

К. П. Кохась, А. С. Латышев

## НА КАКИХ ГРАФАХ МУДРЕЦЫ МОГУТ УГАДАТЬ ЦВЕТ ХОТЯ БЫ ОДНОЙ ШЛЯПЫ

**1. Введение.** В этой статье мы рассмотрим следующий популярный сюжет, который будем называть игрой в шляпы или игрой “Hats”.

Есть  $n$  мудрецов и большой запас шляп  $k$  различных цветов. Мудрецы находятся в вершинах неориентированного графа  $G$ . Два мудреца видят друг друга, если находятся в смежных вершинах. С мудрецами проводят следующий ТЕСТ. Ведущий надевает мудрецам шляпы так, что в результате каждый видит шляпы всех соседей, но не видит своей шляпы и не знает ее цвета. Мудрецы не общаются. По команде ведущего мудрецы одновременно называют цвет. Считается, что мудрецы успешно прошли тест, т.е. *выиграли*, если хотя бы один из них угадал цвет своей шляпы.

Перед тестом мудрецам сообщили правила теста и дали возможность устроить СОВЕЩАНИЕ, на котором они должны определить публичную детерминированную стратегию. Публичность означает, что все, включая ведущего, знают ее. Будем говорить, что стратегия выигрышная, если при любой раскладке шляп, хотя бы один мудрец угадает цвет надетой на него шляпы. Также будем говорить, что мудрецы выигрывают, если они имеют выигрышную стратегию, и проигрывают, если не имеют.

Основной вопрос, подлежащий выяснению, – на каких графах мудрецы выигрывают? Мы рассматриваем игру в шляпы только при  $k = 3$ .

Впервые игра “Hats” была упомянута в 1961 г. в книге М. Гарднера [3]. Однако популярность завоевала только после 1998 г., когда Т. Эберт сформулировал ее в своей диссертации [2]. С тех пор рассматривалось большое количество вариаций игры “Hats”, как правило вероятностных. Только в статье [4] перечислено 36 различных вариантов правил.

Перечислим некоторые известные результаты для игры в шляпы.

---

*Ключевые слова:* игра, граф, детерминированная стратегия, информация.

**Лемма 1.** Пусть  $G'$  – подграф графа  $G$ . Если на графе  $G'$  мудрецы имеют выигрышную стратегию, то и на графике  $G$  мудрецы выигрывают.

Это очевидно.

**Теорема 2** ([1]). Если график  $G$  – дерево, то мудрецы проигрывают.

**Теорема 3** ([1]). Пусть  $G$  – дерево,  $A$  – любая его вершина. Тогда существуют два цвета  $c_1$  и  $c_2$  и две проигрышные раскладки шляп, такие что первая из них дает мудрецу  $A$  шляпу цвета  $c_1$ , а вторая – шляпу цвета  $c_2$ .

Следующую сложную теорему доказал W. Szczecila [5].

**Теорема 4.** Если график  $G$  – это цикл на  $n$  вершинах, где  $n$  делится на 3 или  $n = 4$ , мудрецы выигрывают. На всех остальных циклах мудрецы проигрывают.

Во втором параграфе мы даем необходимые определения и описываем способы реализации стратегий – трехвершинную и девятивершинную модели. Девятивершинная модель лежит в основе вычислительного подхода к задаче – основные результаты статьи получены с помощью громоздкого компьютерного счета. Она также используется для “быстрой”, т.е. относительно негромоздкой проверки стратегий, найденных на компьютере. Стратегии трудно найти, но когда они уже предъявлены, их выигрышность можно проверить с помощью довольно простых вычислений с матрицами  $9 \times 9$ . К сожалению, лишь в нескольких случаях нам удалось заменить эти вычисления логическим рассуждением.

В третьем параграфе мы анализируем варианты игры, когда мудрецам дается дополнительная информация – “подсказка”. Эти варианты игры представляют самостоятельный интерес. Кроме того, подсказки могут использоваться для описания (сложных) стратегий в общем варианте игры.

В четвертом параграфе доказан основной результат работы, он состоит в полном описании графов, на которых выигрывают мудрецы. А именно, верна следующая теорема.

**Теорема 20.** Мудрецы проигрывают на связном графике  $G$  тогда и только тогда, когда график  $G$  – дерево или когда он содержит единственный цикл  $C_n$ , где  $n$  не делится на 3,  $n \geq 5$ .

**2. Трехвершинная и девятивершинная модели.** Всюду в этой работе через  $G$  обозначается граф, в вершинах которого находятся мудрецы. Граф  $G$  неориентированный, не имеет петель и кратных дуг. Мы часто будем отождествлять мудрецов с вершинами графа. Через  $H$  мы обозначаем множество цветов шляп,  $H = \{0, 1, 2\}$ . Через  $C_n$  обозначается цикл из  $n$  вершин,  $P_n$  – путь из  $n$  вершин, если нужно указать начальную и конечную вершину пути, мы пишем  $P_n(AB)$  или просто  $P(AB)$  (при выписывании стратегий мы считаем, что вершины упорядочены вдоль пути в направлении от  $A$  к  $B$ ).

По правилам игры цвет, который называет мудрец, зависит только от тех цветов, которые он видит у соседей. Таким образом, стратегия мудреца, находящегося в вершине  $v$ , – это функция  $f_v : H^{\deg(v)} \rightarrow H$ . Стратегию  $f_v$  удобно задавать  $\deg(v)$ -мерной матрицей. Чтобы подчеркнуть специфику, мы будем заключать матрицы, задающие стратегии, в квадратные скобки, нумерация элементов по каждой координате предполагается от 0 до 2. Например, мудрец, находящийся в висячей вершине графа, может пользоваться стратегией “что вижу, то и говорю”, которая задается матрицей  $[0 \ 1 \ 2]$ . А если мудрец  $v$  имеет двух соседей – левого и правого, то одна из его возможных стратегий

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

состоит в том, что если сосед слева имеет шляпу цвета 0, то мудрец в вершине  $v$  называет цвет шляпы правого соседа, а во всех остальных случаях мудрец  $v$  называет цвет 1. Обычно мы предъявляем стратегии в случае, когда мудрецы обозначены или пронумерованы, и тогда координаты матриц, задающих стратегии, упорядочены лексикографически. Список всех функций  $\{f_v, v \in V\}$  будем называть (коллективной) стратегией мудрецов.

Пусть мудрецы зафиксировали коллективную стратегию. Будем говорить, что задан *расклад шляп*, если построена функция  $C : V \rightarrow H$ , т.е. каждой вершине  $v$  графа  $G$  приписан некоторый цвет  $C(v)$ . В случае, когда это не вызывает недоразумений, будем обозначать цвет вершины  $v$  через  $c_v$ . Расклад шляп будем называть *проигрышным* или

*опровергающим*, если для этого расклада ни один из мудрецов, действуя по стратегии, не угадал цвет своей шляпы, т.е. для любой вершины  $v$

$$f_v(C(u_1), \dots, C(u_k)) \neq C(v),$$

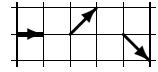
где  $u_1, \dots, u_k$  – список соседей вершины  $v$ . Если  $P$  – это путь в графе  $G$  (или цикл), назовем раскладку шляп в вершинах  $P$  *опровергающей цепочкой*, если все мудрецы, стоящие во внутренних вершинах пути  $P$ , не угадывают (для цикла – все мудрецы не угадывают).

**2.1. Трехвершинная модель.** Для произвольного графа  $G = \langle V, E \rangle$  обозначим через  $3*G$  граф, у которого множество вершин – это  $V \times H$ , две вершины  $(u, i)$ ,  $(v, j)$  соединены ребром тогда и только тогда, когда  $uv \in E$ . Граф  $3*G$  будем называть *трехвершинной моделью* исходного графа  $G$ .

Опровергающие цепочки и вообще расклады шляп удобно рассматривать на графе  $3*G$ . Для каждого расклада шляп  $c = (c_1, \dots, c_\ell)$  на множестве вершин  $V = \{v_1, \dots, v_\ell\}$  графа  $G$  определим его *поднятие* (“его” – это расклада шляп или графа  $G$ , как хотите) в граф  $3*G$ . По определению поднятие – это подграф  $G_c$  графа  $3*G$ , изоморфный графу  $G$ , с множеством вершин  $(v_i, c_i)$ ; вершины  $(v_i, c_i)$ ,  $(v_j, c_j)$  соединены ребром в том и только том случае, когда  $v_i v_j$  – ребро графа  $G$ , см. рис. 2. Будем говорить, что подграф  $G_c$  задает *расклад шляп в трехвершинной модели*.

