Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

Д. В. Карпов

РАЗБИЕНИЕ ДВУСВЯЗНОГО ГРАФА НА ТРИ СВЯЗНЫХ ПОДГРАФА

Основные определения

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Множество рёбер графа G будет обозначать через $E(G)$. Для непересекающихся множеств $X, Y \subset V(G)$ через $E_G(X, Y)$ будем обозначать множество рёбер графа G, соединяющих X с Y.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U. Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связен.

Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u. Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

Определение 1. *Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.*

1) *Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.*

2) *Назовем множество R* разделяющим, *если граф $G - R$ несвязен.*

3) *Граф G называется k-*связным, *если $|V(G)| > k$ и G остается связным при удалении любого множества из не более чем $k - 1$ вершины.*

Ключевые слова: двусвязный граф, разбиение, теорема Дьори-Ловаса.

Исследования выполнены при частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-9721.2016.1 и правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

Если $R \not\subset V(G) \cup E(G)$, будем считать, что $G - R = G - R'$, где $R' = R \cap (V(G) \cup E(G))$.

Пусть $x, y \in V(G)$. Тогда $G + xy$ – граф, полученный из G добавлением ребра xy (если $xy \notin E(G)$). При $xy \in E(G)$ граф $G + xy$ совпадает с G.

Для двух графов G и H их *объединение* $G \cup H$ есть граф на множестве вершин $V(G) \cup V(H)$ с множеством рёбер $E(G) \cup E(H)$.

§1. Введение и основные результаты

В 1976 году E. Győri [1], а затем независимо в 1977 году L. Lovász [2] доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G – k-связный граф на n вершинах, $v_1, \ldots, v_k \in V(G)$, а натуральные числа $n_1, \ldots, n_k$ таковы, что $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Тогда множество вершин графа G можно разбить на k таких связных подмножеств $V_1, \ldots, V_k$, что $|V_i| = n_i$ и $v_i \in V_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

Возникает вопрос – а можно ли разбить вершины графа меньшей связности на k связных множеств? Очевидно, не для всех $(k-1)$-связных графов это так. Предположим, что $(k-1)$-связный граф G имеет такое разделяющее множество T, что у графа $G - T$ более k компонент связности – скажем, $W_1, \ldots, W_m$, $m \geqslant k+1$. Лишь $k-1$ из связных множеств $V_1, \ldots, V_k$, на которые нужно разбить вершины графа G, могут содержать вершины множества T, а значит, одно из этих множеств – подмножество какой-то из компонент $W_1, \ldots, W_m$. Для простоты, пусть компоненты имеют одинаковый размер $p \geqslant 2$. Тогда нельзя разбить граф G на k связных множеств, размеры которых более p, но при этом $v(G) = mp + (k-1) > k(p+1)$ можно разбить на k слагаемых, больших чем p.

Этот пример подсказывает нам достаточное условие для того, чтобы вершины данного k-связного графа можно было разделить на $k+1$ связное множество произвольного размера.

Гипотеза. *Пусть $k \geqslant 3$, а G – $(k-1)$-связный граф на n вершинах такой, что каждое его $(k-1)$-вершинное разделяющее множество разбивает G не более чем на k частей, а $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Тогда существует разбиение множества вершин графа G на такие связные подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_k$, что $|V_i| = n_i$ для каждого i.*

Основным результатом работы является доказательство этой гипотезы для двусвязных графов.

Теорема 2. *Пусть G – такой двусвязный граф на n вершинах, что каждое его 2-вершинное разделяющее множество разбивает G не более чем на три части, а $n_1+n_2+n_3=n$. Тогда существует разбиение множества вершин графа G на такие связные подмножества V_1, V_2 и V_3, что $|V_i|=n_i$ для каждого $i\in\{1,2,3\}$.*

Нетрудно понять, что для $k=2$ утверждение гипотезы неверно. В качестве тривиального следствия теоремы Дьори-Ловаса в случае разбиения на два связных множества предложим нужное нам в дальнейшем утверждение. Для формулировки напомним понятия блока и точки сочленения связного графа.

Определение 2. *Вершина $a\in V(G)$* – точка сочленения *связного графа G, если граф $G-a$ несвязен.*

Блок *графа G – это максимальный по включению подграф, не имеющие точек сочленения.*

Внутренность $\mathrm{Int}(B)$ *блока B – это множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения графа G.*

Структура взаимного расположения блоков и точек сочленения описывается с помощью *дерева блоков и точек сочленения* связного графа (см., например, [4]). Напомним, что дерево блоков и точек сочленения графа G – это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1,\dots,a_n$ графа G, а другой – всем его блокам $B_1,\dots,B_m$. Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i\in V(B_j)$.

Несложно доказать, что определенный выше граф – дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам (такие блоки называются *крайними*).

Тривиальным следствием теоремы 1 для двусвязных графов является следующее утверждение. Прямое доказательство этого утверждения также весьма несложно.

Следствие 1. *Пусть G – связный граф на n вершинах, имеющий ровно два крайних блока B_1 и B_2. Пусть $v_1\in\mathrm{Int}(B_1)$, $v_2\in\mathrm{Int}(B_2)$, а натуральные числа n_1 и n_2 таковы, что $n_1+n_2=n$. Тогда множество вершин графа G можно разбить на два таких связных подмножества $V_1\ni v_1$ и $V_2\ni v_2$, что $|V_1|=n_1$ и $|V_2|=n_2$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 1 к двусвязному графу $G + v_1v_2$, вершинам v_1, v_2 и числам n_1, n_2. □

Замечание 1. Частный случай теоремы Дьори-Ловаса для двусвязного графа имеет много простых решений, в отличие от общего случая. В частности, существует полиномиальный алгоритм построения искомого разбиения: нужно действовать способом, описанным в доказательстве леммы 7.

Тем интереснее, что для трёхсвязного графа верно намного более сильное утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 – достаточно сложное и использует структуру разбиения двусвязного графа двухвершинными разделяющими множествами, которую мы определим в следующем разделе. Затем будет доказан ряд утверждений о разбиении связного графа на два связных множества, после чего мы приступим к доказательству теоремы 2.

§2. Вспомогательные инструменты

Нам потребуется структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги Татта [3], а в целом аналогичную структуру – *дерево блоков* из работы [8]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [6].

2.1. Разбиение графа набором разделяющих множеств. Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geqslant 2$, а G – k-связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество, состоящее из всех k-вершинных разделяющих множеств графа G.

