Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 464, 2017 г.

В. А. Буслов

О СВЯЗИ КРАТНОСТЕЙ СПЕКТРА СО ЗНАКАМИ СЛАГАЕМЫХ В КОМПОНЕНТАХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ В ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЕ

Введение

Миноры и коэффициенты характеристического многочлена произвольной квадратной $N \times N$ комплексной матрицы $\mathbf{G}$ представляются в виде знакопеременных сумм произведений матричных элементов g_{ij}, взятых по некоторым ориентированным графам с дугами (i, j). В частности, в стандартной записи определителя член, представляющий произведение диагональных элементов $\prod\limits_{i=1}^{N} g_{ii}$, соответствует графу, состоящему из одних петель: $(1,1)$, $(2,2)$, $\ldots (N,N)$. Простая перезапись [1] обычных формул для миноров в виде произведений по соответствующим графам приводит к формулам, удобным для исследования цикловидной структуры графа. В качестве матрицы, отвечающей исследуемому графу, выступает матрица смежности.

Для лапласовских матриц (сумма элементов каждой строки равна нулю) информация, содержащаяся во всех элементах матрицы, избыточна – часть элементов можно удалить из рассмотрения. "Лишними" объявляются диагональные элементы. В формулы для миноров вместо диагональных элементов g_{ii} подставляются их выражения $(-\sum\limits_{j\neq i} g_{ij})$. Представление, возникающее при раскрытии скобок и проведении возникающих сокращений, удобно для исследования древовидной структуры [3, 11] графа.

Аналогичные преобразования можно совершить и для матриц, не являющихся лапласовскими. Именно, вводятся [6] величины

$$g_{i0} = -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}.$$

Ключевые слова: взвешенный орграф, матричный спектр, собственное подпространство.

Затем, в формулы для миноров вместо диагональных элементов g_{ii} подставляются выражения $(-\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} g_{ij})$. Тем самым, формулы древовидного представления, классически относящиеся лишь к лапласовским матрицам, распространяются на произвольные квадратные.

Более того, древовидное (лесное [11]) представление, в некотором смысле, более общее, чем цикловидное, поскольку далеко не все миноры в стандартной (цикловидной) форме записи формируются из слагаемых, представляющих произведение матричных элементов, взятых по графам, состоящим из циклов (точнее, контуров) и даже могут вовсе их не содержать. Фактически только главные миноры представляются в виде сумм произведений, взятых по графам, состоящим их контуров. При записи же в древовидной форме любые миноры формируются из слагаемых, являющихся произведением матричных элементов, взятых по некоторым лесам.

Существенной особенностью записи характеристического многочлена в древовидной форме является знако-постоянство слагаемых, составляющих коэффициенты при спектральном параметре. Это особенно важно в анализе диффузии в сильных полях сноса, или, что то же самое, при малой диффузии [8,9], в динамических системах при малых случайных возбуждениях и, связанных с ними, цепях Маркова [7]. Знако-постоянство распространяется и на формулы для алгебраических дополнений элементов матрицы.[1] Используя это обстоятельство в [6] выведены формулы для компонент собственных векторов при единичной геометрической[2] кратности соответствующего собственного значения.

В настоящей работе получено параметрическое представление в древовидной форме (Теорема 1) для левых и правых собственных подпространств комплексной матрицы $\mathbf{G}$ при произвольной геометрической [3] кратности k корня λ, если существует главный (диагональный)

[1]Самый известный частный случай – знаменитая матричная теорема Кирхгофа [2] о числе остовных деревьев неориентированного графа без петель.

[2]В формулировках теорем 3,4 в [6] требование единичной алгебраической кратности излишне (достаточно геометрической). Единичная алгебраическая кратность лишь гарантирует, что существует главный базисный минор.

[3]Под алгебраической кратностью собственного значения λ понимается кратность корня характеристического многочлена $\det(\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E})$, а под геометрической – размерность пространства решений однородной системы $(\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E})\vec{v}=0$.

базисный минор порядка k у матрицы $\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$. В частности, при равенстве геометрической и алгебраической кратностей λ такой минор всегда есть. Коэффициенты при степенях спектрального параметра в компонентах собственных векторов, представляют собой знакопостоянные суммы произведений матричных элементов. Возможность такой записи обусловлена знако-постоянством слагаемых в формулах древовидной структуры для миноров матрицы, когда вычеркиваемые строки и столбцы совпадают, кроме, может быть, одного столбца и строки, номера которых различны. На этом исчерпываются варианты фиксированности знака слагаемых как в формулах для миноров, так и в формулах для компонент собственных векторов при записи их в древовидной форме.

О структуре работы. В 1-ом параграфе приводятся необходимые определения и обозначения. Во 2-ом параграфе вводится конус [10, 11] со специальными весами [6], позволяющий древовидную форму записи миноров [3–5], справедливую для лапласовских матриц, распространить на произвольные [6]. 3-й параграф посвящен разбору всех случаев, когда в древовидном представлении миноров все слагаемые входят с одним знаком (Лемма 1). В 4-ом параграфе доказывается основное утверждение статьи (Теорема 1), о том, когда параметрическое представление в древовидной форме собственных подпространств (точнее компонент собственных векторов) все слагаемые входят с одним знаком. Эта теорема является обобщением основного результата [6]. В 5-ом параграфе результаты переформулированы (лемма 2, теорема 2) для лапласовских матриц. В последнем параграфе рассмотрен частный случай (предложение 1), когда только один собственный вектор в древовидном представлении имеет компоненты, состоящие из слагаемых, взятых с одним знаком. Также разобран пример, демонстрирующий возможные варианты.

§1. Используемые обозначения и определения

Пусть $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G, g)$ – взвешенный орграф: $\mathcal{V}G = \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots N\}$ – множество вершин, множество дуг $\mathcal{A}G \subseteq \mathcal{V}G \times \mathcal{V}G$ – некоторое подмножество множества упорядоченных пар вершин, $g : \mathcal{A}G \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ – весовая комплексная или вещественная функция, заданная на дугах

орграфа. Взвешенную матрицу смежности

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{cases} g((i,j)), & \text{если } (i,j) \in \mathcal{A}G; \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin \mathcal{A}G; \end{cases}$$

будем обозначать той же буквой, что и сам орграф G. Допускаются и дуги нулевого веса. При этом, разным графам (имеющим нулевые дуги и без них) могут соответствовать одинаковые взвешенные матрицы смежности. В нашем случае это обстоятельство не приводит к недоразумениям, поскольку дуги нулевого веса на дают вклада в используемые формулы.