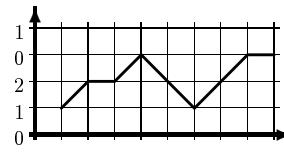
Трехвершинная модель была основным рабочим инструментом в работе W. Szczechla [5], где автор доказывает теорему 4, опираясь на тщательный анализ свойств опровергающих цепочек.

Для доказательства леммы 8 ниже нам потребуется еще один способ визуализации опровергающих цепочек – в виде путей Моцкина. *Путь Моцкина* – это (ориентированная) ломаная на координатной плоскости, у которой все звенья идут в направлениях, показанных на рисунке справа.



Пусть мудрецы, находящиеся в вершинах пути  $A_1 A_2 \dots A_n$ , получили шляпы  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , где  $c_i \in \{0, 1, 2\}$  при всех  $i$ . Изобразим этот расклад шляп в виде пути Моцкина. Начало пути поместим в точку  $(1, c_1)$  на координатной плоскости. В арифметике по модулю 3 каждый остаток может быть получен из любого другого прибавлением  $-1, 0$  или  $1$ .

С учетом этого соображения строим путь по следующему правилу: если уже построена  $i$ -я точка пути, то следующее звено имеет вид  $\rightarrow$ , если  $c_{i+1} = c_i$ ;  $\nwarrow$ , если  $c_{i+1} = c_i - 1 \bmod 3$ ; и  $\nearrow$ , если  $c_{i+1} = c_i + 1 \bmod 3$ . Например, при  $n = 9$  раскладу шляп 122021200 соответствует путь Моцкина справа.



**2.2. Девятивершинная модель.** Для каждого графа  $G$  обозначим через  $L(G)$  *реберный граф* графа  $G$  – каждая вершина графа  $L(G)$  соответствует ребру графа  $G$ , две вершины графа  $L(G)$  соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие ребра в графе  $G$  смежны.

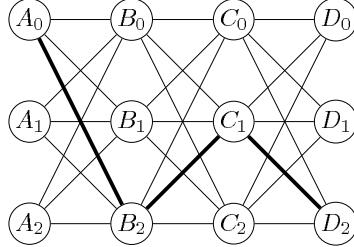
Пусть сначала график  $G$  – это путь  $P = P_n$  (или цикл  $C_n$ ). Рассмотрим график  $G^{[9]} = L(3 * G)$ . Его вершины – это пары соседних мудрецов в графике  $G$  с указанием для каждого мудреца цвета (это возможный цвет его шляпы). Граф  $G^{[9]}$  будем называть *исходным графиком девятивершинной модели*. Каждому пути  $T$  в графике  $3 * G$  однозначно соответствует путь  $\tilde{T}$  в графике  $G^{[9]}$ , который будем называть *поднятием* пути  $T$ . Таким образом, расклад шляп  $c$  на исходном пути  $P$  задает поднятие  $P_c$  в графике  $3 * G$ , для которого, в свою очередь, определено поднятие  $\tilde{P}_c$  в графике  $G^{[9]}$ . Таким образом, расклады шляп в графах  $P$  и  $C_n$  можно изображать путями в графике  $G^{[9]}$  (рис. 3).



Рис. 1. Путь  $P$  и расклад шляп  $c$  на нем.

В случае произвольного графа  $G$  будем называть *исходным графиком девятивершинной модели* реберный гиперграф  $G^{[9]}$  графа  $3 * G$ , определяемый следующим образом.

Вершины графа  $G^{[9]}$  соответствуют ребрам графа  $3 * G$ . Таким образом, одному ребру в графике  $G$  соответствует 9 ребер в графике  $3 * G$  и 9 вершин в гиперграфе  $G^{[9]}$ . Множество вершин графа  $G^{[9]}$ , соответствующее одной паре соседних мудрецов, т. е. одному ребру графа  $G$ , будем называть *слоем*. Так, 9 вершин  $A_i B_j$ , расположенных в левом

Рис. 2. Путь  $P_c$  – поднятие расклада  $c$  в граф  $3 * P$ .

столбце рис. 3, образуют слой, соответствующий паре мудрецов  $A, B$  на рис. 1.

Опишем гиперребра графа  $G^{[9]}$ . Каждой вершине исходного графа  $G$  однозначно соответствует одно гиперребро графа  $G^{[9]}$ , задаваемое следующим образом. Пусть  $u$  – произвольная вершина графа  $G$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_k$  – (неупорядоченное) множество всех ее соседей и  $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k)$  – произвольный набор цветов. Тогда пары  $(u, \alpha), (v_1, \beta_1), \dots, (v_k, \beta_k)$  суть вершины графа  $3 * G$ , а четверки вида  $((u, \alpha), (v_i, \beta_i))$  – вершины  $G^{[9]}$ . Гиперребро, заданное вершиной  $u$ , есть объединение  $(k+1)$  вершин гиперграфа  $G^{[9]}$

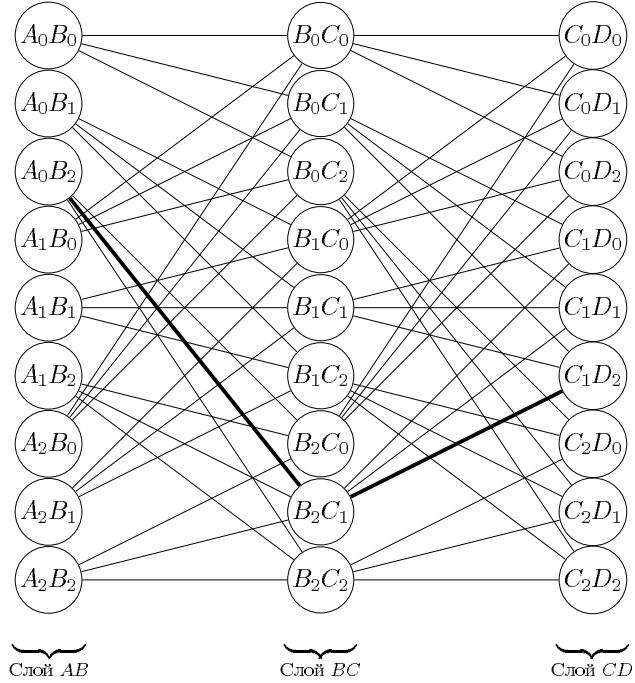
$$((u, \alpha), (v_1, \beta_1)), \quad ((u, \alpha), (v_2, \beta_2)), \quad \dots, \quad ((u, \alpha), (v_k, \beta_k)).$$

Для краткости будем записывать это гиперребро в виде

$$\left( (u, \alpha), \underbrace{(v_1, \beta_1), \dots, (v_k, \beta_k)}_{\text{неупорядоченный список пар}} \right). \quad (1)$$

Пусть теперь мудрецы выбрали стратегию  $f$ . Удалим из гиперграфа  $G^{[9]}$  некоторые гиперребра. Пусть мудрец  $u$  видит на мудреце  $v_1$  цвет  $\beta_1$ , на мудреце  $v_2$  – цвет  $\beta_2$ , …, на мудреце  $v_k$  – цвет  $\beta_k$ , и при этом по стратегии говорит цвет  $\alpha = f_u(\beta_1, \dots, \beta_k)$ . Тогда удалим из графа гиперребро  $((u, \alpha), (v_1, \beta_1), \dots, (v_k, \beta_k))$ . Такую операцию проделаем со всеми вершинами  $u$  и всеми комплектами цветов  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ . Полученный граф назовем *девятивершинной моделью графа  $G$  для стратегии  $f$*  и обозначим  $G_f^{[9]}$ .

Если задан опровергающий расклад шляп  $c$  для стратегии  $f$  на графике  $G$ , т. е. для каждой вершины  $v$  указан цвет шляпы  $c_v$ , так что при

Рис. 3. Путь  $\tilde{P}_c$  в девятивершинной модели  $P^{[9]}$ .