Определение 3. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Множество* $A \subset V(G)$ *назовем* частью разбиения *графа* G *набором* $\mathfrak{S}$, *если никакие две вершины из* A *нельзя разделить никаким множеством из* $\mathfrak{S}$, *но любая другая вершина графа* G *отделена от множества* A *хотя бы одним из множеств набора* $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G *набором* $\mathfrak{S}$ *мы будем обозначать через* $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) *Вершины части* $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ *назовем* внутренними, *если они не входят ни в одно из множеств набора* $\mathfrak{S}$. *Множество таких вершин назовем* внутренностью *части* A *и будем обозначать через* $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, *мы будем называть* граничными, *а все их множество* – границей *и обозначать через* $\mathrm{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение – подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Нетрудно доказать (см. например [7]), что для $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вне A. Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Определение 4. *Два множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *называются независимыми, если* S *не разделяет* T *и* T *не разделяет* S. *В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

В работе [5] доказано, что для k-связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

2.2. Дерево блоков двусвязного графа. В этом разделе граф G – двусвязный.

Определение 5. 1) *Множество* $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *называется одиночным, если* S *независимо со всеми остальными множествами из* $\mathfrak{R}_2(G)$. *Обозначим через* $\mathfrak{O}(G)$ *набор из всех одиночных множеств графа* G.

2) *Вместо* $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{O}(G))$ *мы будем писать просто* $\mathrm{Part}(G)$, *а части этого разбиения будем называть* частями *графа* G.

Определение 6. Дерево разбиения *двусвязного графа* G – *это граф* $\mathrm{BT}(G)$, *вершины которого соответствуют одиночным множествам*

и частям графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(G)$ смежны в $\mathrm{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\mathrm{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма – это частный случай теоремы 1 из статьи [8].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ *– это дерево, все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ выполняется $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(S)|$. Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(G; S)$ существует ровно одна такая часть $B \in \mathrm{Part}(G)$, что $B \subset A$ и B смежна с S в* $\mathrm{BT}(G)$.

3) *Множество $S \in \mathfrak{O}(G)$ разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$, если и только если S разделяет B и B' в* $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 7. *Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем крайней, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения* $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G.

2) Внутренности двух различных частей $\mathrm{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 8. 1) *Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.*

2) *Назовём часть A циклом, если граф $G'(A)$ – простой цикл и блоком, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ длиной цикла A.*

Следующая лемма – это лемма 2 из работы [9].

Лемма 2. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(G)$ *– либо цикл, либо блок.*

2) *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл, то все вершины из* $\mathrm{Int}(A)$ *имеют степень 2 в графе G.*

3) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G и других неодиночных разделяющих множеств в графе G нет.*

Лемма 3. *Если часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *– блок и* $w \in \mathrm{Int}(B)$, *то граф* $G - w$ *двусвязен.*

Доказательство. Вершина w не может входить в одиночные разделяющие множества графа G, так как она – внутренняя вершина части из $\mathrm{Part}(G)$. Вершина w не входит в неодиночные раздеяющие множества графа G по пункту 3 леммы 2. Следовательно, w не входит в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$, а значит, граф $G - w$ двусвязен. □

Следующая лемма – это теорема 2 из работы [8].

Лемма 4. *Пусть* G *– двусвязный граф без одиночных множеств. Тогда либо* G *трёхсвязен, либо* G *– это простой цикл.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 3 из [8].

Лемма 5. *Пусть* H *– двусвязный граф,* $S = \{x, x'\} \in \mathfrak{O}(H)$ *– одиночное множество, а* B *– объединение нескольких частей* $\mathrm{Part}(S)$. *Тогда граф* $H(B) + xx'$ *двусвязен.*

Лемма 6. *Пусть* H *– двусвязный граф, а* A *– крайняя часть* $\mathrm{Part}(H)$, *являющаяся циклом. Тогда граф* $H - \mathrm{Int}(A)$ *двусвязен.*

Доказательство. Множество $\mathrm{Bound}(A) = \{x, x'\}$ – одиночное, а значит, не существует множества из $\mathfrak{R}_2(H)$, разделяющего x и x'. По теореме Менгера существует три xx'-пути P_1, P_2 и P_3 без общих внутренних вершин в графе H. Вершины множества $\mathrm{Int}(A)$ образуют простой xx'-путь в графе H, поэтому, не более чем один из путей P_1, P_2 и P_3 пересекает $\mathrm{Int}(A)$. Следовательно, в графе $H - \mathrm{Int}(A)$ существует два непересекающихся xx'-пути, а значит, вершины x и x' невозможно разделить точкой сочленения в $H - \mathrm{Int}(A)$. Отсюда следует двусвязность графа $H - \mathrm{Int}(A)$. □

§3. Разбиение на два связных множества

Начнем с леммы, немного обобщающей двусвязный случай теоремы Дьори-Ловаса.

Лемма 7. *Пусть* G *– двусвязный граф на* n *вершинах, а натуральные числа* n_1 *и* n_2 *таковы, что* $n_1 + n_2 = n$. *Пусть связное множество* $M \subset V(G)$ *таково, что граф* $G - M$ *связен,* $v_2 \in V(G) \setminus M$, *а натуральные числа* n_1 *и* n_2 *таковы, что* $n_1 + n_2 = n$ *и* $|M| \leqslant n_1$. *Тогда множество вершин графа* G *можно разбить на два таких связных подмножества* $V_1 \supset M$ *и* $V_2 \ni v_2$, *что* $|V_1| = n_1$ *и* $|V_2| = n_2$.

Доказательство. Индукция по n_1, база для $n_1 = |M|$ очевидна: нам подойдёт $V_1 = M$ и $V_2 = V \setminus M$.

Предположим, что утверждение доказано для $n_1 = m$. Нам достаточно найти смежную с V_1 вершину $a \in V_2$, отличную от v_2 и не являющуюся точкой сочленения графа $G_2 = G(V_2)$, тогда множества $V_1 \cup \{a\}$ и $V_2 \setminus \{a\}$ нам подойдут. Если граф G_2 не имеет точек сочленения, то нам подойдет любая смежная с V_1 вершина, отличная от v_2, которая, очевидно, существует.

Пусть G_2 имеет точки сочленения. Тогда граф G_2 имеет хотя бы два крайних блока и мы выберем из них такой блок B, что v_2 не является его внутренней вершиной. Пусть B отделен от остальной части графа G_2 точкой сочленения c. Очевидно, множество вершин $U = V(B) \setminus \{c\}$ непусто и не может быть отделено в графе G точкой сочленения c, поэтому, в U есть вершина a, смежная с V_1. Эта вершина нам подходит. □

Далее мы докажем лемму о разбиении на два множества вершин двусвязного графа, имеющих веса, которая нам понадобится для разбиения множества вершин графа на 3 связных множества.

