Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

А. А. Макаров

О ДВУХ АЛГОРИТМАХ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ

§1. Введение

Сплайны и вейвлеты нашли широкое применение в теории информации. Вейвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия или уточнения) больших потоков информации. В теории сплайнов наиболее важными являются интерполяционные и аппроксимационные свойства, свойства гладкости и устойчивости решения интерполяционных и аппроксимационных задач; важно также минимизировать вычислительную сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета). Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности измельчающихся или укрупняющихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вейвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то вычислительная сложность оказывается приемлемой.

Важной задачей при построении сплайн-вейвлетного разложения является выбор метода построения вложенных сеток и разработка способа проектирования исходного пространства сплайнов на вложенное пространство сплайнов. Это приводит к соответствующим матрицам реконструкции (матрицам последовательного деления), применяемым для дальнейшего вейвлетного разложения потоков числовой информации. Для неравномерных сеток принципиальным вопросом является построение калибровочных соотношений, обобщающих классические масштабирующие уравнения для равномерных сеток. В работах (см., например, [1–3]) сплайн-вейвлетные разложения строились при последовательном удалении или добавлении узлов. Тот же

Ключевые слова: B-сплайн, минимальные сплайны, вейвлеты, сплайн-вейвлеты, вейвлетное разложение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 р_а).

подход позволяет удалять группы последовательных узлов, называемых гнездами [4], или проводить однократное локального укрупнение неравномерной сетки [5, 6].

В случае B-сплайнов в работах [7, 8] рассмотрен подход (в общем случае дающий лифтинговую схему) к построению сплайн-вейвлетного разложения при однократном локальном укрупнении неравномерной сетки, связанный с построением либо "ленивых" вейвлетов, либо вейвлетов со смещенным носителем. В данной работе этот подход применяется для построения сплайн-вейвлетных разложений, использующих аппроксимационные соотношения в качестве исходной структуры для построения пространства минимальных сплайнов. Преимуществами этого подхода является возможность применения неравномерных сеток и достаточно произвольных неполиномиальных сплайн-вейвлетов.

§2. Пространство координатных сплайнов

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X (с двумя дополнительными (фиктивными) узлами вне отрезка $[a,b]$, лежащими на некотором интервале $(\alpha,\beta) \supset [a,b]$):

$$X : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1}. \qquad (1)$$

Введем обозначение $J_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{i, i+1, \ldots, k\}$, $i,k \in \mathbb{Z}$, $i < k$. При $K_0 \geqslant 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ через $\mathcal{X}(K_0,\alpha,\beta)$ обозначим класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности*:

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0, \quad j \in J_{0,n},$$

и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{j \in J_{-1,n}} (x_{j+1}-x_j)$.

Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-1,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$ будем называть *цепочкой векторов*. Иногда, для удобства, компоненты векторов будем обозначать квадратными скобками и нумеровать цифрами. Например, $\mathbf{a}_j = ([\mathbf{a}_j]_0, [\mathbf{a}_j]_1)^T$. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{-1,n-1}$.

Введем обозначения для объединения всех элементарных сеточных интервалов $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in J_{-1,n}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Если цепочка векторов $\mathbf{A}$ полная, то из условий

$$\begin{aligned}\sum_{j'=k-1}^{k} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) &\equiv \quad \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in J_{-1,n-1},\\ \omega_j(t) &\equiv \quad 0, \qquad\quad t \notin [x_j, x_{j+2}] \cap M,\end{aligned} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in J_{-1,n-1}$. Ясно, что $\operatorname{supp}\omega_j(t) \subset [x_j, x_{j+2}]$. По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}),\\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}).\end{cases}$$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов*. Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями.*

Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^2, j \in J_{-1,n+1}$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

и определим векторы $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2, j \in J_{-1,n-1}$ формулой $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{d}_j$ и $\mathbf{a}_j$ в покомпонентном виде:

$$\mathbf{d}_j = (-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1, [\boldsymbol{\varphi}_j]_0)^T, \quad \mathbf{a}_j = ([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0, [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1)^T.$$

Множество всех функций, непрерывных на интервале (α, β), обозначим через $C(\alpha, \beta)$. Для любого числа $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha, \beta),\ i = 0, 1, 2, \ldots, S\}$, полагая $C^0(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta)$. Если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ непрерывно дифференцируемы S раз на интервале (α, β), то будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S(\alpha, \beta)$. Аналогичные обозначения $C^S[a, b]$ и $\mathbf{C}^S[a, b]$ будем использовать для соответствующих пространств на отрезке $[a, b]$.

Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\alpha, \beta)$, вронскиан $W(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\det(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}')(t)| \geqslant const > 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$ и $X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$, то $\omega_j \in C[a, b]$ и справедливы формулы [9]

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T \mathbf{a}_j}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{4}$$

Пространство

$$\mathbb{S}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ u \mid u = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j\, \omega_j, \;\; c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}$$

называется *пространством минимальных линейных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов (второго порядка)* на сетке X. Сами сплайны будем называть *минимальными сплайнами максимальной гладкости.* В случае полиномиальных компонент порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ можно говорить о степени сплайна, тогда (полиномиальные) сплайны максимальной гладкости являются сплайнами первой степени. Разность между степенью сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной называется *дефектом* сплайна. Таким образом, сплайны максимальной гладкости являются сплайнами с минимальным дефектом (равным 1).

Если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$, т.е. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \rho(t))^T$, где $\rho(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, то справедливо тождество

$$\sum_{j=-1}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1, \quad t \in [a, b],$$

при этом формулы (4) принимают вид

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t) - \rho_j}{\rho_{j+1} - \rho_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\rho_{j+2} - \rho(t)}{\rho_{j+2} - \rho_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho_j = \rho(x_j)$.

Ясно, что $\omega_j(x_i) = \delta_{j,i-1}$, где $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера. Более того, если функция $\rho(t)$ строго монотонна на множестве M, то сплайн $\omega_j(t) > 0$ для всех $t \in (x_j, x_{j+2})$.

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t)^T$, т.е. $\rho(t) = t$, найдем

$$\mathbf{d}_j = (-x_j, 1)^T, \quad \mathbf{a}_j = \boldsymbol{\varphi}_{j+1} = (1, x_{j+1})^T.$$

Тогда функции ω_j совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, т.е. с одномерными функциями Куранта:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{6}$$

Для равномерной сетки узлов $x_j = a + hj$, $j \in J_{-1,n+1}$, с шагом $h = (b-a)/n$ сплайн (6) называется *кардинальным* B-сплайном первой степени и определяется следующим образом:

$$N_j(t) = B\left(\frac{t}{h} - j\right) \chi_{[a,b]}(t), \quad j \in J_{-1,n-1}, \tag{7}$$

где $B(t)$ – функция "крышечка":

$$B(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1), \\ 2 - t, & t \in [1,2), \\ 0, & t \notin [0,2), \end{cases}$$

а $\chi_{[a,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$.

Для нумерации сплайнов может использоваться как левый узел носителя (см. (5) для неравномерной сетки и (7) для равномерной сетки), так и центральный. Для сплайнов с нумерацией по центральному узлу носителя будем использовать обозначения

$$\mathring{\omega}_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t) - \rho_{j-1}}{\rho_j - \rho_{j-1}}, & t \in [x_{j-1}, x_j), \\ \dfrac{\rho_{j+1} - \rho(t)}{\rho_{j+1} - \rho_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathring{N}_j(t) = B\left(\frac{t-a}{h} - j + 1\right) \chi_{[a,b]}(t), \quad j \in J_{0,n}.$$

§3. Калибровочные соотношения

Из исходной сетки X для фиксированного $k \in J_{0,n-2}$ удалим один узел $x_{k+1} \in (a,b)$ и на полученной таким образом *укрупненной (разреженной) сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in J_{-1,n-2}$. Тогда узлы $\widetilde{x}_j$ вновь полученной сетки $\widetilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{x}_j \mid j \in J_{-1,n}\}$ определяются следующим образом:

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } j \leqslant k, \\ x_{j+1} & \text{при } j \geqslant k+1. \end{cases} \tag{9}$$