этом ни один мудрец не угадывает цвет своей шляпы, то мы можем с помощью этого расклада определить *поднятие* графа  $G$  в  $G_f^{[9]}$ . Для этого сначала поднимем  $G$  в граф  $3 * G$ , получим подграф  $G_c$  графа  $3 * G$ . Поскольку мы взяли опровергающий расклад шляп, для любой вершины графа  $G_c$  и ее соседей ни одно из гиперребер вида (1) не было удалено при построении графа  $G_f^{[9]}$ . Поэтому, выбирая ребра графа  $G_c$  в качестве вершин, а всевозможные наборы вершин графа  $G_c$  вида (1) в качестве гиперребер, мы корректно зададим некоторый гиперподграф  $\tilde{G}$  гиперграфа  $G_f^{[9]}$ , который и назовем *поднятием* графа  $G$  в  $G_f^{[9]}$ .

**Лемма 5.** Стратегия  $f$  является проигрышной на графе  $G$  тогда и только тогда, существует расклад цветов, с помощью которого можно задать поднятие графа  $G$  в гиперграф  $G_f^{[9]}$ .

**Доказательство.** То, что опровергающий расклад шляп поднимается в граф  $G_f^{[9]}$ , мы только что проверили. Верно и обратное: если вершины некоторого гиперподграфа  $\bar{G}$  в гиперграфе  $G_f^{[9]}$  взаимно-однозначно проектируются в ребра графа  $G$ , так что при этой проекции каждой вершине графа  $G$  вместе со всеми выходящими из нее ребрами соответствует ровно одно гиперребро в графе  $G_f^{[9]}$ , то подграф  $\bar{G}$  однозначно задает расклад шляп на графе  $G$ , опровергающий стратегию  $f$ . При этом граф  $\bar{G}$  является поднятием графа  $G$  в  $G_f^{[9]}$  с помощью этого расклада шляп.  $\square$

**Пример.** Пусть для графа  $G = P$  с раскладом шляп на рис. 1 (вершины упорядочены лексикографически) выбраны стратегии мудрецов  $B$  и  $C$

$$f_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Тогда часть графа  $P_f^{[9]}$ , соответствующая фрагменту графа  $L(3 * P)$  на рис. 2, показана на рис. 4. Поскольку расклад шляп на рис. 1 выигрышный для мудрецов (мудрец  $C$  угадывает цвет своей шляпы по стратегии  $f$ ), этот расклад шляп не определяет поднятие исходного графа  $P$  в граф  $P_f^{[9]}$  – ребро  $(B_2C_1)–(C_1D_2)$ , которое должно быть в этом поднятии, в графе  $P_f^{[9]}$  отсутствует.

**2.3. Тензор смежности и подсчет числа опровергающих раскладов.** Пусть  $u$  – произвольная вершина графа  $G$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_k$  – множество всех ее соседей. Каждое ребро  $uv_i$  графа  $G$  задает слой  $V_i$ , состоящий из 9 вершин графа  $G_f^{[9]}$  вида  $w_\gamma^{(i)} = (u, \alpha)(v_i, \beta)$ , где через  $\gamma = (\alpha, \beta) \in H \times H$  обозначены пары цветов. Построим “тензор смежности”  $M^{(u)}$ , описывающий, в каком случае точка

$$(w_{\gamma_1}^{(1)}, w_{\gamma_2}^{(2)}, \dots, w_{\gamma_k}^{(k)}) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k, \quad \text{где все } \gamma_i = (\alpha_i, \beta_i) \in H \times H,$$

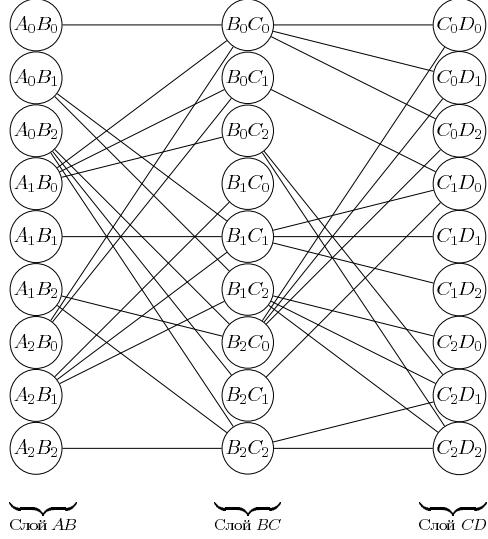


Рис. 4. Граф  $P_f^{[9]}$  для стратегии  $f$ , заданной формулой (2).

представляет собой гиперребро графа  $G_f^{[9]}$ . Пусть по определению

$$M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \text{ и при этом} \\ & ((u, \alpha_1), (v_1, \beta_1), \dots, (v_k, \beta_k)) - \text{гиперребро графа } G_f^{[9]}, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В частности при  $k = 2$  получаем обычную матрицу смежности двудольного подграфа, образованного двумя соседними слоями графа  $G_f^{[9]}$ . На рис. 5 показан пример матрицы  $M^{(B)}$ , которая соответствует вершине  $B$  графа  $P$  (рис. 1) и стратегии  $f$  из (2), она описывает инцидентность слоев  $AB$  и  $BC$  графа  $P_f^{[9]}$ , изображенного на рис. 4.

Отметим техническую деталь: в определении тензора  $M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)}$  координаты параметров  $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i)$  перечислены в направлении от вершины  $u$  к ее соседям:  $\alpha_i$  – это потенциально возможный цвет вершины  $u$ , а  $\beta_i$  – цвет соседней вершины  $v_i$ . В то же время при работе с матрицами удобно параметризовать строки и столбцы матрицы парами цветов  $\gamma = (\alpha, \beta) \in H \times H$  как показано на рис. 5, т. е. когда первый

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\
 \begin{array}{l} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{array} & \left( \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Рис. 5. Матрица  $M^{(B)}$  – матрица смежности слоя  $AB$  графа  $P_f^{[9]}$  со слоем  $BC$ . Индексация строк и столбцов получается опусканием букв из названий вершин.

параметр  $\gamma_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  задан в направлении от соседней вершины к вершине  $u$  (на рис. 5 – в направлении от вершины  $A$  к вершине  $B$ ). Для индекса  $\gamma = (\alpha, \beta)$  положим  $\gamma^* = (\beta, \alpha)$ .

Если для двух соседних вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  заданы тензоры смежности  $M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)}$  и  $M_{\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_\ell}^{(v)}$ , то очевидно среди их индексов присутствуют индексы  $\gamma_j = (\alpha_u, \beta_v)$  и  $\gamma'_j = (\beta_v, \alpha_u) = \gamma_i^*$ , соответствующие ребру  $uv$ . Такие индексы будем называть *повторяющими*.

Основная идея использования тензора смежности иллюстрируется следующим наблюдением. Рассматривая рис. 4, допустим, что мы построили также матрицу  $M^{(C)}$ , описывающую смежность слоев  $BC$  и  $CD$ . Сворачивая произведение  $M_{\gamma_1, \gamma_2}^{(B)} M_{\gamma_2^*, \gamma_3}^{(C)}$  по повторяющемуся индексу  $\gamma_2$ , т. е. вычисляя произведение матриц  $M^{(B)} M^{(C)}$ , мы получим матрицу, элементы которой подсчитывают количество путей в графе  $G_f^{[9]}$ , ведущих от слоя  $AB$  к слою  $CD$ . Каждый такой путь – это опровергающая цепочка для графа  $G = P$  на рис. 1, т. е. расклад шляп, для которого оба мудреца  $B$  и  $C$  не угадывают цвет своей шляпы.

В общем случае свертки тензоров смежности вершин позволяют подсчитывать количества опровергающих раскладов шляп. Например

выпишем произведения тензоров смежности по всем вершинам и всевозможных наборам индексов:

$$M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} M_{\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_\ell}^{(v)} \dots$$

Оставим только те произведения, в которых каждый (нижний) индекс повторяется дважды – по определению повторяющимся мы считаем лишь индексы  $\gamma$  вершин, соединенных ребром, когда они описывают один и тот же расклад цветов на этом ребре. Проводя суммирование по всем повторяющимся индексам (когда каждый индекс пробегает по множеству  $H \times H$ ) мы получаем *полную свертку* тензоров смежности

$$\sum M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} M_{\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_\ell}^{(v)} \dots$$

Верна следующая теорема.