Лемма 8. *Пусть G – двусвязный граф. Каждая вершина x имеет натуральный вес $w(x)$, а натуральные числа n_1 и n_2 таковы, что n_1+n_2 равняется сумме весов всех вершин. Вершина a фиксирована, причём $w(a) \leqslant \max(n_1, n_2)$. Разрешается выбрать вершину x, уменьшить ее вес на целое число k (где $0 \leqslant k < w(x)$) и увеличить вес a на k. Тогда после одной такой операции можно разбить $V(G)$ на два таких связных множества V_1 и V_2, что сумма весов вершин множества V_1 равна n_1, а сумма весов вершин V_2 равна n_2.*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что $w(a) \leqslant n_2$. Для множества вершин $U \subseteq V(G)$ обозначим через $w(U)$ сумму весов его вершин.

Изначально положим $V_1 = \{b\}$, где $b \neq a$ и $V_2 = V(G) \setminus \{b\}$, оба множества связны. Предположим, что $w(b) > n_1$. Тогда уменьшим вес b на $w(b) - n_1$ и увеличим вес a на эту же величину. В этом случае искомые множества построены. Если $w(b) < n_1$, мы продолжим построение.

Будем строить разбиение $V(G)$ на связные множества V_1 и V_2 в несколько шагов, последовательно увеличивая V_1. Мы будем делать это так, чтобы $|V_1| \leqslant n_1$ и $a \in V_2$ после каждого шага алгоритма построения. Начало построения описано выше.

Шаг алгоритма построения.

Пусть у нас есть связные множества V_1 и $V_2 \ni a$ с $w(V_1) \leqslant n_1$. Если $w(V_1) = n_1$, это разбиение нам подходит. Преположим, что $w(V_1) < n_1$. В силу двусвязности графа G, нельзя отделить V_2 от V_1 менее чем двумя вершинами.

Первая цель – найти смежную с V_1 вершину $x \in V_2$, отличную от a и не являющуюся точкой сочленения графа $G_2 = G(V_2)$.
Отметим, что из $w(a) \leqslant n_2$ следует, что $w(V(G-a)) \geqslant n_1$. Поэтому, в нашем случае $v(G_2) \geqslant 2$. Если граф G_2 двусвязен или $v(G_2) = 2$, то по доказанному выше имеет вершину $x \neq a$, смежную с V_1. Если граф G_2 недвусвязен и $v(G_2) \geqslant 3$, то граф G_2 имеет точки сочленения. Тогда рассмотрим его крайний блок D, отделяемый от остальной части графа точкой сочленения d и такой, что $a \notin \mathrm{Int}(D)$. Вершина d не может отделить $\mathrm{Int}(D)$ от V_1, а значит, существует вершина $x \in \mathrm{Int}(D)$, смежная с V_1. Из сказанного выше ясно, что $x \neq a$.

Далее мы увеличим V_1 и уменьшим V_2.

Добавим x к V_1, оба множества $V_1 \cup \{x\}$ и $V_2 \setminus \{x\}$ связны. Если $w(V_1) + w(x) \leqslant n_1$, вернемся к началу следующего шага алгоритма. Если же $w(V_1) + w(x) > n_1$, то уменьшим вес x до $n_1 - w(V_1) > 0$, соответственно увеличив вес вершины $a \in V_2$. В результате получим разбиение $V(G)$ на связные множества V_1 и V_2 нужного нам веса, в этом случае алгоритм заканчивает работу.

Так как множество V_1 может увеличиваться лишь конечное число раз, алгоритм обязательно закончит работу. □

§4. Разбиение на три связных множества

Лемма 9. *Пусть G – двусвязный граф на n вершинах, а $n_1+n_2+n_3=n$. Предположим, что $T \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(T)$ таковы, что*

$$n_1 \leqslant |\mathrm{Int}(A)| \leqslant \min(n_1 + n_2, n_1 + n_3) - 1.$$

Тогда можно разбить вершины графа G на три связных множества V_1, V_2, V_3 размеров n_1, n_2, n_3, соответственно.

Доказательство. Пусть $T = \{x, y\}$. Граф $G' = G(A) + xy$ по лемме 5 двусвязен, а граф $G' - T = G(\mathrm{Int}(A))$ – связен. Значит, по лемме 7 мы можем разбить граф G' на два связных множества V_1 и $U \supset T$ так, что $|V_1| = n_1$.

Рассмотрим граф $G(U)$. Если этот граф несвязен, то

$$G(U) = G'(U) - xy,$$

а следовательно, в нем две компоненты связности $W_x \ni x$ и $W_y \ni y$. Если граф $G(U)$ связен, его можно разбить на два связных множества $W_x \ni x$ и $W_y \ni y$. Отметим, что из условия следует, что $|W_x| \leqslant n_2$ и $|W_y| \leqslant n_3$. Таким образом,

$$k_2 = n_2 + 1 - |W_x| \geqslant 1 \quad \text{и} \quad k_3 = n_3 + 1 - |W_y| \geqslant 1.$$

Граф $G^* = G - \mathrm{Int}(A) + xy$ по лемме 5 двусвязен. По теореме 1, мы можем разбить вершины графа G^* на два связных множества $V_2' \ni x$ и $V_3' \ni y$ размеров $|V_2'| = k_2$ и $|V_3'| = k_3$. Множества $V_2 = W_x \cup V_2'$ и $V_3 = W_y \cup V_3'$ связны и имеют нужные размеры. □

Доказательство теоремы 2. Если граф G не имеет одиночных множеств, то это трёхсвязный граф или цикл. Для цикла утверждение теоремы очевидно, а для трёхсвязного графа является частным случаем теоремы 1.

Замечание 3. В случае, когда граф G трёхсвязен, можно и не пользоваться теоремой Дьори-Ловаса. Достаточно удалить из графа минимальное по включению множество рёбер E так, чтобы граф $G - E$ не был трёхсвязен. Тогда любое 2-вершинное разделяющее множество будет разбивать $G - E$ на две компоненты связности (причем так, что концы каждого ребра из E принадлежат разным компонентам). Таким образом, полученный в результате граф удовлетворяет условию теоремы 2.

Далее мы считаем, что граф G имеет одиночные множества. Не умаляя общности, предположим, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$. Начнем с выбора "правильно расположенного" одиночного множества или части, что будет сделано с помощью дерева $\mathrm{BT}(G)$.

Выбор множества или части.

Подвесим $\mathrm{BT}(G)$ за крайнюю часть A_0 (получим ориентированное дерево с корнем в A_0, ориентировав рёбра в направлении от корня). Множество ориентированных таким образом рёбер дерева $\mathrm{BT}(G)$ обозначим через $A(\mathrm{BT}(G))$. Если $XY \in A(\mathrm{BT}(G))$, то назовём X *предком* Y, а Y – *потомком* X.

Если $Y \in V(\mathrm{BT}(G))$, $Y \neq A_0$, то предок Y существует и единственен. Обозначим его через $P[Y]$.