Матрица Лапласа $\mathbf{L}$ взвешенного орграфа G без петель определяется как матрица с элементами: $l_{ij} = -g_{ij}, i \neq j$; $l_{ii} = \sum\limits_{j \neq i} g_{ij}$.

Маршрут длины k в орграфе – чередующаяся последовательность вершин v_i и дуг $a_i = (v_{i-1}, v_i)$: $v_0, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k$. *Контур* – маршрут, где $v_0 = v_k$, а остальные вершины различны и отличны от v_0.

Продуктивностью орграфа назовём величину, равную произведению весов всех его дуг:

$$\pi_G = \prod_{(i,j) \in \mathcal{A}G} g_{ij} \ .$$

Для пустого графа (графа без дуг) продуктивность полагается равной единице, как произведение с нулевым количеством сомножителей. Через $\sigma(\mathcal{B})$ обозначим суммарную продуктивность[4] некоторого множества $\mathcal{B}$ подграфов огргафа G:

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \pi_B.$$

В качестве подграфов в дальнейшем выступают только остовные (содержащие все вершины исходного орграфа) заходящие леса. Заходящий лес – орграф без контуров, в котором из каждой вершины исходит не более одной дуги. *Корни* деревьев леса (связных компонент) – вершины, из которых дуги не исходят.

Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ и $0 \leqslant k \leqslant N - |\mathcal{I}|$. Через $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{k}$ обозначаем множество остовных заходящих лесов орграфа G, состоящих из $(k+|\mathcal{I}|)$ деревьев,

[4]Эту сумму также называют весом множества подграфов [11].

причём все вершины множества $\mathcal{I}$ являются корнями. Остальные k корней – произвольные вершины из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{I}$. Также $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \equiv \mathcal{F}^0_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{F}^k \equiv \mathcal{F}^k_{\varnothing}$. Через $\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}}(j \to i)$ обозначаем подмножество множества лесов $\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}}$, в которых вершина i достижима из j;

Далее в качестве множества вершин графа используются два множества – множество $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ и множество $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$ с дополнительной вершиной 0. Условимся подмножество множества вершин снабжать индексом 0, если оно содержит эту вершину: $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cup \{0\}$.

$\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}})$ – матрица, получаемая из $\mathbf{G}$ вычёркиванием строк с номерами из $\mathcal{I}$ и столбцов с номерами из $\mathcal{J}$, $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}) = \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{I}})$.

Миноры $\det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})$ называются главными. Максимальные по порядку отличные от нуля миноры – базисные.

§2. Построение конуса со специальными весами захода в новую вершину

Если $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G, g)$ – взвешенный орграф без петель, то его конусом принято [10], [11] считать орграф, получающийся добавлением к исходному орграфу новой вершины и добавлением дуг, заходящих в неё, с весами равными 1. Расширим это понятие безотносительно наличия у исходного графа петель – все они удаляются. Информацию же о весах удаляемых петель требуется сохранить. Эти веса можно учесть в весах добавляемых дуг.

Пусть $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G, g)$ – взвешенный орграф. Орграф

$$G_0 = (\mathcal{V}G_0, \mathcal{A}G_0, g_0)$$

назовём *взвешенным конусом* G, если $\mathcal{V}G_0 = \mathcal{V}G \cup \{0\}$, множество дуг $\mathcal{A}G_0 = \{(i, 0) : i \in \mathcal{V}G\} \cup \mathcal{A}G \setminus \{(i, i) : i \in \mathcal{V}G\}$, веса полагаются равными следующим величинам: $g_0(a) = g(a)$ при $a \in \mathcal{A}G_0 \cap \mathcal{A}G$, $g_0((i, 0)) = -\sum\limits_{j \in \mathcal{V}G} g((i, j))$. Далее обозначаем $g_{i0} = g_0((i, 0))$.

Заметим, что вершина 0 в любом остовном заходящем лесе графа G_0 является корнем. Условимся, если в формуле фигурирует вершина 0, то речь идёт об орграфе G_0 и его подграфах и ссылку на сам граф G_0 будем опускать.

Возможна ситуация, когда в матрице $\mathbf{G}$ сумма элементов каждой строки равна нулю, то есть $\mathbf{G}$ является лапласовской. Для соответствующего орграфа G в таком случае построение взвешенного конуса,

с указанными выше весами, становится излишним – дополнительная вершина 0 оказывается вершиной, в которую заходят лишь дуги с нулевыми весами. Тем самым, любой подграф F графа G_0, в котором вершина 0 не является изолированным корнем, имеет продуктивность π_F равную нулю. Однако при этом $\mathbf{G} = -\mathbf{L}$, где $\mathbf{L}$ – матрица Лапласа орграфа G, рассматриваемого без петель. Это обстоятельство позволяет сразу использовать известные формулы для лапласовских матриц. Формулы же, выводимые ниже, дают тот же результат. Только фактически в этом случае в них вместо взвешенного конуса G_0 используется сам орграф G без своих петель.

§3. Случаи фиксированного знака слагаемых в древовидной структуре представления миноров

Пусть $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ – k-элементные подмножества множества вершин $\mathcal{N}$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$ множество остовных заходящих лесов орграфа G_0, состоящих из ровно $k+1$ дерева, корнями которых являются вершины множества $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cup \{0\}$, причем каждое дерево содержит ровно одну вершину из множества $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{0\}$. Будем считать, что индексы упорядочены: $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Всякий лес $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$ порождает перестановку p_F индексов $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ по правилу $p_F(m) = l$, если в лесе F вершина j_m принадлежит дереву с корнем в вершине i_l. Пусть $\varepsilon(p_F)$ – сигнатура этой перестановки. Тогда, так называемая формула всех миноров [3–5], справедливая для лапласовских матриц, для произвольных матриц принимает вид [6]

$$\begin{gathered}\det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}})) = (-1)^{N-|\mathcal{I}|}\varepsilon(\mathcal{I},\mathcal{J}) \sum_{F\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}} \varepsilon(p_F)\pi_F, \\ \varepsilon(\mathcal{I},\mathcal{J}) = (-1)^{\sum\limits_{m=1}^{|\mathcal{I}|}(i_m+j_m)}.\end{gathered} \tag{1}$$