**Теорема 6.** *Пусть  $u, v, \dots$  – список всех вершин графа  $G$ . Пусть задана стратегия мудрецов  $f$  и для каждой вершины  $u$  задан тензор смежности в графе  $G_f^{[9]}$ . Рассмотрим полную свертку тензоров смежности вершин*

$$N = \sum M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} M_{\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_\ell}^{(v)} \dots \quad (3)$$

*В этом выражении каждый индекс повторяется дважды и мы предполагаем суммирование, по всем повторяющимся индексам (каждый из повторяющихся индексов пробегает по множеству  $H \times H$ ). Тогда  $N$  равно количеству опровергающих раскладов шляп для стратегии  $f$ .*

**Доказательство.** Фактически это тавтология: опровергающие расклады шляп биективно соответствуют ненулевым слагаемым (а каждое ненулевое слагаемое в этой сумме равно 1).

Действительно, каждый опровергающий расклад шляп дает уникальное распределение цветов по вершинам графа  $G$ . При этом по определению гиперребра в  $G_f^{[9]}$  и тензора смежности мы для каждой вершины  $u$  имеем равенство  $M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} = 1$ . Таким образом, каждому опровергающему раскладу шляп в рассматриваемой сумме соответствует одно слагаемое, в котором все сомножители равны 1. И наоборот: если для каждой вершины  $u$  указать цвет ее и ее соседей, так что в каждой вершине будет наблюдаться равенство  $M_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(u)} = 1$ , то это назначение цветов непротиворечивым образом определяет раскраску

всех вершин графа, т. е. некоторый расклад шляп. Он, очевидно, является опровергающим.  $\square$

Приведем пример вычисления в 9-вершинной модели.

**Лемма 7.** Пусть  $G = C_{k+1}$ , т.е. граф  $G$  – это цикл  $AS_1S_2\dots S_k$ . Пусть мудрец  $A$  использует стратегию  $\mathbf{A}$ , а все остальные мудрецы используют стратегию  $\mathbf{S}$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тогда для данного набора стратегий существует ровно  $k+1$  опровергающих цепочек на графике  $G$ , и все они дают мудрецу  $A$  шляпу цвета 2.

**Доказательство.** Стратегии  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{S}$  приведены для циклического упорядочения мудрецов, а именно, мы считаем, что у мудреца  $A$  левым соседом является мудрец  $S_k$ , а правым – мудрец  $S_1$ , у мудреца  $S_1$  левым соседом является мудрец  $A$ , а правым – мудрец  $S_2$  и т. д. у мудреца  $S_k$  левым соседом является мудрец  $S_{k-1}$ , а правым – мудрец  $A$ .

Стратегиям  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{S}$  соответствуют следующие матрицы в 9-вершинной модели.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы матриц  $\mathcal{S}^k$  подчинены линейным рекуррентным соотношениям. Методом математической индукции несложно проверить, что при  $k \geq 3$

$$S^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-1 & 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k-2 & k-2 & k-2 & \frac{k^2-3k+4}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{k^2-3k+4}{2} & \frac{k^2-3k+4}{2} \\ 1 & 1 & 1 & k-1 & 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 1 & 1 & 1 & k-1 & 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{AS}^k = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ 00 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 01 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 02 & 1 & 1 & \underline{1} & k & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 10 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & k-1 & \boxed{0} & 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 20 & 1 & 1 & 1 & k & 0 & 0 & \boxed{0} & k & k \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & k & k \end{pmatrix} \quad (5)$$

(для наглядности мы добавили к матрице индексацию строк и столбцов с помощью параметров  $\gamma = (\alpha, \beta) \in H \times H$ ).

В произведении матриц  $\mathcal{AS}^k$  индексация строк “унаследована” от матрицы  $A$ , параметр строки  $(\alpha, \beta)$  обозначает возможный расклад цветов шляп на ребре, выходящем влево от  $A$ , т. е. на ребре  $S_k A$ . А индексация столбцов “унаследована” от матрицы  $S$ , отвечающей последнему мудрецу  $S_k$ , здесь параметр столбца  $(\alpha, \beta)$  обозначает возможный расклад цветов шляп на ребре, выходящем вправо от  $S_k$ , т. е. тоже на ребре  $S_k A$ . Таким образом диагональные элементы матрицы  $\mathcal{AS}^k$  указывают количества “зациклившимся” опровергающих цепочек на графе  $C_{k+1}$  для предъявленного набора стратегий.

Так, единица, стоящая на диагонали на месте  $\gamma_1 = (0, 2), \gamma_2 = (0, 2)$  (она подчеркнута), означает, что существует одна цепочка, которая дает мудрецу  $A$  цвет 2, а соседнему мудрецу  $S_k$  – цвет 0 (такие цепочки начинаются с ребра  $(S_k)_0 A_2$  в смысле трехвершинной модели

и, обойдя круг, зацикливаются, т. е. оканчиваются тем же самым ребром). Другой ненулевой элемент на диагонали – число  $k$  – стоит на месте (22)(22) и тоже соответствует цепочке, дающей мудрецу  $A$  шляпу цвета 2.  $\square$

**2.4. Применение SAT.** Утверждение теоремы 6 позволяет свести вопрос о существовании стратегий мудрецов на графе к задаче о выполнимости булевой функции. Заметим, что формула (3) имеет дело с неотрицательными целыми числами, а результат вычисления истолковывается сравнением с нулем: если  $N = 0$ , то мудрецы выиграли, а если  $N \neq 0$  – мудрецы проиграли.

Заменим арифметическое вычисление логическим. Пусть мы ищем стратегию мудрецов  $f$ . Для каждой вершины  $u$ , ее соседей  $v_1, \dots, v_k$  в графе  $G$ , цвета  $\alpha$  и комплекта цветов  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  для этих вершин заведем булеву переменную  $m_{\alpha, \beta}^{(u)}$ . Пусть эта переменная будет ложной тогда и только тогда, когда мудрец в вершине  $u$  угадывает при таком раскладе цветов, т.е. когда  $f(\beta) = \alpha$  (используя параметры  $\alpha, \beta$  вместо параметров  $\gamma$ , мы “отсекаем” заведомо нулевую часть тензора смежности). Чтобы набор значений этих переменных соответствовал какой-то реальной стратегии, нужно потребовать, чтобы для каждого комплекта цветов  $\beta$  ровно одна из переменных  $m_{0, \beta}^{(u)}, m_{1, \beta}^{(u)}, m_{2, \beta}^{(u)}$  имела ложное значение, для этого достаточно потребовать, чтобы выражение

$$\bigwedge_{u, \beta} \left( (\neg m_{0, \beta}^{(u)} \vee \neg m_{1, \beta}^{(u)} \vee \neg m_{2, \beta}^{(u)}) \wedge (m_{0, \beta}^{(u)} \vee m_{1, \beta}^{(u)}) \wedge (m_{0, \beta}^{(u)} \vee m_{2, \beta}^{(u)}) \wedge (m_{1, \beta}^{(u)} \vee m_{2, \beta}^{(u)}) \right) \quad (6)$$

всегда было истинным. Логический аналог формулы (3)

$$\bigvee \left( m_{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k}^{(u)} \wedge m_{\alpha', \beta'_1, \dots, \beta'_k}^{(v)} \wedge \dots \right) \quad (7)$$

будет иметь значение “ложь”, если хотя бы для одного расклада шляп хотя бы один сомножитель  $m_{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k}^{(u)}$  в каждой конъюнкции окажется ложным. Это соответствует отсутствию опровергающих раскладов, т.е. выигрышности стратегии.

Итак, существование стратегии сводится к вопросу, можно ли одновременно задать значения всех переменных таким образом, чтобы утверждение (6) и отрицание утверждения (7) оба оказались истинными. В результате вопрос о поиске стратегии мудрецов сведен к задаче выполнимости булевой формулы (SAT). Именно этим способом

мы нашли все конкретные стратегии, предъявленный в этой статье. В вычислениях для решения задачи выполнимости булевой формулы мы воспользовались SAT-сольвером lingeling, разработанным под руководством A. Biere (Institute for Formal Models and Verification, Austria) (<http://fmv.jku.at/Lingeling/>).

По сравнению с “наивным” перебором этот подход чрезвычайно эффективен. Так, стратегии мудрецов на цикле  $C_n$  задаются матрицами  $3 \times 3$ , как например в формуле (4). Существует  $3^9$  степени таких матриц, поэтому полный перебор для цикла  $C_n$  потребует рассмотрения  $3^{9n}$  вариантов. В случае SAT-подхода, мы имеем  $3^3 = 27$  переменных  $m_{\alpha,\beta}^{(u)}$  для каждой вершины  $u$ , что дает нам формулу с  $3^{3n}$  переменными.