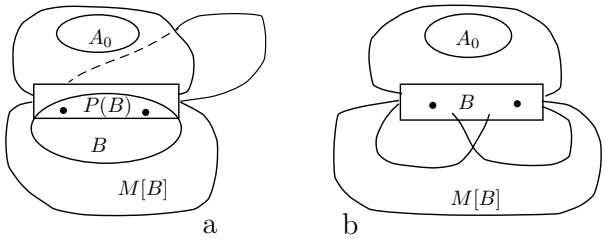

Рис. 1. $M[B]$.

Положим $M[A_0] = V(G)$. Для части $B \in \mathrm{Part}(G)$, отличной от A_0, мы имеем $P[B] \in \mathfrak{O}(G)$. Тогда пусть $M[B] \in \mathrm{Part}(P[B])$ – часть, содержащая B (см. рисунок 1a). Для одиночного множества $B \in \mathfrak{O}(G)$ пусть $M[B]$ – объединение всех частей $\mathrm{Part}(B)$, кроме той, что содержит A_0 (см. рисунок 1b). Во всех случаях положим $m[B] = |M[B]|$.

Очевидно, $m[A_0] = n \geqslant n_2 + 2$. Начиная с $A = A_0$, произведем следующий алгоритм. Пусть $A \in V(\mathrm{BT}(G))$, $m[A] \geqslant n_2 + 2$. Предположим, что существует такой потомок B множества A, что $m[B] \geqslant n_2 + 2$ (если таких несколько, выберем любого из них). Тогда положим $A = B$ и продолжим алгоритм с новым множеством.

Понятно, что в результате мы найдем такое множество A, что $m[A] \geqslant n_2 + 2$, а для каждого из потомков B множества A будет выполнено $m[B] \leqslant n_2 + 1$ (возможно, потомков нет). Алгоритм выбора на этом закончится.

Разбиение графа на три связных множества.
Итак, мы выбрали A – часть графа или одиночное множество. Рассмотрим два случая.

1. A — *одиночное множество.*
Пусть $A = T = \{x, y\}$, а $B \in \mathrm{Part}(T)$ – часть, содержащая A_0. Рассмотрим часть $B' \in \mathrm{Part}(T)$, отличную от B. По лемме 1 существует такая часть $B^* \in \mathrm{Part}(G)$, что B^* смежна с T в $\mathrm{BT}(G)$ и $B^* \subset B'$. Тогда B^* – потомок T, а значит, $M[B^*] = B'$ и по выбору T мы имеем $|\mathrm{Int}(B')| + 2 = m[B^*] \leqslant n_2 + 1$. Следовательно, $|\mathrm{Int}(B')| \leqslant n_2 - 1$.

Докажем, что $|\mathrm{Int}(B')| \leqslant n_3 - 1$. Предположим противное, тогда

$$n_3 \leqslant |\mathrm{Int}(B')| \leqslant n_2 - 1 < n_3 + n_2 - 1 \leqslant n_3 + n_1 - 1$$

и по лемме 9 искомое разбиение $V(G)$ на три связных множества существует.

Теперь рассмотрим часть B и предположим, что $|\mathrm{Int}(B)| \geqslant n_1$. Так как

$$|\mathrm{Int}(B)| + m[T] = n = n_1 + n_2 + n_3 \quad \text{и} \quad m[T] \geqslant n_2 + 2,$$

мы получаем $|\mathrm{Int}(B)| \leqslant n_1 + n_3 - 2 \leqslant n_1 + n_2 - 1$. Тогда искомое разбиение $V(G)$ на три связных множества существует по лемме 9.

Остается случай, когда $|\mathrm{Int}(B)| \leqslant n_1 - 1$. Из условия следует, что $|\mathrm{Part}(T)| \leqslant 3$, а значит, в $\mathrm{Part}(T)$ существует не более чем две отличные от B части и по доказанному выше внутренность каждой их них содержит не более чем $n_3 - 1$ вершин. Таким образом,

$$n - 2 = |V(G) \setminus T| \leqslant n_1 - 1 + 2(n_3 - 1) \leqslant n - 3,$$

противоречие.

2. $A \in \mathrm{Part}(G)$.
Пусть A смежна в дереве $\mathrm{BT}(G)$ с одиночными множествами $T_i = \{y_i, z_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, причем $T_1 = P[A]$. Пусть A_i – объединение всех частей $\mathrm{Part}(T_i)$ кроме части, содержащей A. Мы будем использовать обозначения $\mathrm{Int}(A_i) = A_i \setminus T_i$ и $m_i = |\mathrm{Int}(A_i)|$.

В силу выбора части A

$$m_i = m[T_i] - 2 \leqslant n_2 - 1 \quad \text{при} \quad i \in \{2, \ldots, k\}. \tag{1}$$

Так как $T_1 = P[A]$, мы имеем $\mathrm{Int}(A_1) \cup M[A] = V(G)$. Следовательно, $|\mathrm{Int}(A_1)| + m[A] = n = n_1 + n_2 + n_3$. Так как $m[A] \geqslant n_2 + 2$,

$$m_1 \leqslant n_1 + n_3 - 2. \tag{2}$$

Мы будем неоднократно использовать то, что граф $G(A_j) + y_j z_j$ двусвязен для всех $j \in \{1, \ldots, k\}$ (это верно по лемме 5).

Теперь переобозначим номера так, чтобы m_1 было наибольшим из всех. Понятно, что неравенства (1) и (2) будут выполнены и после переобозначения.

Пусть $F = G(A) + y_1 z_1 + \cdots + y_k z_k$. Назовем ребра $y_i z_i \in E(F)$ (где $i \in \{1, \ldots, k\}$) *особыми*. Будем считать, что каждому особому ребру $y_i z_i$ *соответствуют* вершины множества $\mathrm{Int}(A_i)$ и придадим ему вес

$$w(y_i z_i) = m_i = |\mathrm{Int}(A_i)|.$$

Веса неособых рёбер будут равны 0. Тогда m_1 – максимальный из весов.

Рассмотрим два случая.

2.1. *Часть A – цикл.*
Тогда граф F – цикл. Пусть в циклическом порядке F вершины

$$y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_k, z_k$$

следуют именно так. (Возможно, $y_{i+1} = z_i$ для некоторых i, нумерацию считаем циклической по модулю k.)

Пусть $F = a_0 a_1 \ldots a_\ell$, где $a_0 = y_1$ и $a_1 = z_1$. Построим новый цикл C, поставив на каждом ребре $a_i a_{i+1}$ ровно $w(a_i a_{i+1})$ *новых* вершин степени 2. Больше всего новых вершин (а именно, $w(a_0 a_1) \leqslant n_1 + n_3 - 2$) – на ребре $a_0 a_1$, на каждом из остальных рёбер не более $n_2 - 1$ новой вершины.