Знаки, с которыми входят продуктивности π_F в (1) определяются сигнатурами перестановок $\varepsilon(p_F)$, порождаемых лесами F. Заметим, что сигнатуры перестановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k \\ 0 & m_1 & m_2 & \ldots & m_k \end{pmatrix}$$

одинаковые. Тем самым, наличие добавленной вершины никак не сказывается на сигнатуре, хотя сами леса (с вершиной 0 и без неё), отвечающие этим перестановкам (из каждой вершины j_α достижим соответствующий корень i_{m_α}), отличаются. Отметим также, что общий знак перед суммой в (1) тоже не связан с новой вершиной 0, и величина $\varepsilon(\mathcal{I},\mathcal{J})$ может быть заменена на $\varepsilon(\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0)$.

Если множества $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ совпадают, то все слагаемые входят с одним знаком. В частности, для главных миноров

$$\det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}) = (-1)^{N-|\mathcal{I}|}\sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0}), \tag{2}$$

где $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0}$ – множество $|\mathcal{I}_0|$-компонентных остовных заходящих лесов орграфа G_0, корнями которых являются вершины из $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cup\{0\}$.

Поскольку коэффициенты при степенях спектрального параметра в характеристическом многочлене составлены из главных миноров (2), то он может быть записан в виде [6]:

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{G}) = \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\sigma\Big(\mathcal{F}^k_{\{0\}}\Big). \tag{3}$$

Здесь, $\mathcal{F}^k_{\{0\}}$ – множество всех остовных заходящих лесов орграфа G_0, состоящих из $k+1$ дерева, корнем одного из которых является вершина 0.

Характеристический многочлен главной подматрицы $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})$ также имеет беззнаковую форму [6]:

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})) = \sum_{k=0}^{N-|\mathcal{I}|}\lambda^k\sigma(\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}_0}), \tag{4}$$

где $\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}_0}$ – множество $(|\mathcal{I}_0|+k)$-компонентных остовных заходящих лесов орграфа G_0, в которых все вершины множества $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cup\{0\}$ являются корнями; оставшиеся k корней – произвольные, не совпадающие с ними.

Если $\mathcal{I}=\{i\}$, $\mathcal{J}=\{j\}$, то перестановка, порождаемая любым лесом из $\mathcal{F}_{\{0,i\},\{0,j\}}$, всегда четная. Тем самым, выражение (1) для миноров $M_{ij} = \det\mathbf{G}(\overline{\{i\}}|\overline{\{j\}})$ максимального порядка состоит из слагаемых, взятых с одним знаком:

$$M_{ij} = (-1)^{N-1+i+j}\sigma(\mathcal{F}_{\{0,i\}}(j\to i)). \tag{5}$$

Здесь учтено, что в используемых обозначениях множество остовных двухкомпонентных лесов $\mathcal{F}_{\{0,i\}}(j \to i)$ с корнями в вершинах $0, i$, в которых вершина i достижима из j, совпадает с множеством $\mathcal{F}_{\{0,i\},\{0,j\}}$.

При несовпадении номеров вычеркиваемых строк и столбцов на единицу ($|\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}| = |\mathcal{J} \setminus \mathcal{I}| = 1$), слагаемые также входят с одним знаком. Определим его.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{G}$ *–* $N \times N$ *матрица,* $\mathcal{R}$ *– подмножество множества индексов* $\mathcal{N}$, $\{i, j\} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{R}$. *Пусть для определённости* $j < i$, *а* z *– число индексов множества* $\mathcal{R}$, *между числами* j *и* i. *Тогда*

$$\det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'}) = (-1)^{N-|\mathcal{X}|+i+j+z}\sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{X}_0}(j \to i)) \ , \tag{6}$$

где $\mathcal{X} = \mathcal{R} \cup \{i\}$, $\mathcal{X}' = \mathcal{R} \cup \{j\}$, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \cup \{0\}$.

Доказательство. Определим знаки сомножителей в обобщённой формуле всех миноров (1). Имеем, $\varepsilon(\mathcal{X}, \mathcal{X}') = (-)1^{i+j}$. Четность перестановки $\varepsilon(p_F)$, порождаемой лесом F, одна и та же для всех $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_0'}$. Действительно, во всяком лесе из указанного множества каждая вершина из $\mathcal{X}_0' = \mathcal{R}_0 \cup \{j\}$ должна оказаться ровно в одном дереве, корнями которого являются вершины множества $\mathcal{X}_0 = \mathcal{R}_0 \cup \{i\}$. Пусть индексы $\{r_1, r_2, \ldots, r_{|\mathcal{R}|}\}$ множества $\mathcal{R}$ упорядочены по возрастанию. Пусть r_s – минимальный индекс, который больше j, а r_t – максимальный индекс, который меньше i. Выпишем таблицу, в первой строке которой перечислены по возрастанию элементы множества $\mathcal{J}_0$, а под ними указаны корни деревьев (элементы множества $\mathcal{I}_0$), которым эти вершины принадлежат в лесе F. Если $s \leqslant t$, таблица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} O & r_1 & \ldots & r_{s-1} & j & r_s & \ldots & r_t & \ldots & r_{|\mathcal{R}|} \\ O & r_1 & \ldots & r_{s-1} & i & r_s & \ldots & r_t & \ldots & r_{|\mathcal{R}|} \end{bmatrix}.$$

Чётность перестановки p_F определяется числом инверсий элементов второй строки. В нижней строке индекс i больше последующих номеров $r_s, \ldots, r_t$. Тем самым, перестановка содержит $t - s + 1$ инверсий. Это число равно числу z индексов множества $\mathcal{R}$, расположенных между j и i. Если $s > t$, то между индексами i и j нет номеров из $\mathcal{R}$, то есть $z = 0$, а сама перестановка чётная. Аналогично при $j > i$. При равенстве $i = j$ перестановка тождественная. Таким образом, $\varepsilon(p_F) = (-1)^z$. Поскольку в рассматриваемых лесах вершины множества $\mathcal{R}_0 \cup \{i\}$ – корни, а корень i достижим из j, то множества $\mathcal{F}_{\mathcal{X}_0,\mathcal{X}_0'}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{X}_0}(j \to i)$ совпадают. $\square$

Когда множества вычеркиваемых индексов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ отличаются больше, чем на один элемент ($|\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}| = |\mathcal{J}\setminus\mathcal{I}| > 1$), сигнатуры $\varepsilon(p_F)$ перестановок, порождаемых лесами из $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$, уже заведомо не являются фиксированными и суммы в (1) становятся знакопеременными.