### 3. Теория подсказок.

3.1. *Подсказки.* В этом разделе мы изучим различные “подсказки”, т.е. публичные способы помочь мудрецам. *Подсказка* – это некоторое правило, ограничивающее возможные конфигурации цветов шляп, или меняющее порядок проведения теста, которое сообщается мудрецам перед совещанием. Это значит, что о подсказке в момент совещания будут знать все: и мудрецы, и ведущий.

Рассмотрим следующие виды подсказок.

Обозначение подсказки	Информация, сообщаемая при подсказке
$2A$	Мудрецу $A$ разрешено сделать сразу два предположения о цвете своей шляпы
$A - 1$	Мудрец $A$ получит шляпу лишь одного из двух цветов и эти цвета заранее явно названы
$A = B$	Мудрецы $A$ и $B$ получат шляпы одинакового цвета
$A \neq B$	Мудрецы $A$ и $B$ получат шляпы разных цветов
$A^*$	Мудрец $A$ получит шляпу лишь одного из двух цветов; эти цвета ему сообщат в момент надевания шляпы

Если символ  $i$  обозначает какой-то цвет, то договоримся обозначать подсказку  $A - i$ , сообщающую, что мудрецу  $A$  не дадут шляпу цвета  $i$ , через  $A - \{i\}$ .

По поводу подсказок договоримся, что ведущий всегда играет против мудрецов, если у него есть возможность таким образом выбрать

расклад шляп и дать оговоренную подсказку, чтобы мудрецы проиграли, он непременно так и поступит.

В случае подсказки  $A^*$  мудрецы по результату совещания фиксируют стратегии у всех, кроме  $A$ . Мудрец  $A$  получает в распоряжение три стратегии – по одной для каждого варианта отсутствующего цвета.

**3.2. Примеры конкретных стратегий в игре с подсказками.** Возможность выигрыша мудрецов с подсказкой  $A \neq B$ ,  $A = B$  и  $A = 1$  определяется следующими леммами, в которых мы приводим стратегии мудрецов, найденные с помощью компьютера. Хотя найти их и не так просто, но проверка того, что эти стратегии выигрышные, почти тривиальна, и в ряде случаев удалось найти “логическое истолкование” этих стратегий.

**Лемма 8.** *На графе  $P_n(AB)$  ( $n \geq 2$ ) с подсказкой  $A \neq B$  или  $A = B$  мудрецы выигрывают.*

**Доказательство.** Приведем стратегию мудрецов на графе  $P_n(AB)$  с подсказкой  $A \neq B$ ,  $n \geq 2$ . Пусть мудрецы  $A$  и  $B$  используют стратегию  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = [1 \ 2 \ 0]$ . Нетрудно видеть, что при  $n = 2$  это выигрышная стратегия. При  $n > 2$  пусть каждый из остальных  $n - 2$  мудрецов использует стратегию

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем изображать возможные расклады шляп в виде путей Моцкина. Наличие подсказки  $A \neq B$  означает, что путь Моцкина, начавшийся в точке  $(1, c_1)$ , не может закончиться в точке вида  $(n, c_1 + 3k)$ . Для дальнейших рассуждений потребуется лишь то, что путь не может оканчиваться в точке  $(n, c_1)$ .

Как нетрудно проверить, действуя по стратегии, мудрец  $A$  заведомо угадает цвет своей шляпы, если путь Моцкина начинается с нисходящего звена  $\searrow$ . Аналогично мудрец  $B$  угадает цвет своей шляпы, если путь Моцкина заканчивается восходящим звеном  $\nearrow$ . Что касается остальных мудрецов, их стратегия весьма симметрична и каждый из них угадает, если путь содержит фрагмент вида

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagup & \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagdown & \diagup & \diagdown \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagup & \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array}. \quad (8)$$

Для проверки этого утверждения достаточно перебрать матричные элементы  $\mathbf{S}$ . Ограничимся одним примером: ноль, стоящий в левом

нижнем углу матрицы  $\mathbf{S}$ , означает, что цепочка цветов 2, 0, 0 выигрышная для мудрецов, она соответствует первому фрагменту в списке (8).

Мы утверждаем, что любой путь Моцкина, ведущий из точки  $(1, c_1)$  в точку  $(n, c_n)$ , где  $c_1 \neq c_n$ , либо начинается с нисходящего звена  $\searrow$ , либо заканчивается восходящим звеном  $\nearrow$ , либо имеет фрагмент вида (8). Это очевидно. Действительно, если путь начинается с восходящего фрагмента  $\nearrow$  и не содержит фрагментов вида (8), то все остальные фрагменты пути тоже должны быть восходящими, но тогда и последний фрагмент восходящий, что и требуется. Если же первый фрагмент пути горизонтальный  $\rightarrow$ , то следующие фрагменты пути могут быть либо горизонтальными (но строго горизонтальный путь нам не подходит), либо встретится восходящий фрагмент, и тогда, как мы проверили, все последующие фрагменты тоже восходящие.

Таким образом, в случае подсказки  $A \neq B$  для предъявленной стратегии мудрецов не существует ни одного опровергающего расклада шляп.

В случае подсказки  $A = B$  при  $n = 2$  мудрецы, очевидно, побеждают. При  $n > 2$  обозначим (единственного) соседа мудреца  $B$  через  $D$ . Тогда мудрецы выигрывают, если  $B$  действует по стратегии “Что вижу у  $D$ , то и говорю”, а остальные мудрецы играют на путях  $P(A, D)$  по выигрышной стратегии для подсказки  $A \neq D$ .  $\square$

**Лемма 9.** *На цикле  $C_n$  ( $n \geq 3$ ) с подсказкой  $A - 1$  мудрецы выигрывают.*

**Доказательство.** Пусть дана подсказка  $A - \{2\}$ . Пусть мудрец  $A$  использует стратегию **A**, а все остальные мудрецы используют стратегию **S** из леммы 7. Как показано в лемме 7, все опровергающие цепочки назначают мудрецу  $A$  шляпу цвета 2, что запрещено подсказкой.  $\square$

Граф  $G$  с помеченной вершиной  $A$  будем обозначать  $G^A$ . Назовем *суммой помеченных графов*  $G_1^A$  и  $G_2^B$  граф, являющийся объединением этих графов, в котором вершины  $A$  и  $B$  совмещены. *Суммой* двух графов  $G_1$  и  $G_2$  относительно вершины  $A$  будем называть сумму помеченных графов  $G_1^A + G_2^A$ , будем обозначать ее  $G_1 +_A G_2$ .

Следующая лемма утверждает, что если мудрец  $B$ , находящийся в висячей вершине графа  $G'$ , получил подсказку  $B - 1$ , то с помощью несложного трюка он может “передать” эту подсказку своему единственному соседу — мудрецу  $A$ , т.е. “протолкнуть” подсказку внутрь

графа. Это позволяет построить выигрышную стратегию мудрецов на графе  $G'$  в случае, когда существует выигрышная стратегия на графе  $G = G' \setminus \{B\}$  с подсказкой  $A - 1$ .