Мы хотим разрезать цикл C на три пути из n_1, n_2 и n_3 вершин, соответственно, так, чтобы никакие два разреза не попали на одну дугу $a_i a_{i+1}$. Разберём два случая.

a. $w(a_0 a_1) + 1 \geqslant n_1$.
Первый разрез проведем между a_0 и предыдущей вершиной c (соседом a_0, лежащем на дуге $a_\ell a_0$). Отсчитаем от a_0 ровно n_1 вершин (включая a_0) и проведем второй разрез. В нашем случае этот разрез попадет на дугу $a_0 a_1$. Мы хотим сделать третий разрез так, чтобы между вторым и третьим разрезом было ровно n_3 вершин. Из неравенства (2) следует, что на дуге $a_0 a_1$ осталось не более $n_3 - 1$ вершины, поэтому, третий разрез попадет не на дугу $a_0 a_1$ (см. рисунок 2a). С другой стороны, на дуге $a_\ell a_0$ осталось $w(a_\ell a_0) \leqslant n_2 - 1$ вершин, а между третьим и первым разрезом должно быть ровно n_2 вершин. Поэтому, третий разрез не попадет на дугу $a_\ell a_0$.

b. $w(a_0 a_1) + 1 < n_1$.
Проведем первый разрез между a_0 и следующей вершиной b (соседом a_0, лежащем на дуге $a_0 a_1$). Отсчитаем от b ровно n_1 вершин (включая b) и проведем второй разрез. В нашем случае этот разрез не попадет на дугу $a_0 a_1$. Пусть он попал на дугу $a_i a_{i+1}$ (см. рисунок 2b). Отсчитаем от второго разреза ровно n_2 вершин и проведем третий разрез. Так как на дуге $a_i a_{i+1}$ ровно $w(a_i a_{i+1}) \leqslant n_2 - 1$ вершин, третий разрез не попадет на дугу $a_i a_{i+1}$. На дугу $a_0 a_1$ он не может попасть по очевидным причинам.

Итак, нам остается объяснить, как мы проводим разрез на дуге $a_j a_{j+1}$ (где $0 \leqslant j \leqslant \ell$). Если $w(a_j a_{j+1}) = 0$, то мы просто должны отправить a_j в одно множество, а a_{j+1} – в другое, что сделать можно.

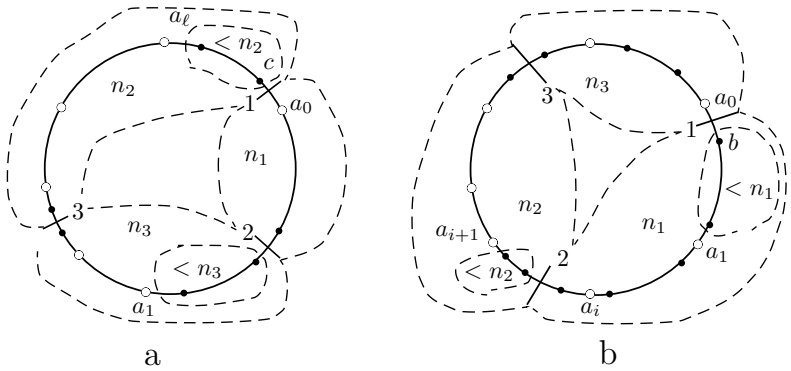

Рис. 2. Разрез цикла на три части.

Пусть $w(a_j a_{j+1}) \neq 0$, тогда существует такое α, что $a_j a_{j+1} = y_\alpha z_\alpha$, а ребру $a_j a_{j+1}$ соответствуют вершины из $\mathrm{Int}(A_\alpha)$. Нам нужно разделить вершины двусвязного графа $G(A_\alpha) + a_j a_{j+1}$ на два связных множества заданных размеров $W_1 \ni a_j$ и $W_2 \ni a_{j+1}$, что можно сделать по теореме 1.

2.2. *Часть A – блок.*
Так как часть A – блок, граф F трёхсвязен. Мы будем строить множество $U \subset V(G)$, удовлетворяющее некоторым условиям. Положим $U' = U \cap V(F)$.

Назовём особое ребро $y_j z_j$ *опасным*, если ровно один из его концов лежит в U'.

Определим веса вершин графа F. Пусть ребро $y_j z_j$ – опасное, $y_j \in U$. Тогда вершине y_j придадим вес $w(y_j) = 1 + |\mathrm{Int}(A_j) \cap U|$, а вершине z_j – вес $w(z_j) = 1 + m_j - |\mathrm{Int}(A_j) \cap U|$. Остальным вершинам дадим веса 1.

Определим $w(U')$ как сумму весов вершин из U' плюс сумму весов особых рёбер, оба конца которых лежат в U'.

Мы будем строить множество U так, чтобы выполнялись следующие условия:

1° $|U| \leqslant n_1$;

2° $y_1 \in U$, $z_1 \notin U$;

3° $w(y_1) \geqslant w(x)$ для любой вершины $x \in A \setminus \{z_1\}$;

4° графы $G(U)$, $F(U')$ и $G-U$ связны, а граф $F-U'$ связен и не имеет точек сочленения.

Замечание 4. 1) Если $y_i, z_i \in U$ для некоторого i, то $\mathrm{Int}(A_i) \subset U$. Действительно, если $y_i, z_i \in U$, но $\mathrm{Int}(A_i) \not\subset U$, то граф $G-U$ несвязен, что противоречит условию 4°.

2) В силу условия 2° ребро y_1z_1 на всех этапах построения множества U будет опасным.

3) Несложно понять, что $w(U') = |U|$.

Предположим, что множество U удовлетворяет условиям $1^\circ - 4^\circ$. Обозначим через G' граф, полученный из $G-U$ удалением вершин всех множеств $\mathrm{Int}(A_j)$, для которых ровно одна из вершин y_j и z_j лежит в U'.

Лемма 10. *Если граф $F-U'$ двусвязен, то и граф G' двусвязен.*

Доказательство. Пусть

$$J = \{j \in [1..k] \,:\, y_j, z_j \notin U'\}, \quad Y = \{y_jz_j\}_{j\in J}.$$

Нетрудно понять, что

$$G' = F - U' - Y \cup \Big(\bigcup_{j\in J} G(A_j)\Big)$$

(для каждого $j \in J$ мы должны "вернуть" в граф вершины из $G(A_j)$ и убрать особое ребро y_jz_j, если его нет в графе G). Так как граф $F-U'$, а также все графы $G(A_j) + y_jz_j$ двусвязны, полученный в результате объединения граф также двусвязен. □

Перейдем непосредственно к алгоритму разбиения $V(G)$ на три связных множества размеров n_1, n_2 и n_3.