§4. Компоненты собственных векторов

Доказанная лемма позволяет получить беззнаковую форму для компонент собственных векторов, отвечающих собственному значению с произвольной геометрической кратностью в случае, если существует главный базисный минор.

Теорема 1. *Пусть λ – собственное число $N\times N$ матрицы $\mathbf{G}$ геометрической кратности k, и главный минор матрицы $\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E}$, соответствующий вычеркиванию индексов из множества $\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| = k$, является базисным. Тогда вектора $\vec{v}^{(i)}$, $i\in\mathcal{I}$, с компонентами*

$$\begin{aligned} &v_i^{(i)} = 1; \quad v_j^{(i)} = 0, \quad j\in\mathcal{I}\setminus\{i\};\\ &v_j^{(i)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N-k-1}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j\to i))}{\sum\limits_{l=0}^{N-k}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0})}, \quad j\notin\mathcal{I}, \end{aligned} \tag{7}$$

образуют базис в правом собственном подпространстве, отвечающем λ. Здесь $\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}$ – множество $(l+|\mathcal{I}_0|)$-компонентных остовных лесов орграфа G_0, в которых все вершины множества $\mathcal{I}_0$ являются корнями. $\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j\to i)$ – его подмножество, в лесах которого i достижима из j.

В левом собственном подпространстве базис образуют вектора $\vec{u}^{(i)}$ с компонентами

$$\begin{aligned} &u_i^{(i)} = 1; \quad u_j^{(i)} = 0, \quad j\in\mathcal{I}\setminus\{i\};\\ &u_j^{(i)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N-k-1}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}'_0}(i\to j))}{\sum\limits_{l=0}^{N-k}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0})}, \quad j\notin\mathcal{I}, \quad \mathcal{I}'_0 = \{j\}\cup\mathcal{I}_0\setminus\{i\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Для характеристической матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$, ноль является корнем той же алгебраической и геометрической кратности, что и собственное число λ для исходной. Фундаментальная система решений однородной задачи

$$\mathbf{B}\vec{v} = \vec{0}\,, \tag{9}$$

образует k-мерное подпространство. Найдём k векторов, линейной оболочкой которых оно является.

Пусть $\mathcal{N}$ – множество индексов исходной матрицы, $\mathcal{J} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{I}$, $\mathcal{P} = \mathcal{I} \setminus \{i\}$ при $i \in \mathcal{I}$. Матрица $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$ вырождена, имеет порядок $N - k + 1$ и максимально возможный при этом ранг $m = N - k$. Для удобства в самой матрице $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$ строки и столбцы будем нумеровать элементами множества $\mathcal{N} \setminus \mathcal{P}$. Для этой матрицы все решения задачи

$$\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})\vec{y} = \vec{0}_{N-k+1} \tag{10}$$

пропорциональны вектору с компонентами, равными алгебраическим дополнениям любой строки матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$, в которой есть ненулевой минор порядка $N - k$. Действительно, вектор алгебраических дополнений $\vec{y}$ такой строки не нулевой. Умножая его скалярно на эту же строку, получаем $\det \mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}}) = 0$. Скалярное произведение этого вектора с любой другой строкой равно нулю в силу свойства алгебраических дополнений. В качестве такой выделенной строки выбираем i-ую строку.

Выражение для алгебраического дополнения диагонального элемента матрицы системы (10) следует из (4):

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}) - \lambda\mathbf{E})(-1)^{N-k} \det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})\right) \\ &\qquad = (-1)^{N-k} \sum_{l=0}^{N-k} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}). \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что это алгебраическое дополнение отлично он нуля, поскольку отвечает главному минору, который по условию теоремы является басисным.

Будем считать, что элементы множества $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, упорядочены по возрастанию. Пусть $j_{\beta-1} < i < j_\beta$. Алгебраическое дополнение элемента матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$, стоящего на пересечении произвольного столбца $j = j_\alpha$ (пусть для определённости $j < i$) и строки с

номером i, равно

$$(-1)^{\alpha+\beta}\begin{vmatrix} b_{j_1 j_1} & \dots & b_{j_1 j_{\alpha-1}} & b_{j_1 j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_1 j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_\alpha j_1} & \dots & b_{j_\alpha j_{\alpha-1}} & b_{j_\alpha j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_\alpha j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_{\beta-1} j_1} & \dots & b_{j_{\beta-1} j_{\alpha-1}} & b_{j_{\beta-1} j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_{\beta-1} j_m} \\ b_{j_\beta j_1} & \dots & b_{j_\beta j_{\alpha-1}} & b_{j_\beta j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_\beta j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_m j_1} & \dots & b_{j_m j_{\alpha-1}} & b_{j_m j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_m j_m} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Непосредственное представление (12) в виде многочлена по степеням λ вызывает затруднения, поскольку при подстановке $b_{nl} = g_{nl} - \lambda\delta_{nl}$ спектральный параметр в матрице соответствующего определителя оказывается не только на главной диагонали, но и вне её. Чтобы обойти эту сложность, поступим аналогично [6]. Представим (12) в виде крамеровского определителя Δ'_j, равного определителю матрицы, получающейся из матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{I}})$ заменой столбца с индексом $j = j_\alpha$ на i-ый столбец с изменением знака:

$$\Delta'_j =$$

$$\begin{vmatrix} b_{j_1 j_1} & \dots & b_{j_1 j_{\alpha-1}} & -b_{j_1 i} & b_{j_1 j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_1 j_{\beta-1}} & b_{j_1 j_\beta} & \dots & b_{j_1 j_m} \\ b_{j_2 j_1} & \dots & b_{j_2 j_{\alpha-1}} & -b_{j_2 i} & b_{j_2 j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_2 j_{\beta-1}} & b_{j_2 j_\beta} & \dots & b_{j_2 j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_\alpha j_1} & \dots & b_{j_\alpha j_{\alpha-1}} & -b_{j_\alpha i} & b_{j_\alpha j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_\alpha j_{\beta-1}} & b_{j_\alpha j_\beta} & \dots & b_{j_\alpha j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_{\beta-1} j_1} & \dots & b_{j_{\beta-1} j_{\alpha-1}} & -b_{j_{\beta-1} i} & b_{j_{\beta-1} j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_{\beta-1} j_{\beta-1}} & b_{j_{\beta-1} j_\beta} & \dots & b_{j_{\beta-1} j_m} \\ b_{j_\beta j_1} & \dots & b_{j_\beta j_{\alpha-1}} & -b_{j_\beta i} & b_{j_\beta j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_\beta j_{\beta-1}} & b_{j_\beta j_\beta} & \dots & b_{j_\beta j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j_m j_1} & \dots & b_{j_m j_{\alpha-1}} & -b_{j_m i} & b_{j_m j_{\alpha+1}} & \dots & b_{j_m j_{\beta-1}} & b_{j_m j_\beta} & \dots & b_{j_m j_m} \end{vmatrix}.$$

Действительно, чтобы все индексы стояли по возрастанию требуется $|\beta-\alpha|-1$ транспозиция столбца $(-b_{j_1 i}, \dots, -b_{j_m i})^T$. Меняя теперь знак этого столбца, получаем минор матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$, соответствующий удалению i-ой строки и j-го столбца. Тем самым, определитель Δ'_j равен произведению этого минора на $(-1)^{\alpha-\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}$, то есть совпадает с искомым алгебраическим дополнением (12).

Теперь спектральный параметр присутствует только на главной диагонали. При этом, один элемент, ставший диагональным, λ не содержит: $-b_{j_\alpha i} = -g_{ji}$. Тем самым, при подстановке $b_{nl} = g_{nl} - \lambda\delta_{nl}$, крамеровский определитель представляется в виде:

$$\Delta'_j = \sum_{l=0}^{N-k-1} (-\lambda)^l c_l, \tag{13}$$

где коэффициенты c_l являются суммой главных миноров порядка $(N-k-1-l)$ матрицы

$$\begin{pmatrix}
g_{j_1 j_1} & \cdots & g_{j_1 j_{\alpha-1}} & -g_{j_1 i} & g_{j_1 j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j_1 j_{\beta-1}} & g_{j_1 j_\beta} & \cdots & g_{j_1 j_m} \\
g_{j_2 j_1} & \cdots & g_{j_2 j_{\alpha-1}} & -g_{j_2 i} & g_{j_2 j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j_2 j_{\beta-1}} & g_{j_2 j_\beta} & \cdots & g_{j_2 j_m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{j j_1} & \cdots & g_{j j_{\alpha-1}} & -g_{ji} & g_{j j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j j_{\beta-1}} & g_{j j_\beta} & \cdots & g_{j j_m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{j_{\beta-1} j_1} & \cdots & g_{j_{\beta-1} j_{\alpha-1}} & -g_{j_{\beta-1} i} & g_{j_{\beta-1} j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j_{\beta-1} j_{\beta-1}} & g_{j_{\beta-1} j_\beta} & \cdots & g_{j_{\beta-1} j_m} \\
g_{j_\beta j_1} & \cdots & g_{j_\beta j_{\alpha-1}} & -g_{j_\beta i} & g_{j_\beta j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j_\beta j_{\beta-1}} & g_{j_\beta j_\beta} & \cdots & g_{j_\beta j_m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{j_m j_1} & \cdots & g_{j_m j_{\alpha-1}} & -g_{j_m i} & g_{j_m j_{\alpha+1}} & \cdots & g_{j_m j_{\beta-1}} & g_{j_m j_\beta} & \cdots & g_{j_m j_m}
\end{pmatrix},$$

которую обозначим через $\mathbf{C}$. Коэффициенты c_l формируются не всеми главными минорами соответствующего порядка, а лишь теми, которые включают индекс $j = j_\alpha$, поскольку в Δ'_j из элемента $-g_{ji}$, который стоит на пересечении столбца j и строки с тем же номером, λ не вычитается. Сама же матрица $\mathbf{C}$ отличается от матрицы $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{I}'})$, где $\mathcal{I}' = \{j\} \cup \mathcal{I} \setminus \{i\} = \mathcal{P} \cup \{j\}$, тем, что i-ый столбец стоит на месте столбца j и имеет противоположный знак. Требуемые миноры, таким образом, с точностью до знака равны подходящим минорам исходной матрицы $\mathbf{G}$.

Для вычисления (13) в виде многочлена по степеням спектрального параметра $(-\lambda)$, необходимо для каждого $l = 0, 1 \ldots, N-k-1$ выбрать l-элементное множество индексов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cap (\mathcal{I} \cup \{j\}) = \varnothing$, из строк и столбцов которого с совпадающими номерами и берётся $(-\lambda)$, умножить $(-\lambda)^l$ на $\det \mathbf{C}(\overline{\mathcal{L}})$ и перебрать все множества $\mathcal{L}$ с указанными свойствами. То есть коэффициенты c_l в (13) равны

$$c_l = \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=l, \\ \mathcal{L}\cap(\mathcal{I}\cup\{j\})=\varnothing}} \det \mathbf{C}(\overline{\mathcal{L}}). \tag{14}$$

При выбранном $\mathcal{L}$ величину $\det \mathbf{C}(\overline{\mathcal{L}})$ можно получить следующим образом. Удалить из матрицы $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{I}'})$ строки и столбцы с номерами из $\mathcal{L}$. Далее, переставить i-ый столбец на j-ое место, поменять его знак и взять определитель. Указанное удаление столбцов и строк из $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{I}'})$ превращает её матрицу $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'})$, где $\mathcal{X} = \mathcal{R} \cup \{i\}$, $\mathcal{X}' = \mathcal{R} \cup \{j\}$, $\mathcal{R} = \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$. Если между номерами j и i нет вычеркиваемых номеров (то есть номеров из $\mathcal{R}$), то требуется $i - j - 1$ транспозиция, чтобы переставить i-ый столбец на j-ое место. Если же таких номеров z, то на это же число уменьшается количество необходимых транспозиций. Знак определителя при каждой транспозиции меняется. Изменение знака переносимого столбца добавляет еще один минус. Тем самым,

$$\det \mathbf{C}(\overline{\mathcal{L}}) = (-1)^{i-j-z} \det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'}).$$