**Лемма 10** (О “проталкивании” подсказки). *Пусть  $G$  – граф, на котором мудрецы выигрывают с подсказкой  $A - 1$ . Тогда мудрецы выигрывают на графике  $G' = G +_A P_2(AB)$  с подсказкой  $B - 1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  – стратегия мудрецов на графике  $G$  с подсказкой  $A - \{2\}$ . Зададим стратегию мудрецов  $F$  на графике  $G'$  с подсказкой  $B - \{2\}$ . Пусть мудрец  $B$  следует стратегии  $[0 0 1]$ , мудрецы из  $G \setminus \{A, B\}$  действуют по стратегии  $f$ . Зададим стратегию мудреца  $A$ : для каждой раскладки шляп  $c = (c_B, C_G)$  у соседей мудреца  $A$  (где  $c_B$  – цвет шляпы мудреца  $B$ ,  $C_G$  – список цветов шляп остальных соседей мудреца  $A$  в графике  $G$ ) положим

$$F_A(c_B, C_G) = \begin{cases} 2, & \text{если } c_B = 0, \\ f_A(C_G), & \text{если } c_B = 1. \end{cases}$$

Если  $c_B = 0$ , то при  $c_A = 2$  угадал  $A$ , а при  $c_A \neq 2$  угадал  $B$ . Если же  $c_B = 1$ , то мудрец  $B$  при  $c_A = 2$ . Поэтому если  $A$  видит, что  $c_B = 1$ , то ему необходимо обеспечить выигрыш мудрецов на всех раскладах, где у мудреца  $A$  шляпа не цвета 2. Это достигается игрой  $A$  и остальных мудрецов по стратегии  $f$ .  $\square$

### 3.3. Применение подсказки $A - 1$ к сумме графов.

**Теорема 11.** *Пусть на помеченных графах  $G_0^A$ ,  $G_1^A$  и  $G_2^A$  существуют выигрышные стратегии для игр с подсказкой  $A - 1$ . Тогда на графике  $G = G_0 +_A G_1 +_A G_2 +_A P_2(AB)$  мудрецы выигрывают без подсказок.*

**Доказательство.** Обозначим через  $f_i$  выигрышную стратегию мудрецов на графике  $G_i^A$  с подсказкой  $A - \{i\}$ . Построим выигрышную стратегию для графа  $G$ . Пусть мудрец  $B$  называет цвет шляпы, которую он видит на мудреце  $A$ . Пусть все мудрецы из  $G_i \setminus \{A\}$  действуют по стратегии  $f_i$ . Наконец, пусть мудрец  $A$  действует так: если он видит шляпу цвета  $j$  на мудреце  $B$ , то он игнорирует вершины в подграфах, отличных от  $G_j^A$ , а на этом подграфе действует по стратегии  $f_j$ . Мы получили выигрышную стратегию, поскольку при  $c_A = c_B$  угадает  $B$ , а при  $c_A \neq c_B$  угадает кто-то из мудрецов на подграфе  $G_{c_B}^A$ .  $\square$

Теорема 11 позволяет строить нетривиальные примеры графов, где выигрывают мудрецы.

**Пример.** При всех натуральных  $n, m, k$  ( $n, m, k \geq 3$ ) мудрецы выигрывают на графе  $C_n +_A C_m +_A C_k +_A P_2(AB)$  (см. рис. 6). Это следует из леммы 9 и теоремы 11.

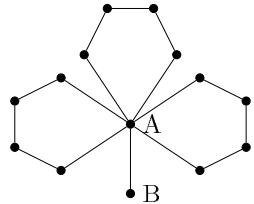


Рис. 6.  $C_5 +_A C_5 +_A C_5 +_A P_2(AB)$ .

Другой пример применения подобной техники приведен в лемме 17.

### 3.4. Теоремы об играх с подсказками.

**Теорема 12.** Для любого графа  $G$  мудрецы проигрывают с подсказкой  $2A$  только в случае, когда  $A$  – изолированная вершина графа  $G$ .

**Доказательство.** Это сразу следует из того, что уже на графе  $P_2(AB)$  мудрецы выигрывают с подсказкой  $2A$  (мудрец  $B$  проверяет гипотезу, что цвета шляп одинаковы, мудрец  $A$  – что цвета шляп различны).  $\square$

Очевидно, подсказка  $A - 1$  не может дать дополнительного преимущества мудрецам, находящимся вне компоненты связности вершины  $A$ .

**Теорема 13.** Пусть  $G$  связный граф,  $A$  – его вершина. Тогда мудрецы проигрывают на графике  $G$  с подсказкой  $A - 1$  тогда и только тогда, когда  $G$  – дерево.

**Доказательство.** Докажем, что если  $G$  – дерево, то мудрецы проигрывают. Допустим, что это не так, и у мудрецов существует выигрышная стратегия в игре на дереве  $G^A$ . Возьмем три копии дерева  $G$ . По теореме 11 у мудрецов существует выигрышная стратегия в игре без подсказок на дереве  $G' = G +_A G +_A G +_A P_2(AB)$ . Но по лемме 2 это невозможно. Противоречие.

Докажем, что если граф  $G$  содержит цикл, то мудрецы выигрывают. В случае, когда вершина  $A$  лежит на цикле, мудрецы могут применить стратегию из леммы 9. Если же вершина  $A$  не лежит на цикле, рассмотрим подграф, состоящий из этого цикла и пути от него до вершины  $A$ . С помощью леммы 10 мудрецы могут “протолкнуть” подсказку из вершины  $A$  до цикла, а на цикле опять выиграть с помощью леммы 9.  $\square$

Интересной особенностью подсказок  $A = B$  и  $A \neq B$  является то, что эти подсказки могут помочь мудрецам, даже если  $A$  и  $B$  находятся в разных компонентах связности!

**Теорема 14.** Для любого графа  $G$  мудрецы выигрывают с подсказкой  $A = B$  только в случае, когда

- 1) вершины  $A$  и  $B$  находятся в одной компоненте связности, либо
- 2) компонента связности вершины  $A$  или компонента связности вершины  $B$  – дерево.

**Доказательство.** 1) Мудрецы, расположенные на пути  $P(AB)$ , могут обеспечить выигрыш с помощью стратегии из леммы 8.

2) Докажем, что если, например, компонента связности вершины  $A$  содержит цикл  $C_n$ , то мудрецы выигрывают. Пусть мудрец  $B$  всегда называет цвет 2, а все мудрецы из компоненты связности вершины  $A$  играют по выигрышной стратегии для подсказки  $A - \{2\}$ , которая существует по теореме 13. Тогда если  $c_B = c_A = 2$ , то угадает  $B$ , а если  $c_B = c_A \neq 2$ , то угадает кто-нибудь из компоненты  $A$ .

Если же обе компоненты связности вершин  $A$  и  $B$  – деревья, то по теореме 3 существуют два цвета  $c_A^1, c_A^2$  и две проигрышные (для игры без подсказок) раскладки шляп в компоненте вершины  $A$ , в которых мудрец  $A$  получает шляпы цвета  $c_A^1, c_A^2$ . Аналогичные цвета  $c_B^1$  и  $c_B^2$  существуют для вершины  $B$ . Так как шляпы бывают лишь трех цветов,  $\{c_A^1, c_A^2\} \cap \{c_B^1, c_B^2\} \neq \emptyset$ . Значит, можно выбрать проигрышные раскладки в компонентах вершин  $A$  и  $B$  так, что мудрецы  $A$  и  $B$  получат шляпы одинакового цвета. В результате никто из мудрецов не угадает.  $\square$

**Теорема 15.** 1) На любом связном графе  $G$  мудрецы выигрывают, если дана подсказка  $A \neq B$ .

2) Пусть мудрецы  $A$  и  $B$  находятся в разных компонентах связности графа  $G$ , причем в этом графе все компоненты связности являются проигрышными графиками для игры без подсказок. Тогда мудрецы выигрывают только в случае, когда обе компоненты связности вершин  $A$  и  $B$  – не деревья.

**Доказательство.** 1) Мудрецы, расположенные на пути  $P(AB)$ , могут обеспечить выигрыш с помощью стратегии из леммы 8.

2) Докажем, что если обе компоненты связности вершин  $A$  и  $B$  содержат циклы, то мудрецы выигрывают. Действительно, в этом случае по теореме 13 в игре на компоненте связности вершины  $A$  с подсказкой  $A - \{2\}$  и в игре на компоненте связности вершины  $B$  с подсказкой  $B - \{2\}$  у мудрецов существуют выигрышные стратегии. Пусть тогда все мудрецы играют по этим стратегиям. В силу подсказки  $A \neq B$  у  $A$  или у  $B$  шляпа действительно окажется не второго цвета, а значит, мудрецы выигрывают.

Теперь пусть одна из компонент связности, например компонента вершины  $A$ , – дерево. Рассмотрим любую проигрышную раскладку шляп для игры без подсказок на компоненте связности вершины  $B$ , пусть вершина  $B$  в ней имеет цвет  $c_B$ . По теореме 3 существуют два цвета, которые могут быть в проигрышной раскладке у мудреца  $A$ , хотя бы один из них не совпадает с  $c_B$ . Возьмем в компоненте связности вершины  $A$  проигрышную раскладку, которая выдает  $A$  этот цвет. Получим проигрышную раскладку на всем графе, которая удовлетворяет условию  $A \neq B$ , а значит, мудрецы проигрывают.  $\square$

Таким образом, теорема 14 дает полный анализ игры в шляпы с подсказкой  $A = B$ . Теорема 15 устанавливает результат для подсказки  $A \neq B$ , но в случае несвязного графа для получения явного описания проигрышных графов требуется знать результат нашей основной теоремы 20 (доказательство которой, разумеется, не использует теорему 15).