Условимся ставить волну сверху над обозначениями всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (5), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{d}_j = \widetilde{\mathbf{d}}_j \quad \text{при } j \leqslant k, \qquad \mathbf{d}_j = \widetilde{\mathbf{d}}_{j-1} \quad \text{при } j \geqslant k+2, \tag{10}$$

$$\mathbf{a}_j = \widetilde{\mathbf{a}}_j \quad \text{при } j \leqslant k-1, \qquad \mathbf{a}_j = \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1} \quad \text{при } j \geqslant k+1. \tag{11}$$

Также очевидно, что верны тождества

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_j(t) &\equiv \omega_j(t) \qquad \text{при } j \leqslant k-2, \\ \widetilde{\omega}_j(t) &\equiv \omega_{j+1}(t) \quad \text{при } j \geqslant k+1. \end{aligned} \tag{12}$$

Ниже будет показано, что формулы (12) можно дополнить следующими представлениями функций $\widetilde{\omega}_{k-1}$ и $\widetilde{\omega}_k$ через функции ω_j:

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) \equiv \omega_{k-1}(t) + \mathfrak{p}_{k-1,k}\, \omega_k(t), \tag{13}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \mathfrak{p}_{k,k}\, \omega_k(t) + \omega_{k+1}(t), \tag{14}$$

где значения $\mathfrak{p}_{i,j} \in \mathbb{R}^1$ полностью определяются исходной сеткой X. Тождества (12)–(14) называются *калибровочными соотношениями.*

Прежде чем сформулировать полное утверждение о представлении калибровочных соотношений, докажем один вспомагательный результат. Ввиду применения алгебраического подхода к построению минимальных сплайнов, их исследование приводит к определенным детерминантным тождествам (например, между определителями порядка m, каждый элемент которых является определителем $m+1$ порядка, между символическими определителями порядка m, среди элементов которых имеются как $(m+1)$-мерные векторы, так и числа и др.) В ряде случаев оказывается удобным воспользоваться приемом, использованным в работе [10]. Он связан с применением теоремы Лапласа о вычислении определителей (в случае ступенчатых матриц), используемой в обратном направлении. Таким образом большое количество определителей меньшего порядка удается свести к небольшому количеству определителей более высокого порядка.

Лемма 1. *Для произвольных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ *справедливо равенство*

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{c})\det(\mathbf{b},\mathbf{d}) - \det(\mathbf{a},\mathbf{d})\det(\mathbf{b},\mathbf{c}) - \det(\mathbf{c},\mathbf{d})\det(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0. \qquad (15)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся свойством линейности определителя относительно столбца:

$$\det(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = \lambda_1\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \lambda_2\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}), \qquad (16)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$.

Если $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ – квадратные матрицы, то определитель ступенчатой матрицы вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}), \qquad (17)$$

где через $*$ обозначены произвольные числа, а через $\mathbf{0}$ – нули.

Пусть $\mathbf{A}$ – матрица четвертого порядка. Перестановку на множестве из четырех столбцов матрицы $\mathbf{A}$ будем записывать в виде таблицы чисел

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix},$$

где под каждым номером столбца стоит его образ при перестановке.

Очевидно, что основные матричные операции над блочными матрицами производятся по тем же правилам, что и над обычными числовыми матрицами, если матрицы разбиты на блоки таким образом, что все нужные операции имеют смысл.

Обозначим левую часть доказываемого утверждения (15) через Z. Используя формулу (17), представим Z в виде разницы определителей ступенчатых матриц, содержащих блоки из векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ и нулей:

$$Z = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}.$$

В первом из полученных определителей сделаем перестановку столбцов $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, во втором – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, в третьем –

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Первая перестановка меняет знак определителя, а вторая и третья не меняют, поэтому, умножая Z на -1, имеем

$$-Z = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Рассмотрим последний определитель из правой части выражения (18). Его третий столбец представим в виде $(\mathbf{c}+\mathbf{0}, \mathbf{c}-\mathbf{c})^T$. Тогда, применяя формулу (16), получаем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Складывая первый определитель правой части выражения (18) и первый определитель правой части выражения (19) и применяя формулу (16), получаем определитель

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из второй и учитывая свойство (17), получаем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, складывая второй определитель правой части выражения (18) и второй определитель правой части выражения (19), получаем равный нулю определитель. А, следовательно, $Z = 0$, что доказывает утверждение леммы (15). $\square$