Учитывая, что $|\mathcal{X}| = l + k$, согласно лемме 1 получаем

$$\det \mathbf{C}(\overline{\mathcal{L}}) = (-1)^{N-l-k} \sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{X}_0}(j \to i)). \tag{15}$$

Заметим что $\mathcal{X} = \mathcal{L} \cup \mathcal{P} \cup \{i\} = \mathcal{L} \cup \mathcal{I}$. Тем самым, фигурирующие в (15) леса составляют объединение:

$$\bigcup_{\substack{|\mathcal{L}|=l,\\ \mathcal{L}\cap(\mathcal{I}\cup\{j\})=\varnothing}} \mathcal{F}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{I}_0}(j \to i) = \mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j \to i). \tag{16}$$

Окончательно, из (14)–(16) получаем, что

$$c_l = (-1)^{N-l-k} \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j \to i)),$$

а требуемое алгебраическое дополнение оказывается равным

$$\Delta'_j = (-1)^{N-k} \sum_{l=0}^{N-|\mathcal{I}_0|} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j \to i)). \tag{17}$$

Таким образом с учётом (11), общее решение задачи (10), пропорционально вектору $\vec{y}$ с компонентами

$$y_i^{(i)} = 1; \quad y_j^{(i)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N-|\mathcal{I}_0|} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j \to i))}{\sum\limits_{l=0}^{N-|\mathcal{I}|} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0})}, \quad j \notin \mathcal{I}.$$

Дополняя этот вектор нулевыми компонентами, соответствующими индексам из множества $\mathcal{I} \setminus \{i\}$, получаем решение задачи (9). Перебирая индексы $i \in \mathcal{I}$, получаем полный набор линейно независимых решений системы (9) и формулы (7).

При транспонировании матрицы направления дуг изменяются, то есть вершины i и j меняются ролями, поэтому компоненты векторов $\vec{u}^{(i)}$, линейная оболочка которых образует левое собственное подпространство, равны (8). □

Следствие 1. *Пусть алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа λ матрицы $\mathbf{G}$ совпадают и равны k. Тогда найдётся такое множество индексов $\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| = k$, что в правом (левом) собственном подпространстве, отвечающем λ, базис образуют вектора $\vec{v}^{(i)}$ ($\vec{u}^{(i)}$), $i \in \mathcal{I}$, компоненты которых описываются* (7)((8)).

Доказательство. Для матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$ ноль является корнем алгебраической и геометрической кратности k. В частности, поскольку k – алгебраическая кратность, то кратность нулевого корня характеристического многочлена $\det(\mathbf{B} - \mu\mathbf{E}) = \sum\limits_{n=0}^{N} (-\mu)^n c_n$ равна k. Таким образом, $c_n = 0$ при $n = 0, 1, \ldots k-1$, а $c_k \neq 0$. Сами же коэффициенты c_n при степенях спектрального параметра состоят из главных миноров матрицы $\mathbf{B}$ порядка $N-n$, поэтому у матрицы $\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$ существует хотя бы один неравный нулю главный минор порядка $N-k$. Пусть он соответствует вычеркиванию строк и столбцов из множества $\mathcal{I}$. Условия теоремы 1 выполнены. □

§5. О лапласовских матрицах

Сопоставим взвешенному орграфу G без петель орграф $G^{\circlearrowleft}$ с петлями по правилу:$\mathcal{V}G^{\circlearrowleft} = \mathcal{V}G$, $\mathcal{A}G^{\circlearrowleft} = \mathcal{A}G \cup \{(i,i) : i \in \mathcal{V}G\}$, веса дуг исходного графа остаются прежними: $g_{ij}^{\circlearrowleft} = g_{ij}, i \neq j$; веса петель определим как $g_{ii}^{\circlearrowleft} = -\sum\limits_{j \neq i} g_{ij}$. Для взвешенной матрицы смежности построенного графа, очевидно, выполнено $\mathbf{G}^{\circlearrowleft} = -\mathbf{L}$. При этом, во взвешенном конусе $G_0^{\circlearrowleft}$ графа $G^{\circlearrowleft}$ дополнительная вершина 0 оказывается вершиной, в которую заходят лишь дуги нулевого веса, а исходящих из неё дуг нет по определению. Таким образом, вклада в детерминантные формулы вершина 0 не даёт и может быть исключена

из рассмотрения. Остальные дуги взвешенного конуса $G_0^{\circlearrowleft}$ совпадают с дугами исходного орграфа G. Утверждение леммы 1 принимает вид

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– матрица Лапласа взвешенного орграфа без петель,* $\mathcal{R}$ *– подмножество множества индексов* $\mathcal{N}$, $\{i,j\} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{R}$. *Пусть для определённости* $j < i$, *а* z *– число порядковых индексов множества* $\mathcal{R}$, *между* j *и* i. *Тогда*

$$\det \mathbf{L}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'}) = (-1)^{i+j+z}\sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{X}}(j \to i)),$$

где $\mathcal{X} = \mathcal{R} \cup \{i\}$, $\mathcal{X}' = \mathcal{R} \cup \{j\}$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{\circlearrowleft}$, то

$$\det \mathbf{L}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'}) = (-1)^{N-|\mathcal{X}|} \det \mathbf{G}^{\circlearrowleft}(\overline{\mathcal{X}}|\overline{\mathcal{X}'}).$$

Подставляя это выражение в (6) и учитывая, что вершина 0 не даёт вклада ($g_{i0}^{\circlearrowleft} = 0$), получаем требуемое утверждение. □

Теорема 2. *Пусть* G *– взвешенный орграф без петель,* $\mathbf{L}$ *– его матрица Лапласа,* λ *– её собственное число, геометрической кратности* k, *и пусть главный минор матрицы* $\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}$, *соответствующий вычеркиванию индексов из множества* $\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| = k$, *является базисным. Тогда вектора* $\vec{v}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, *с компонентами*

$$\begin{aligned} &v_i^{(i)} = 1; \quad v_j^{(i)} = 0, \quad j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}; \\ &v_j^{(i)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N-k-1} (-\lambda)^l \sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^l(j \to i))}{\sum\limits_{l=0}^{N-k} (-\lambda)^l \sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^l)}, \quad j \notin \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{18}$$

образуют базис в правом собственном подпространстве, отвечающем λ. *Здесь* $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^l$ *– множество* $(l + |\mathcal{I}|)$*-компонентных остовных лесов орграфа* G, *причем все вершины множества* $\mathcal{I}$ *являются корнями.* $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^l(j \to i)$ *– его подмножество, в лесах которого вершина* i *достижима из* j.