**Теорема 16.** *Подсказка  $A^*$  не влияет на исход игры в шляпы.*

**Доказательство.** Допустим, что мудрецы выигрывают с подсказкой  $A^*$ . Зафиксируем для всех мудрецов, кроме  $A$ , стратегии, которые они используют при игре с подсказкой  $A^*$ , и покажем, как можно задать стратегию мудреца  $A$ , чтобы с этим набором стратегий мудрецы выигрывали без подсказки.

Допустим, что при назначении мудрецу  $A$  шляпы цвета  $x$  нашелся расклад шляп на всем графе, в котором мудрец  $A$  получил цвет  $x$ , соседи мудреца  $A$  получили цвета  $u, v, w, \dots$ , остальные мудрецы тоже получили какие-то цвета, и при этом никто из мудрецов (исключая  $A$ ) не угадал. Тогда мы хотим, чтобы этой ситуации мудрец  $A$  угадал свой цвет, т.е. его стратегия должна удовлетворять требованию  $f_A(u, v, w, \dots) = x$ .

Эти требования, полученные для разных раскладов, не противоречат друг другу. Действительно, если бы существовал еще один расклад, где у соседей по-прежнему цвета  $u, v, w, \dots$ , а мудрец  $A$  получил другой цвет  $y$ , то мудрецы не могли бы выиграть с подсказкой  $A^*$ , поскольку, имея эти два расклада, ведущий мог сообщить мудрецу  $A$ , что цвет его шляпы –  $x$  или  $y$ , после чего реализовал бы тот из раскладов, для которого  $A$  не угадывает цвет своей шляпы.  $\square$

**Следствие 16.1.** *Пусть  $AB$  – ребро графа  $G$ , причем  $B$  – висячая вершина. Если мудрецы проигрывают (без подсказок) на графе  $G \setminus \{B\}$ , то они проигрывают и на графике  $G$ .*

**Доказательство.** Пусть мудрецы нашли выигрышную стратегию на графике  $G$ . Пусть стратегия мудреца  $B$  –  $[c_0 \ c_1 \ c_2]$ . Заметим, что  $c_0, c_1, c_2$  – это три различных цвета. Действительно, если среди этих цветов нет, скажем, цвета 2, то рассмотрим только расклады шляп, в которых мудрец  $B$  получает шляпу цвета 2. То, что мудрец  $A$  видит на  $B$  шляпу цвета 2, однозначно задает сужение его стратегии на графике  $G \setminus \{B\}$ . А стратегии остальных мудрецов и так заданы фактически на графике  $G \setminus \{B\}$ . Выбирая опровергающий расклад на графике  $G \setminus \{B\}$  и добавляя к нему шляпу цвета 2 у мудреца  $B$ , получаем опровергающий расклад на  $G$ .

Итак, стратегия  $f_B$  мудреца  $B$  устроена таким образом, что он может назвать каждый из трех цветов. Значит, если ему дали шляпу цвета  $c^*$ , то однозначно определен цвет  $c^{**}$ , такой что  $f_B(c^{**}) = c^*$ . Тогда для раскладов, в которых мудрец  $A$  получает шляпу цвета  $c^{**}$ , (и только для них) мудрец  $B$  угадает. Следовательно, для раскладов, в которых  $A$  получает шляпу не цвета  $c^{**}$ , должен угадать кто-то из мудрецов на графике  $G \setminus \{B\}$ . Но это значит, что мудрецы выигрывают с подсказкой  $A^*$  на графике  $G \setminus \{B\}$  (которая произойдет в тот момент, когда  $A$  увидит, какой именно цвет  $c^*$  выдан мудрецу  $B$ )! Однако это невозможно: раз мудрецы проигрывают на графике  $G \setminus \{B\}$

без подсказок, то по теореме 16 они проиграют и с подсказкой  $A^*$ . Противоречие.  $\square$

**4. Анализ игры на произвольных графах.** Теперь мы рассматриваем только основной вариант игры – без подсказок и на произвольном графе. Сначала разберем несколько частных случаев.

**Лемма 17.** *Пусть  $G$  – связный граф, который содержит два цикла, не имеющих общих вершин. Тогда на графе  $G$  мудрецы побеждают.*

**Доказательство.** Выберем на пути, соединяющем циклы, две соседние вершины  $A$  и  $B$  и выделим два непересекающихся связных подграфа  $G_A$  и  $G_B$  (вершина  $A$  и первый цикл содержится в  $G_A$ , вершина  $B$  и второй цикл содержится в  $G_B$ ). По теореме 13 мудрецы выигрывают на графе  $G_A$  с подсказкой  $A - 1$  и на графе  $G_B$  с подсказкой  $B - 1$ .

Опишем выигрышную стратегию для мудрецов.

Пусть мудрецы из  $G_A \setminus \{A\}$  играют так, как будто дана подсказка  $A - \{2\}$ , а мудрецы из  $G_B \setminus \{B\}$  – как будто дана подсказка  $B - \{2\}$ . Пусть мудрец  $A$  действует по следующей стратегии. Если  $c_B = 2$ , то  $A$  называет цвет, как того требует стратегия на графе  $G_A$  с подсказкой  $A - \{2\}$ . Если же  $c_B \neq 2$ , то  $A$  говорит “2”. Пусть мудрец  $B$  действует по стратегии: если  $c_A = 2$ , то  $B$  говорит “2”, а если  $c_A \neq 2$ , то  $B$  играет на графе  $G_B$  с подсказкой  $B - \{2\}$ .

Для проверки того, что эта стратегия выигрышная, в следующей таблице приведены все возможные расклады шляп для  $A$  и  $B$  и указано, кто угадывает.

$c_A$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$c_B$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Кто угадает	$G_B$	$G_B$	$G_A$	$G_B$	$G_B$	$G_A$	$A$	$A$	$B$

$\square$

**Лемма 18.** *Пусть  $G$  – граф, в котором имеется два цикла, имеющих одну общую вершину. Тогда на графике  $G$  мудрецы побеждают.*

**Доказательство.** Мы располагаем лишь техническим доказательством. Стратегии найдены с помощью компьютера, доказательство их корректности выполнено в системе компьютерной алгебры Maple. Достаточно рассмотреть случай  $G = C_{k+1} +_A C_{m+1}$ . Приведем выигрышную стратегию для мудрецов. Пусть мудрец  $A$  действует по стратегии **A**, двое мудрецов  $B_{k+1}$  и  $D_1$  – по стратегии **T**, а все остальные мудрецы – по стратегии **S** (см. рис 7, возле мудрецов поставлены метки, указывающие тип стратегии).



С помощью рутинной индукции или компьютера получаем, что

$$\mathcal{S}^k \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & k & 1 & k-1 & k-1 & 0 & \frac{k^2-k+2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & k-1 \\ 0 & k & 1 & k & 1 & k-1 & k-1 & \boxed{0} & \frac{k^2-k+2}{2} \\ \mathbf{0} & k & 1 & k & 1 & k-1 & k-1 & 0 & \frac{k^2-k+2}{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathcal{T} \mathcal{S}^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & m-1 & m-1 & m-1 & 0 & 0 & 0 & \frac{m^2-3m+6}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & m-2 \\ 1 & 1 & m-1 & m-1 & m-1 & 0 & 0 & 0 & \frac{m^2-3m+6}{2} \\ 1 & 1 & m & m & m & 0 & 0 & 0 & \frac{m^2-m+2}{2} \\ 1 & 1 & m & m & m & 0 & 0 & 0 & \frac{m^2-m+2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для подсчета числа опровергающих раскладов шляп осталось найти свертку тензора  $\mathcal{A}$ , который в девятивершинной модели соответствует стратегии  $\mathbf{A}$ , с матрицами  $\mathcal{S}^k \mathcal{T}$  и  $\mathcal{T} \mathcal{S}^m$ . Она равна нулю.

