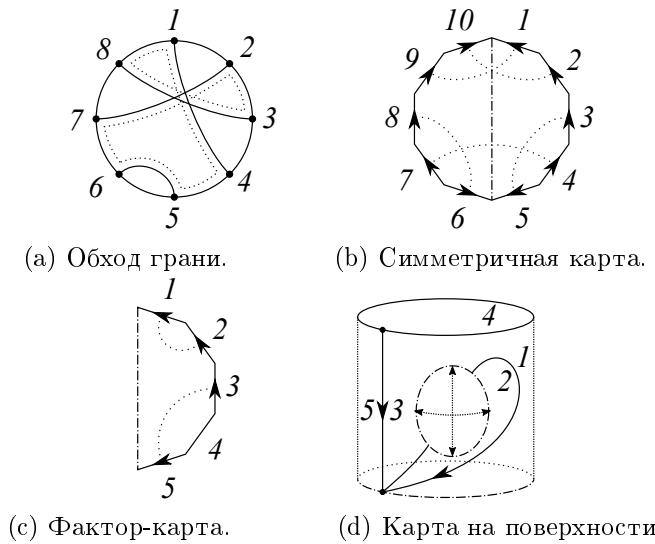


Рис. 2. К определениям.

## СТРУКТУРА ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ДИАГРАММ

Оказывается, при изучении максимальных хордовых диаграмм мы можем избежать большинства трудностей, описанных в [6]. Чтобы формализовать это утверждение, нам понадобятся две дополнительные леммы.

**Лемма 4.** *Максимальные хордовые диаграммы типа II не имеют горизонтальных хорд.*

**Доказательство.** Проще всего доказать этот факт, проанализировав структуру обхода грани в такой диаграмме. Начнем обход из верхней точки, где он проходит вдоль дуги  $(4g) - (1)$ . Поскольку диаграмма допускает отражение, если мы начнем обход в двух направлениях одновременно (рис. 3(a)), мы будем иметь возможность следовать вдоль двух линий, являющихся зеркальным отражением друг друга. Следуя вдоль этих линий, мы в конце концов завершим обход, поскольку он замкнется. Из соображений симметрии это произойдет, когда мы встретим либо дугу  $(2g) - (2g + 1)$ , либо горизонтальную хорду. Заметим однако, что если обход замкнется на горизонтальной хорде, то единственный обход грани данной диаграммы не прошел вдоль дуги  $(2g) - (2g + 1)$ , что невозможно. Как следствие, такой обход не проходит ни через одну горизонтальную хорду, а значит, такие хорды в диаграмме отсутствуют.  $\square$

**Лемма 5.** *Любая максимальная диаграмма типа I содержит ровно одну вертикальную и ровно одну горизонтальную хорду. Удаление этих хорд приводит к максимальной диаграмме типа II. Обратно, вставка горизонтальной и вертикальной хорды в максимальную диаграмму типа II порождает максимальную диаграмму типа I.*

**Доказательство.** Существование вертикальной хорды  $(1) - (2g + 1)$  очевидно. Чтобы доказать, что диаграмма имеет ровно одну горизонтальную хорду, вновь проанализируем обход грани. Начнем обход с дуг  $(4g) - (1)$  и  $(1) - (2)$  и пойдем в двух противоположных направлениях (рис. 3(b)). Два пути, вдоль которых мы обходим диаграмму, должны в конце концов сойтись на горизонтальной хорде (рис. 3(c)). Когда это произойдет, вернемся в начальные точки и продолжим обход в обратном направлении (рис. 3(d)). При этом пути обхода вновь сойдутся на некоторой горизонтальной хорде. Заметим теперь, что

это обязана быть та же самая хорда, иначе обход грани не проходит вдоль этой хорды с одной из сторон, что противоречит тому, что диаграмма максимальная.

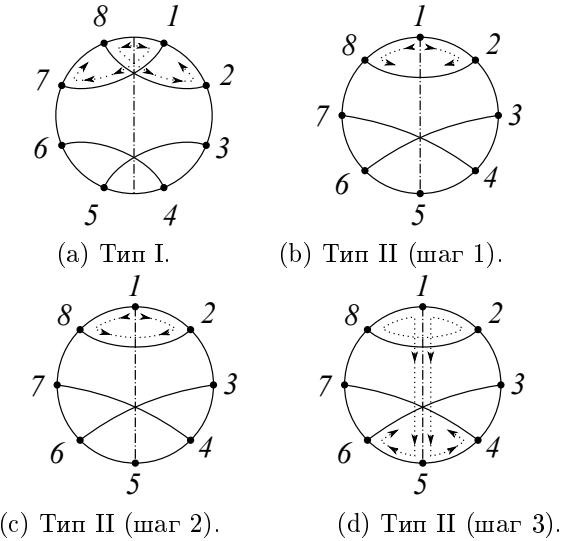


Рис. 3. Обход грани в максимальных диаграммах.