В левом собственном подпространстве базис образуют вектора $\vec{u}^{(i)}$ *с компонентами*

$$u_i^{(i)} = 1; \quad u_j^{(i)} = 0, \quad j \in \mathcal{I} \setminus \{i\};$$
$$u_j^{(i)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N-k-1} (-\lambda)^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}'}(i \to j))}{\sum\limits_{l=0}^{N-k} (-\lambda)^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}})}, \quad j \notin \mathcal{I},\ \mathcal{I}' = \{j\} \cup \mathcal{I} \setminus \{i\}. \tag{19}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что в силу равенства $\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{\circlearrowleft}$, для характеристического многочлена выполнено

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}) = \det(-\mathbf{G}^{\circlearrowleft} - \lambda\mathbf{E}) = (-1)^N \det(\mathbf{G}^{\circlearrowleft} - (-\lambda)\mathbf{E}).$$

Тем самым, можно воспользоваться результатом теоремы 1 для матрицы $\mathbf{G}^{\circlearrowleft}$, изменив знак при спектральном параметре и удалив из формул ссылку на индекс 0. □

Замечание 1. Аналогично следствию 1, если геометрическая кратность k равна алгебраической, то существует главный базисный минор порядка $N - k$ матрицы $\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}$. Если $\mathcal{I}$ – множество строк и столбцов при вычёркивании которых, образуется матрица базисного минора, то вектора $\vec{v}^{(i)}$ и $\vec{u}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, с компонентами (18), (19), описывают базис в правом и левом собственных подпространствах, соответственно.

§6. Еще о знаках

Если существует главный (диагональный) базисный минор матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$, то компоненты соответствующих собственных векторов (7) могут быть представлены в виде знако-постоянных сумм. Это обстоятельство обусловлено тем, что согласно Лемме 1, если множества вычёркиваемых строк и столбцов отличаются не более чем на один элемент, то перестановки p_F, порождаемые лесами F, по которым происходит суммирование в (6), имеют одинаковую сигнатуру $\varepsilon(p_F)$. Наличие же главного базисного минора, в частности, позволяет в теореме 1 записать коэффициенты при степенях спектрального параметра в виде суммы по слагаемым вида (6).

При нулевых главных минорах единственная возможность для безнаковой записи компонент собственного вектора возникает, когда

существует ненулевой минор с несовпадающими на один элемент множествами вычеркиваемых строк и столбцов.

Предложение 1. *Пусть λ – собственное число $N \times N$ матрицы $\mathbf{G}$ геометрической кратности k, и минор матрицы $\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$, соответствующий вычеркиванию строк с номерами из $\mathcal{I} = \mathcal{P} \cup \{i\}$, и столбцов с номерами из $\mathcal{P} \cup \{n\}$, $\{i, n\} \cap \mathcal{P} = \varnothing$, $|\mathcal{P}| = k-1$, является базисным. Тогда вектор $\vec{v}$, с компонентами*

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{l=0}^{N-k-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}(j \to i)), \quad j \notin \mathcal{P} \cup \{i\}; \\ v_i &= \sum_{l=0}^{N-k} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\mathcal{I}_0}); \quad v_j = 0, \quad j \in \mathcal{P}, \end{aligned} \tag{20}$$

является (правым) собственным и его n-компонента отлична от нуля.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$, тогда по условию

$$\det \mathbf{B}(\overline{\mathcal{P} \cup \{i\}} | \overline{\mathcal{P} \cup \{n\}}) \neq 0. \tag{21}$$

Аналогично теореме 1, для нахождения компонент (правых) собственных векторов необходимо решить однородную задачу

$$\mathbf{B}\vec{v} = \vec{0}.$$

Переменные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор (21), являются свободными (основными). Это переменные с номерами вычеркиваемых столбцов, то есть с индексами из $\mathcal{P} \cup \{n\}$. Остальные переменные – зависимые. Полагая все компоненты с номерами из $\mathcal{P}$ равными нулю, для нахождения остальных компонент получаем систему

$$\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})\vec{y} = \vec{0}_{N-k+1},$$

аналогичную (10). Её общее решение одномерно и пропорционально вектору из алгебраических дополнений i-ой строки, поскольку в ней есть ненулевой минор, а именно (21). В теореме 1 получены соответствующие выражения (11), (17) для алгебраических дополнений i-ой строки матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$. Единственное изменение касается того, что теперь главный минор (11), отвечающий вычеркиванию из $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$ i-ой строки и i-го столбца, может равняться нулю и на такой множитель делить нельзя. Все остальные алгебраические дополнения i-ой строки

матрицы $\mathbf{B}(\overline{\mathcal{P}})$ описываются формулами (17), где $j \notin \mathcal{P} \cup \{i\}$. Хотя бы одно из них ненулевое. Именно, при $j = n$, соответствующее алгебраическое дополнение с точностью до знака совпадает с минором (21), который нулю не равен по условию. Таким образом, для собственного вектора, определяемого основной переменной n, справедливо представление (20), в котором сам индекс n хоть и не фигурирует, но n-ая компонента вектора заведомо отлична от нуля в силу (21). Для остальных собственных векторов, определяемых основными переменными с номерами из $\mathcal{P}$, представление в древовидной форме, уже является знакопеременным. □

В частности, в случае если жорданова клетка лишь одна, то есть собственное подпространство одномерно, то выражение (20) для компонент правого собственного вектора принимает вид

$$v_i = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}) \ , \quad v_j = \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j \to i)), \quad j \neq i, \qquad (22)$$

заменяющий (7). Это совпадает с полученным в [6] выражением для компонент собственного вектора. Разница лишь в том, что i-я компонента в (22) может равняться нулю, а при единичной алгебраической кратности она отлична от нуля, если в качестве i-ой строки выбрана строка, в которой находится главный базисный минор.