Последнее утверждение допускает прямую проверку без компьютера. Для этого заметим, что если на левом цикле  $AD_1D_2 \dots D_m$  мудрец  $D_1$  играет по стратегии  $\mathbf{T}$ , мудрецы  $D_2, \dots, D_m$  – по стратегии  $\mathbf{S}$ , а мудрец  $A$  – по стратегии

$$\mathbf{A}_{(00)(00)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

то на самом деле на этом цикле мудрецы разыгрывают стратегию для подсказки  $A - \{1\}$ , потому что лишь два диагональных элемента произведения матриц  $\mathcal{A}' \mathcal{T} \mathcal{S}^m$  не равны 0 и оба соответствуют цепочкам, назначающим мудрецу  $A$  шляпу цвета 1, где  $\mathcal{A}'$  – это девятивершинная матрица для стратегии  $(\mathbf{A}_{(00)(00)})^t$  (транспонирование требуется для правильного учета повторяющегося индекса). Таким образом, мудрец

$A$  в зависимости от того, что видит у соседей  $B_1$  и  $B_{k+1}$ , либо всегда говорит 1, либо разыгрывает на втором цикле стратегию  $A - \{1\}$ . Остается проверить, что в случае, когда мудрец  $A$  или кто-то на втором цикле не угадывают, обязательно угадает кто-нибудь на первом цикле. Эти случаи перечислены в таблице

$c_A$	0	0	0	2	2	2	1	1	1	1	1	1
$c_{B_1}$	1	2	2	1	2	2	0	1	2	0	0	1
$c_{B_k}$	0	0	1	0	0	1	0	1	2	1	2	2

Количество опровергающих цепочек для пути  $B_1 \dots B_{k+1}$ , соответствующих этим случаям, “закодировано” в матрице  $S^k T$ , см. (9). Для каждого случая в таблице это число цепочек равно нулю. Например, первому столбцу таблицы отвечает нулевой элемент  $(S^k T)_{(01)(00)}$ , см. правило индексации на рис. 5. Для удобства мы выделили полужирным шрифтом нули, соответствующие левой половине таблицы, и обвели в рамочку нули для правой половины таблицы. Таким образом, для рассматриваемых случаев не существует опровергающих цепочек, следовательно, мудрецы выигрывают.  $\square$

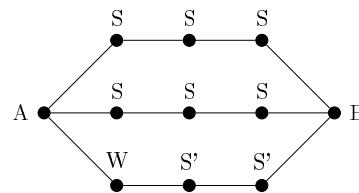
**Лемма 19.** *Пусть  $G$  – связный граф, содержащий вершины  $A$  и  $B$ , между которыми имеется три пути, не имеющих общих вершин, кроме  $A$  и  $B$ . Тогда на графике  $G$  мудрецы побеждают.*

**Доказательство.** Мы располагаем лишь техническим доказательством. Будем различать два случая: когда все пути содержат не менее одной вершины, стратегии для этого случая приведены на рис. 8, и когда один из путей вырождается в ребро  $AB$  – стратегия показана на рис. 9. На этих рисунках слева приведен пример графа, около каждой вершины отмечено обозначение стратегии, которая в ней используется, справа приведены сами стратегии.

На рисунках предполагается, что соседи вершин  $A$  и  $B$  упорядочены сверху вниз. Таким образом, матрица  $\mathbf{A}[0]$  показывает, как играет мудрец  $A$ , если у соседнего мудреца на верхнем пути шляпа цвета 0. Проверка того, что эти стратегии выигрышные, выполняется вычислением в 9-вершинной модели, аналогичном вычислениям из леммы 18.

Замечательным обстоятельством является универсальность этих стратегий: они подходят для путей  $AB$  произвольных длин, с двумя

исключениями. Стратегия, показанная на рис. 9, работает в предположении, что один из путей  $P(AB)$  (можно считать, что это нижний путь) содержит не менее двух вершин. Кроме того, эта стратегия не работает, когда два пути – верхний и средний – содержат ровно по одной вершине. Очевидно, оба случая выигрышные для мудрецов в силу теоремы 4. Эта универсальность объясняется тем, что как и формуле (5), которая появилась в вычислениях леммы 7, у степеней матриц  $S^k$  стабилизируется распределение нулевых и ненулевых элементов. Нарушения возникают лишь при малых  $k$ , когда эта стабилизация еще не произошла.  $\square$

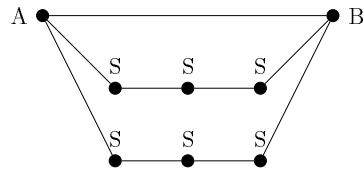


$$\begin{aligned} \mathbf{A}[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}[1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}[2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}[0] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}[1] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}[2] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{S}' &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рис. 8. Верхний и средний пути содержат не менее одной вершины, а нижний – не менее двух. Для верхнего пути  $AB$  стратегия  $S$  задана для вершин, упорядоченных слева направо, а для среднего пути  $AB$  – справа налево.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

**Теорема 20.** *Мудрецы проигрывают на связном графе  $G$  тогда и только тогда, когда граф  $G$  – дерево или когда он содержит единственный цикл  $C_n$ , где  $n$  не делится на 3,  $n \geq 5$ .*



$$\begin{aligned} \mathbf{A}[0] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}[1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}[2] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}[1] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}[2] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рис. 9. Стратегия в случае, когда один из путей – это ребро  $AB$ , а остальные пути произвольны. Для среднего пути  $AB$  стратегия  $S$  задана для вершин, упорядоченных слева направо, а для нижнего пути  $AB$  – справа налево.

**Доказательство.** Если граф  $G$  – дерево, мудрецы проигрывают по теореме 2. Если граф  $G$  – это цикл  $C_n$ , где  $n$  не делится на 3,  $n \geq 5$ , мудрецы проигрывают по теореме 4. Всякий граф, содержащий единственный цикл, может быть получен из этого цикла последовательным применением операции “добавление ребра с висячей вершиной”. По следствию 16.1 применение этой операции к графу, на котором мудрецы проигрывают, дает граф, на котором мудрецы тоже проигрывают. Таким образом, мудрецы проигрывают на всех графах, упомянутых в условии теоремы.

Докажем, что на остальных графах мудрецы выигрывают. На графах, содержащих единственный цикл  $C_n$ , где  $n = 4$  или  $n$  делится на 3, мудрецы выигрывают по теореме 4.

Пусть в графе  $G$  содержится больше одного цикла. Если в нем есть два непересекающихся цикла, мудрецы выигрывают по лемме 17. Если в нем есть два цикла, имеющих одну общую вершину, мудрецы выигрывают по лемме 18. Для всех остальных графов, содержащих как

минимум два цикла, можно указать две вершины  $A$  и  $B$ , соединенные тремя попарно непересекающимися путями (и на таких графах мудрецы выигрывают по лемме 19). Действительно, пусть в графе нашлось два цикла, пересекающиеся как минимум по двум вершинам. Общие вершины разбивают эти циклы на “дуги”. Выберем среди них кратчайшую дугу  $AB$ . Тогда эта дуга  $AB$ , а также два пути из  $A$  в  $B$  вдоль второго цикла – это и есть три непересекающихся пути.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Butler, M. T. Hajiaghayi, R. D. Kleinberg, T. Leighton, *Hat guessing games*. — SIAM review **51** (2009), 399–413.
2. T. Ebert, *Applications of Recursive Operators to Randomness and Complexity*. University of California, Santa Barbara, 1998.
3. M. Gardner, *The Scientific American book of mathematical puzzles & diversions*. Simon and Schuster, 1959.
4. M. Krzywkowski *On the hat problem, its variations, and their applications*. — Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica. **9**, No. 1 (2010), 55–67.
5. W. W. Szczeczla *The three-colour hat guessing game on the cycle graphs*. — Electronic J. of Combinatorics **24**, No. 1 (2017), #P1.37.

Kokhas K., Latyshev A. For which graphs sages can guess a color of at least one hat.

Several sages wearing coloured hats are situated at the vertices of a graph. Each sage tries to guess his own hat colour merely on the basis of observing the hats worn by their neighbours without exchanging the information. Each hat can have one of *three* colours. A predetermined guessing strategy is winning if it guarantees at least one correct individual guess for every assignment of colours. We completely solve the question for which graphs the sages win.

С.-Петербургский  
государственный университет,  
Университетская набережная 7-9,  
199034 Санкт-Петербург, Россия

*E-mail:* kpk@arbitral.ru

Поступило 16 ноября 2017 г.

Факультет информационных технологий  
и программирования Университет ИТМО,  
197101 Санкт-Петербург, Россия

*E-mail:* alex\_700\_95@mail.ru