Для доказательства третьей части утверждения можно проверить два простых утверждения. Во-первых, вставка хорды в диаграмму таким образом, что ее концы попадают на дуги, принадлежащие одному и тому же обходу грани, разбивает этот обход на два. Во-вторых, если такие дуги принадлежали обходам разных граней, то эти обходы, наоборот, склеятся в один. Поскольку диаграмма симметрична, вставка вертикальной хорды в максимальную диаграмму типа II разбивает ее обход грани на два обхода, которые являются зеркальными отражениями друг друга. После этого вставка любой горизонтальной хорды неизбежно соединит дуги, относящиеся к обходам разных граней, и мы получим максимальную диаграмму типа I.  $\square$

Из леммы 4 следует, что фактор-карта, соответствующая максимальной диаграмме типа II, не содержит хорд, которые оканчиваются на границе поверхности. Этот факт позволяет доказать следующую

теорему, которая сводит нашу задачу к задаче, решенной в [7] с использованием метода матричных интегралов.

**Теорема 6.** *Существует биекция между максимальными диаграммами типа II с  $2g$  хордами и корневыми картами с одной вершиной, одной гранью и  $g$  ребрами на ориентированных и неориентированных поверхностях без края.*

**Доказательство.** Вначале заменим диаграммы их представлениями в виде  $4g$ -угольников с попарно отождествленными сторонами. Поскольку рассматриваемые диаграммы имеют тип II, на  $4g$ -угольнике ось симметрии проходит через две вершины. Так как диаграмма максимальна, после склейки ребер остается лишь одна вершина, а значит, ось симметрии проходит через эту вершину и через одну грань. Для фактор-карты это означает, что поверхность имеет границу, эта граница содержит единственную вершину и служит стороной единственной грани фактор-карты.

По лемме 4 диаграмма не имеет горизонтальных хорд, а значит, полученная поверхность не имеет других границ. Иными словами, фактор-карта построена склейкой  $(2g + 1)$ -угольника так: одна его сторона (изначально ось симметрии) не склеена ни с одной другой, а оставшиеся  $2g$  сторон разбиты на пары и склеены в одном из двух возможных направлений. Для каждой пары направление определяется тем, пересекается ли отвечающая данной паре сторон пара хорд в исходной диаграмме. Выберем теперь в качестве корневого ориентированного ребра карты ребро  $(1) - (2)$  многоугольника, единственную границу стянем в точку (или заклеим диском), а затем удалим пометки на ребрах. В результате мы получим карту с одной гранью, одной вершиной и  $g$  ребрами на ориентируемой или неориентируемой поверхности.

Данное преобразование является обратимым, и обратное к нему может быть применено к любой карте с одной гранью и одной вершиной следующим образом. Воспользуемся корнем карты для того, чтобы однозначно определить предшествующий ему лугол, и надрежем его, создав тем самым у поверхности границу. Полученную карту на поверхности с границей можно представить в виде  $(2g + 1)$ -угольника,  $2g$  сторон которого попарно склеены в прямом или обратном направлении. Оставшаяся свободной сторона в результате будет отвечать оси симметрии хордовой диаграммы. Полученный  $(2g + 1)$ -угольник

представляет собой половину симметричного  $4g$ -угольника, в котором стороны разбиты на пары и имеется фиксированная ось симметрии. Каждая пара склеенных сторон  $(2g+1)$ -угольника при этом отвечает четырем сторонам  $4g$ -угольника. Эти четыре стороны должны быть разбиты на пары одним из двух возможных симметричных способов в зависимости от направления склейки отвечающих им сторон  $(2g+1)$ -угольника. По построенному таким образом  $4g$ -угольнику хордовая диаграмма восстанавливается однозначно: каждая пара отождествленных сторон отвечает одной хорде.  $\square$

### ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛА

По теореме 6, число  $d_{2g}^{||}$  равно количеству корневых карт с одной гранью, одной вершиной и  $g$  ребрами на ориентируемых и неориентируемых поверхностях. Рекуррентное соотношение для последовательности, описывающей такие карты, может быть получено подстановкой  $k = 1$  в [7, Corollary 7]:

$$\begin{aligned} d_{2g}^{||} &= \frac{1}{g+1} \left( -(4g-1)d_{2g-2}^{||} + g(2g-3)(10g-9)d_{2g-4}^{||} \right. \\ &\quad \left. + 30 \binom{2g-3}{3} d_{2g-6}^{||} - 240 \binom{2g-3}{5} d_{2g-8}^{||} \right). \end{aligned}$$