Если же геометрическая кратность собственного значения больше единицы и не совпадает с алгебраической (то есть корневое подпространство содержит как минимум две жордановые клетки), и нет диагонального базисного минора, то знако-постоянство в формулах для собственных векторов заведомо нарушается. Это обусловлено тем, что в формулах крамеровского типа для решения соответствующей задачи (9) возникают миноры вида (1), в которых множество вычеркиваемых строк $\mathcal{I}$ и множество вычеркиваемых столбцов $\mathcal{J}$, отличаются более чем на один индекс. В этом случае леса $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$ порождают перестановки p_F, сигнатуры $\varepsilon(p_F)$ которых различны.

Пример 1. Пусть λ – собственное число 4x4 матрицы G геометрической кратности 2, алгебраическая кратность которого больше 2-х

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22}-\lambda & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33}-\lambda & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}-\lambda \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

a) Пусть у матрицы (23) все главные миноры второго порядка равны нулю, а отличен от нуля минор $\det B(\overline{\{3,4\}}|\overline{\{2,4\}}) = \begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}$. Тогда для определения фундаментальной системы решений (9) зависимыми переменными являются 1-я и 3-я, а основными 2-я и 4-я. Выберем 2-ю компоненту за основную. Согласно (20), получаем (правый) собственный вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, 0)^T$, компоненты которого с точностью до множителя равны

$$v_1 = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22}-\lambda & g_{23} \end{vmatrix} = \lambda g_{13} + g_{13}(g_{20} + g_{21} + g_{23} + g_{24}) + g_{12}g_{23},$$

$$v_2 = -\begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix} = \lambda g_{23} + g_{23}(g_{10} + g_{12} + g_{13} + g_{14}) + g_{21}g_{13}.$$

Компонента $v_3 = \begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ по условию задачи. Таким образом для этого вектора древовидная форма записи знако-постоянна.

Если же за основную переменную взять 4-ю компоненту, то древовидное представление становится знакопеременным. Действительно, для соответствующего (правого) собственного вектора

$$\vec{v'} = (v'_1, 0, v'_3, v'_4)^T$$

первая компонента содержит знакопеременные слагаемые:

$$v'_1 = \begin{vmatrix} g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{24} \end{vmatrix} = g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23}.$$

b) Если в матрице $\mathbf{B}$ (23) по прежнему все главные миноры второго порядка равны нулю, но отличен от нуля минор

$$\det \mathbf{B}(\overline{\{2,4\}}|\overline{\{1,3\}}) = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{14} \\ g_{32} & g_{34} \end{vmatrix} = g_{12}g_{34} - g_{14}g_{32},$$

то уже его запись является знакопеременной. Поэтому древовидная форма всех собственных векторов будет знакопеременной.

c) Пусть матрица (23) равна

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическая кратность нулевого собственного числа этой матрицы равна 4, а геометрическая кратность равна 2 (что для исходной матрицы $\mathbf{G}$ означает, что алгебраическая и геометрическая кратности (правого) собственного числа λ равны 4 и 2 соответственно). Несмотря на несовпадение алгебраической и геометрической кратностей, главный базисный минор у этой матрицы есть – например, $\det \mathbf{B}(\overline{\{1,4\}}) = \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}$. Оба (правых) собственных вектора описываются формулами (7) при $\mathcal{I} = \{1,4\}$. В символьной форме, соответствующей (23), все слагаемые входят с одним знаком. Если же поворотами на $\pi/4$ в плоскостях $(1,2)$ и $(3,4)$ матрицу $\mathbf{B}$ привести к жордановой форме, состоящей из двух клеток размера 2×2:

$$\mathbf{B_J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то единственным отличным от нуля минором второго порядка оказывается $\det \mathbf{B_J}(\overline{\{2,4\}}|\overline{\{1,3\}})$ и он уже не является главным. Хотя фактически в нем лишь одно слагаемое, символьная его запись соответствует пункту b) и является знакопеременной. Тем не менее, если рассматривать отдельно инвариантные подпространства с индексами $(1,2)$ и $(3,4)$, то в каждом из них, согласно (22), слагаемые в компонентах (правых) собственных векторов входят с одним знаком.

Литература

1. D. Cvetkovič , M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschlaften, Berlin, 1980.
2. G. Kirchhoff, Über Die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. — Ann. Phys. Chem. **72** (1847), 497–508.
3. S. Chaiken, *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem.* — SIAM J. Algebraic Disc. Meth. **3** (1982), 319-329.

4. J. W. Moon, *Some determinant expansions and the matrix-tree theorem.* — Discrete Math. **124** (1994), 163-171.
5. В. А. Буслов, *О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 5–21.
6. В. А. Буслов, *О характеристическом многочлене и собственных векторах в терминах древовидной структуры орграфа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 14-36.
7. А. Д. Вентцель , М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, М., 1979.
8. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии.* — ТМФ **76**, No. 2 (1988), 219–230.
9. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии.* — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31.
10. A. Kelmans, I. Pak, A. Postnikov, *Tree and forest volumes of graphs*, Rutcor Research Report 47–99. Piscataway: Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, December 1999.
11. П. Ю. Чеботарёв, Р. П. Агаев, *Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов*, LAP LAMBERT Academic Publising GmbH Co.Kg, 2011.

Buslov V. A. On the relationship between multiplicities of the matrix spectrum and signs of components of its eigenvector in a tree-like structure.

Tree-like structure parametric representation of an eigenspace corresponding to an eigenvalue λ of a matrix G is obtained in the case where a non-zero main basic minor of the matrix $G-\lambda E$ exists. If the algebraic and geometric multiplicities of λ are equal, such a minor always exists. Coefficients at the degrees of spectral parameter are sums of summands having the same sign. If there is no non-zero main basic minor, the tree-like form does not allow to represent coefficients as sums with the same signs with the only exception – the case of eigenvalue of geometric multiplicity 1.

Физический факультет,
кафедра вычислительной физики,
С.-Петербургский
государственный Университет,
ул. Ульяновская, д.3
198504 С.-Петербург, Старый Петергоф
E-mail: abvabv@bk.ru, v.buslov@spbu.ru

Поступило 8 ноября 2017 г.