Начало построения.
Если $m_1 \leqslant n_1 - 1$, изначально положим $U = \{y_1\} \cup \mathrm{Int}(A_1)$. Если $m_1 > n_1 - 1$, разделим двусвязный граф $G(A_1) + y_1z_1$ на связные множества $W_1 \ni y_1$ и $W_2 \ni z_1$ так, что $|W_1| = n_1$ (это можно сделать по теореме 1) и положим $U = W_1$.

Очевидно, условия 1° и 2° выполнены. В силу трёхсвязности графа F, граф $F - U' = F - y_1$ двусвязен, то есть, выполнено условие 4°.

Проверим условие 3°. Если ребро y_iz_i – опасное и $i \geqslant 2$, то

$$w(y_i), w(z_i) \leqslant m_i + 1 \leqslant n_2.$$

По построению, либо $w(y_1) = n_1 \geqslant n_2$, либо $w(y_1) = m_1 + 1 \geqslant m_i + 1$. Таким образом, $w(y_1)$ не меньше весов остальных вершин множества $A \setminus \{z_1\}$.

Замечание 5. 1) Отметим, что ввиду (2) мы имеем

$$w(z_1) \leqslant \max(0, m_1 - n_1 + 1) \leqslant n_3. \tag{3}$$

Вес $w(z_1)$ не будет увеличиваться до окончания построения.

2) Граф $F - U'$ должен быть двусвязным или полным графом из двух вершин. В силу неравенства (3) случай, когда $F - U'$ состоит из единственной вершины z_1, невозможен.

Шаг построения.

Итак, пусть мы имеем множество U, удовлетворяющее условиям $1^\circ - 4^\circ$. Если $|U| = n_1$, мы перейдем к *окончанию построения.* Если же $|U| < n_1$, мы выполним шаг и увеличим U, после чего перейдем к *следующему шагу построения.*

Итак, далее $|U| < n_1$.

Предположим, что существует такое опасное ребро y_jz_j, что $\mathrm{Int}(A_j) \not\subset U$.

Можно считать, что $y_j \in U$, $z_j \notin U$. Вершины двусвязного графа $G(A_j) + y_jz_j$ разделены на связные множества $U_j \ni y_j$ и $W_j \ni z_j$, причем $U_j \subset U$, $W_j \cap U = \varnothing$ и $W_j \neq \{z_j\}$. Тогда по теореме 1 можно разбить двусвязный граф $G(A_j) + y_jz_j$ на связные множества $U'_j \ni y_j$ и $W'_j \ni z_j$, где $|U'_j| = |U_j| + 1$ и поместить в U множество U'_j вместо U_j, увеличив $|U|$ на 1. Очевидно, условия $1^\circ - 4^\circ$ по-прежнему выполнены. Далее мы будем считать, что

$$\text{для любого опасного ребра } y_jz_j \text{ выполнено } \mathrm{Int}(A_j) \subset U. \tag{4}$$

Лемма 11. *Если множество U удовлетворяет условию* (4)*, то графы $F - U'$ и $G - U$ двусвязны.*

Доказательство. Если граф $F - U'$ недвусвязен, то по замечанию 5 и условию мы имеем $v(F - U') = 2$. Если единственное ребро графа $F - U'$ – неособое, то $G - U = F - U'$, а значит, $v(G - U) = 2 \leqslant n_2 + n_3$. Если единственное ребро графа $F - U'$ – особое, то пусть это ребро y_jz_j. Понятно, что $j \neq 1$, а значит, $m_j = |\mathrm{Int}(A_j)| \leqslant n_2 - 1$ ввиду (1). В этом случае $V(G - U) = V(A_j)$, а значит, $v(G - U) \leqslant n_2 + 1 \leqslant n_2 + n_3$. В обоих случаях получаем $|U| \geqslant n_1$, что в рассматриваемом случае не так.

Итак, граф $F - U'$ двусвязен. Ввиду условия (4) граф $G - U$ совпадает с графом G'. Значит, граф $G - U$ двусвязен по лемме 10. $\square$

Рассмотрим граф $H = F - U'$. Так как граф F трёхсвязен, а $U' \neq \varnothing$, никакое множество $M \subset V(H)$ нельзя отделить отделить от U' в графе F менее чем тремя вершинами. Следовательно,

$$\text{множество } M \subset V(H) \text{ нельзя отделить от } U \text{ в графе } G \text{ менее чем тремя вершинами.} \quad (5)$$

По лемме 11 граф H двусвязен. Если граф H не трёхсвязен и не является циклом, то H имеет хотя бы две крайние части, внутренности которых не пересекаются. Тогда пусть $B \in \mathrm{Part}(H)$ – такая крайняя часть, что $\mathrm{Int}(B) \not\ni z_1$. Рассмотрим два случая.

a. *Граф H трёхсвязен или часть B — блок.*
Если H трёхсвязен, то в силу (5) существует отличная от z_1 вершина $w \in V(H)$, смежная с U. Если H нетрёхсвязен и часть B – блок, то в силу (5) существует смежная с U вершина $w \in \mathrm{Int}(B)$, тогда $w \neq z_1$. В обоих случаях граф $H - w = F - (U' \cup \{w\})$ двусвязен (в первом случае это очевидно, во втором – следует из леммы 3). Графы $F(U' \cup \{w\})$ и $G(U \cup \{w\})$, очевидно, связны. Граф $G - U - w$ связен, так как граф $G - U$ двусвязен по лемме 11. Таким образом, условие 4° для множества $U \cup \{w\}$ выполнено. В силу выбора вершины w, множество $U \cup \{w\}$ удовлетворяет условиям $1^\circ - 3^\circ$. Перейдем к *следующему шагу алгоритма* с новым множеством $U := U \cup \{w\}$.

b. *Граф H – простой цикл или часть B – цикл.*
Если часть B – цикл, пусть это цикл $C = a_0 a_1 \dots a_\ell a_{\ell+1}$, причем $\mathrm{Bound}(B) = \{a_0, a_{\ell+1}\}$. Если $z_1 \in \mathrm{Bound}(B)$, то пусть $z_1 = a_0$. Если граф H – цикл, пусть это цикл $C = a_0 a_1 \dots a_\ell$, причем $a_0 = z_1$.

Из трёхсвязности графа F следует, что все вершины $a_1, \dots, a_\ell$ смежны с U' в графе F (эти вершины имеют степень 2 в графе $H = F - U'$).

Для $i, j \in \{0, \dots, \ell + 1\}$ (где $i < j$) пусть $S_{i,j}$ – это объединение $a_{i+1}, \dots, a_{j-1}$ и всех вершин, соответствующих рёбрам $a_i a_{i+1}, \dots, a_{j-1} a_j$ (при $j = i + 1$ множество $S_{i,j}$ содержит только вершины, соответствующие дуге $a_{i,i+1}$). Положим $s_{i,j} = |S_{i,j}|$.