Для интересующего нас специального случая единственныe необходимые начальные условия – это  $d_{2g}^{||} = 0$  при  $g < 0$ ;  $d_0^{||} = d_2^{||} = 1$ . Из леммы 5 следует, что

$$d_{2g}^{||} = (2g-1) d_{2g-2}^{||},$$

где множитель  $(2g-1)$  подсчитывает способы вставить горизонтальную хорду в диаграмму типа II. Подставив эти выражения и выражение для  $d_{2g}^*$  [3, Proposition 6.3]

$$\begin{aligned} d_{2g}^* &= \frac{1}{4g} \left[ \frac{(4g)!}{4^g (2g+1)!} + \sum_{qk=4g, 2|q} \varphi(q) \sum_{\gamma=0}^{k/4} \binom{k}{4\gamma} \frac{(4\gamma)!}{4^\gamma (2\gamma+1)!} q^{2\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{qk=4g, 2\nmid q} \varphi(q) q^{k/2} \frac{k!}{2^{k/2} (k/2+1)!} \right] \end{aligned}$$

в формулу (1), автор получил числа  $d_{2g}^o$ , описывающие неэквивалентные максимальные диаграммы рода  $g$  (таблица 1).

$g$	$d_{2g}^*$	$d_{2g}^{\downarrow}$	$d_{2g}^{\uparrow\downarrow}$	$d_{2g}^{\circ}$
1	1	1	1	1
2	4	3	5	4
3	131	25	41	82
4	14118	287	509	7258
5	2976853	4581	8229	1491629
6	1013582110	90519	166377	506855279
7	508233789579	2162901	4016613	254118439668
8	352755124921122	60249195	113044185	176377605783906
9	324039613564554401	1921751145	3630535785	162019808170348933
10	380751174738424280720	68980179915	131095612845	190375587419231088550
11	557175918657122229139987	2753007869745	5256401729985	278587959330563466969926
12	993806827312044893602464496	120897239789655	231748716159765	496903413656110608290219603

Таблица 1. Количество максимальных диаграмм по роду.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оказывается, что максимальные диаграммы обладают структурой, позволяющей получить для их перечисления простые формулы как для помеченного, так и для непомеченного случаев. Так же, как и результат Кори и Маркуса, представленный в данной работе результат опирается на то, что фактор диаграммы определенного вида максимальен тогда и только тогда, когда максимальна сама диаграмма. Однако, если попытаться обобщить это наблюдение и перечислить непомеченные хордовые диаграммы рода  $g$  с фиксированным количеством граней больше единицы, связь между количеством граней на исходной диаграмме и на ее факторе станет существенно более сложной. В настоящее время автору неизвестен способ описать формулой ответ на эту более общую задачу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. R. S. Walsh, A. B. Lehman, *Counting rooted maps by genus, I.* — J. Combin. Theory Ser. B **13** (1972), 192–218.
2. J. Harer, D. Zagier, *The euler characteristic of the moduli space of curves.* — Invent. Math. **85** (1986), 457–485.
3. R. Cori, M. Marcus, *Counting non-isomorphic chord diagrams.* — Theoretical Computer Science **204:** (1998), 55–73.
4. R.C. Read, *On general dissections of a polygon.* — Aeq. Math. **18** (1978), 370–388.
5. N.C. Wormald, *Counting unrooted planar maps.* — Discrete Math. **36** (1981), 205–225.
6. V. A. Liskovets, *A reductive technique for enumerating non-isomorphic planar maps.* — Discrete Mathematics **156** (1996), 197–217.
7. M. Ledoux, *A recursion formula for the moments of the gaussian orthogonal ensemble.* — Annales de l’Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques **45**, No. 3 (2009), 754–769.

Krasko E. S. Counting unlabelled chord diagrams of maximal genus.

Maximal chord diagrams up to all isomorphisms are enumerated. The enumerating formula is based on a bijection between rooted one-vertex one-face maps on locally orientable surfaces and a certain class of symmetric chord diagrams. This result extends the one of Cori and Marcus regarding maximal chord diagrams enumerated up to rotations.

Санкт-Петербургский  
Академический Университет  
*E-mail:* krasko.evgeniy@gmail.com

Поступило 9 ноября 2017 г.