Пусть $s_{0,\ell} \leqslant n_1 - |U|$. Тогда рассмотрим множество $U^* = U \cup S_{0,\ell}$. В нашем случае $|U^*| \leqslant n_1$, условия $1^\circ - 4^\circ$ для множества U^*, очевидно, выполнены. Перейдем к *следующему шагу алгоритма* с $U := U^*$.

Остается случай, когда $s_{0,\ell} > n_1 - |U|$. В этом случае мы закончим доказательство теоремы. Построим новый цикл C', поставив на каждом ребре $a_j a_{j+1}$ ненулевого веса ровно $w(a_j a_{j+1})$ *новых* вершин степени 2. Пусть b – следующая после a_0 вершина цикла C' (на дуге $a_0 a_1$), а путь P получен из цикла C' разрезом ребра $a_0 b$. Разберем два подслучая.

b1. $s_{0,1} < n_1 - |U|$.
Отрежем от пути P, начиная с b, ровно $n_1 - |U|$ вершин. Пусть разрез пришелся на дугу $a_i a_{i+1}$ пути P. В рассматриваемом случае $i \geqslant 1$. Отправим все вершины из $U \cup S_{0,i}$ (это множество связно, так как a_1 смежно с U) в V_1, нам нужно добавить туда

$$t = n_1 - |U| - s_{0,i} \geqslant 0$$

вершин, соответствующих отрезанным вершинам с дуги $a_i a_{i+1}$.

Если $a_i a_{i+1}$ – неособое ребро, то $t = 0$ и V_1 построено. Пусть $a_i a_{i+1} = y_j z_j$ – особое ребро. Очевидно, $j \geqslant 2$. Нам нужно разбить двусвязный граф $G(A_j) + a_i a_{i+1}$ на два связных множества $W \ni a_i$ и $W' \ni a_{i+1}$ так, что $|W| = t + 1$. Это можно сделать по теореме 1. Положим $V_1 = U \cup S_{0,i} \cup W$, тогда $|V_1| = n_1$, это множество построено. Пусть $q = |W'|$, тогда $q \leqslant m_j + 1 \leqslant n_2$, поместим множество W' в V_2.

Нам нужно разбить граф $G^* = G - U - S_{0,i+1}$ на два связных множества $Z \ni a_{i+1}$ и V_3, где $|V_3| = n_3$ и $|Z| = n_2 - q + 1$ (см. рисунок 3а). Несложно понять, что a_{i+1} – внутренняя вершина крайнего блока графа G^*, так как этот граф получен из двусвязного графа $G - U$ разрезом по разделяющему множеству $\{a_0, a_{i+1}\}$. Поэтому, нужное нам разбиение существует ввиду следствия 1.

b2. $s_{0,1} \geqslant n_1 - |U|$.
Тогда $s_{0,1} > 0$, а значит, ребро $a_0 a_1$ – особое. Пусть $a_0 a_1 = y_\alpha z_\alpha$. Понятно, что $\alpha \geqslant 2$. Отметим, что $s_{0,1} = m_\alpha$, а множество вершин, соответствующих дуге $a_0 a_1$ – это $\mathrm{Int}(A_\alpha)$. Если ребро $a_1 a_2$ – особое, то пусть $a_1 a_2 = y_\beta z_\beta$, тогда множество вершин, соответствующих дуге $a_1 a_2$ – это $\mathrm{Int}(A_\beta)$.

Пусть $t = n_1 - |U|$. Отметим, что $V(G-U)$ точно содержит вершины a_0, a_1, a_2, а также все вершины, соответствующие дугам $a_0 a_1$ и $a_1 a_2$. С другой стороны, $v(G) = n_1 + n_2 + n_3$, а $|U| = n_1 - t$. Следовательно,

$$3 + s_{0,1} + s_{1,2} \leqslant v(G - U) = n_2 + n_3 + t. \tag{6}$$

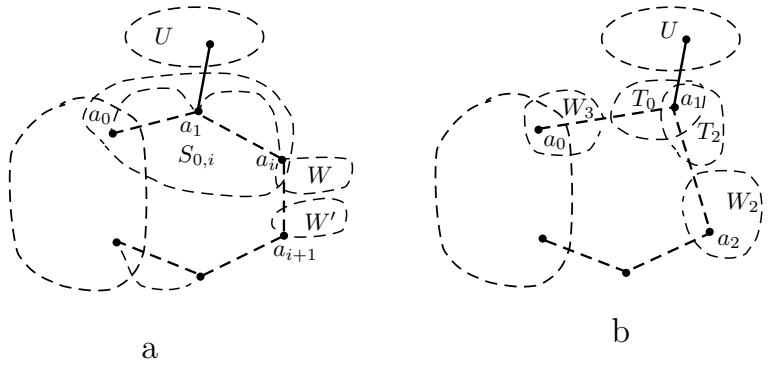

Рис. 3. Дополнение множества U до V_1.

Мы выберем связное множество $T \ni a_1$ из вершин множества $S_{0,2}$ так, чтобы $S_{0,2} \setminus T$ было объединением непересекающихся связных множеств $W_2 \ni a_2$ и $W_3 \ni a_0$ размеров $|W_2| \leqslant n_2$ и $|W_3| \leqslant n_3$. После чего положим $V_1 = U \cup T$ (это множество, очевидно, содержит n_1 вершин и будет связным, так как вершина $a_1 \in T$ смежна с U). Вершины из W_2 будут помещены в V_2, а вершины из W_3 – в V_3. Для этого мы подберем такие целые неотрицательные числа t_0 и t_2, что

$$t_0 + t_2 + 1 = t, \quad t_0 \leqslant s_{0,1}, \quad q_3 = s_{0,1} - t_0 + 1 \leqslant n_3,$$
$$t_2 \leqslant s_{1,2}, \quad q_2 = s_{1,2} - t_2 + 1 \leqslant n_2.$$

Это несложно сделать ввиду (1) и (6). Затем мы по теореме 1 разделим двусвязный граф $G(A_\alpha)+a_0a_1$ на два таких связных множества $T_0 \ni a_1$ и $W_3 \ni a_0$, что $|T_0| = t_0 + 1$ (см. рисунок 3b). Тогда $|W_3| = q_3 \leqslant n_3$, поместим эти вершины в V_3. Если a_1a_2 – неособое ребро, то $t_2 = 0$ и $q_2 = 1$. В этом случае $T_2 = \{a_1\}$, $W_2 = \{a_2\}$. Если a_1a_2 – особое ребро, то по теореме 1 разделим двусвязный граф $G(A_\beta)+a_1a_2$ на два таких связных множества $T_2 \ni a_1$ и $W_2 \ni a_2$, что $|T_2| = t_2 + 1$. Тогда $|W_2| = q_2 \leqslant n_2$, поместим эти вершины в V_2. Положим $T = T_0 \cup T_2$. Тогда $|T| = t$ и $V_1 = U \cup T$ нам подходит.

Пусть $G^* = G - U - S_{0,2}$. Очевидно, $G^* + a_0a_2$ – двусвязный граф, содержащий $n_2 + n_3 + 2 - q_2 - q_3$ вершин. По теореме 1, разделим этот граф на два таких связных множества $W_2' \ni a_2$ и $W_3' \ni a_0$, что

$|W_2| = n_2 + 1 - q_2$ и $|W_3| = n_3 + 1 - q_3$. Для завершения доказательства теоремы в этом случае нужно положить $V_2 = W_2 \cup W_2'$ и $V_3 = W_3 \cup W_3'$.

Окончание построения.
Итак, пусть построено такое множество U, что $w(U') = |U| = n_1$. Мы разобьем $V(G)$ на три связных множества размеров n_1, n_2 и n_3 и закончим доказательство. Начнем с доказательства вспомогательного утверждения.

Лемма 12. *Сумма весов всех вершин графа G' равна $n_2 + n_3$.*

Доказательство. Граф G' отличается от $G - U$ тем, что в нем удалены входящие в $G - U$ вершины множеств $\mathrm{Int}(A_j)$, где $y_j z_j$ – опасное ребро. Пусть, скажем, $z_j \in V(G')$. Тогда $z_j \notin U$ и вес $w(z_j)$ равен увеличенному на 1 количеству вершин в $\mathrm{Int}(A_j) \setminus U$. Следовательно, сумма весов всех вершин графа G' равна $|V(G) \setminus U|$, то есть, $n_2 + n_3$. $\square$

Итак, у нас есть двусвязный граф G', сумма весов вершин которого равна $n_2 + n_3$. Мы хотим разделить его вершины на связные множества V_2' и V_3' с суммой весов n_2 и n_3 с помощью леммы 8. В качестве вершины a, на которую мы можем перекидывать "лишний" вес, возьмем вершину z_1. Отметим, что ввиду (3) мы имеем $w(z_1) \leqslant n_3 \leqslant n_2$, что достаточно для применения леммы 8.

Что же означает перекидывание веса с вершины $x \in A \setminus U'$ на z_1 в исходном графе? Во-первых, должно быть $w(x) > 1$, а значит, x – конец опасного ребра $y_i z_i$, где $i \geqslant 2$. Пусть $x = z_i$, тогда $y_i \in U'$ и $w(z_i) = 1 + q_i$. Двусвязный граф $G(A_i) + y_i z_i$ разделен на два связных множества $W_i \ni z_i$ и $U_i \ni y_i$, причем $W_i \subset V(G) \setminus U$, $|W_i| = q_i + 1$ и $U_i \subset U$. Уменьшить вес вершины z_i на $p \leqslant q_i$ означает разбить $G(A_i) + y_i z_i$ на два связных множества $W_i' \ni z_i$ и $U_i' \ni y_i$, где $|W_i'| = 1 + q_i - p$, после чего поместить U_i' вместо U_i в U и W_i' вместо W_i в $V(G) \setminus U$. Это можно сделать по теореме 1.

Что означает увеличить вес вершины z_1 на p? Двусвязный граф $G(A_1) + y_1 z_1$ разделен на два связных множества $W_1 \ni z_1$ и $U_1 \ni y_1$, причем $W_1 \subset V(G) \setminus U$, $U_1 \subset U$ и $|U_1| = w(y_1) \geqslant w(z_i) \geqslant p + 1$ по условию 3°. Увеличить вес вершины z_1 на p означает разбить $G(A_1) + y_1 z_1$ на два связных множества $W_1' \ni z_1$ и $U_1' \ni y_1$, где $|U_1'| = |U_1| - p$, после чего поместить U_1' вместо U_1 в U и W_1' вместо W_1 в $V(G) \setminus U$. Это можно сделать по теореме 1.

После этих преобразований множество U осталось связным и не изменило размер: $|U| = n_1$. Положим $V_1 = U$.

Пусть вес $w(X)$ множества вершин $X \subset V(G')$ есть сумма весов всех входящих в X вершин. Множество вершин графа G' по лемме 8 можно разбить на два связных множества V_2' и V_3' весов $w(V_2') = n_2$ и $w(V_3') = n_3$. Поместим в V_2 все вершины множества V_2', после чего рассмотрим по очереди все вершины $x \in V_2'$ веса более 1. В таком случае можно счититать, что $x = z_j$, где $y_j z_j$ — опасное ребро. Тогда множество $W_j = A_j \setminus U$ связное в графе G, $W_j \ni z_j$ и $|W_j| = w(z_j)$. Поместим все вершины из W_j в V_2, в результате одна вершина z_j веса $w(z_j)$ заменится на $w(z_j)$ вершин (в их числе есть вершина z_j), связность множества сохранится. После всех таких операций мы получим связное множество вершин V_2 в графе G, причем $|V_2| = w(V_2') = n_2$. Множество V_3 строится аналогично.

Множества построены, теорема доказана. □

Замечание 6. Известные доказательства теоремы Дьори-Ловаса не предлагают полиномиального алгоритма построения разбиения, даже для случая трёхсвязного графа. Алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 2 достаточно сложен, но нетрудно понять, что он полиномиален по количеству вершин. Действительно, наше доказательство требует построения дерева разбиения двусвязного графа одиночными 2-вершинными разделяющими множествами – хорошо известно, что этот алгоритм полиномиален. В замечаниях 1 и 3 сказано, как обойтись в доказательстве без применения теоремы Дьори-Ловаса. Описанные в доказательстве теоремы 2 действия, как несложно понять, являются полиномиальным алгоритмом построения искомого разбиения.

Литература

1. E. Györi, *On division of graphs to connected subgraphs.* — Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 18. Combinatorics, Keszthely (Hungary) (1976), 485–494.
2. L. Lovász, *A homology theory for spanning trees of a graph.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **30** (1977), 241–251.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М., 1973. (Перевод с английского. F. Harary, Graph theory, 1969.)
5. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ , **266** (2000), 76–106.
6. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
7. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.

8. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
9. Д. В. Карпов, *Минимальные двусвязные графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.

Karpov D. V. Decomposition of a 2-connected graph into three connected subgraphs.

Let G be a 2-connected graph on n vertices such that any its 2-vertex cutset splits G into at most three parts and $n_1 + n_2 + n_3 = n$. We prove that there exists a decomposition of the vertex set of G into three disjoint subsets V_1, V_2, V_3, such that $|V_i| = n_i$ and the induced subgraph $G(V_i)$ is connected for each i.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 22 ноября 2017 г.