Теорема 1. *Для $k \in J_{0,n-2}$, $t \in [a,b]$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J_{-1,n-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\, \omega_j(t), \quad i \in J_{-1,n-2},$$

где элементы $\mathfrak{p}_{i,j} \in \mathbb{R}^1$ задаются равенствами

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \textit{при} \;\; i \leqslant k-2, \\ \delta_{k-1,j} & \textit{при} \;\; i = k-1, \; j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \textit{при} \;\; i = k, j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \textit{при} \;\; i \geqslant k+1, \end{cases} \tag{20}$$

а также формулами

$$\mathfrak{p}_{k-1,k} = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}}, \tag{21}$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}}. \tag{22}$$

Доказательство. Справедливость формул (20) и (22) непосредственно вытекает из работы [2]. Однако, учитывая равенства (11), коэффициент (21) в работе [2] имеет более сложный с вычислительной точки зрения вид

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1} \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}} \right) / \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}. \tag{23}$$

Докажем равенство $\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \mathfrak{p}_{k-1,k}$, используя лемму 1. Учитывая представления (21) и (23), имеем

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} - \mathfrak{p}_{k-1,k} = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k \, \mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1} \, \mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k - \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1} \, \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1} \, \mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}}.$$

Обозначим числитель полученного выражения через Z, и запишем его, используя определение (3). Тогда

$$\begin{aligned} Z = &\det(\boldsymbol{\varphi}_{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_{k+1}) \det(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+2}) - \det(\boldsymbol{\varphi}_{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_{k+2}) \\ &\times \det(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+1}) - \det(\boldsymbol{\varphi}_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_{k+2}) \det(\boldsymbol{\varphi}_{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_k). \end{aligned}$$

В равенстве (15) положим $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}_{k-1}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathbf{c} = \boldsymbol{\varphi}_{k+1}$, $\mathbf{d} = \boldsymbol{\varphi}_{k+2}$, откуда вытекает, что $Z = 0$. Следовательно, $\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \mathfrak{p}_{k-1,k}$, что завершает доказательство теоремы. □

Далее рассмотрим вопрос удаления из сетки X каждого второго узла, не считая дополнительных (фиктивных) узлов. Пусть для определенности n четно. *Четным двукратным укрупнением* сетки X будем называть сетку Ξ, составленную из четных узлов сетки X,

$$\Xi : x_{-1} < a = x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < x_{n-2} < x_n = b < x_{n+1}, \tag{24}$$

т.е.

$$\xi_j = \begin{cases} x_{-1}, & j = -1, \\ x_{2j}, & j \in J_{0,n/2}, \\ x_{n+1}, & j = n/2 + 1. \end{cases}$$

На сетке Ξ рассмотрим сплайны $\Omega_j, j \in J_{-1,n/2-1}$, которые можно отыскать по формуле (5), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы ξ_j. Ясно, что функции Ω_j имеют "удвоенный" носитель, т.е. $\operatorname{supp}\Omega_j(t) = [\xi_j, \xi_{j+2}] = [x_{2j}, x_{2j+4}]$.

Теорема 2. *Для $t \in [a,b]$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\Omega_{-1}(t) = \omega_{-1}(t) + p_{-1,2}\,\omega_0(t), \tag{25}$$

$$\Omega_{j-1}(t) = \sum_{i=0}^{2} p_{j-1,i}\,\omega_{2j-2+i}(t), \quad j \in J_{1,n/2-1}, \tag{26}$$

$$\Omega_{n/2-1}(t) = p_{n/2-1,0}\,\omega_{n-2}(t) + \omega_{n-1}(t), \tag{27}$$

где элементы $p_{j-1,i} \in \mathbb{R}^1$, $i = 0,1,2$, задаются равенствами

$$p_{j-1,0} = \frac{\mathbf{d}_{2j-2}^T \mathbf{a}_{2j-2}}{\mathbf{d}_{2j-2}^T \mathbf{a}_{2j-1}}, \qquad j \in J_{1,n/2-1},$$

$$p_{j-1,1} = 1, \qquad j \in J_{0,n/2},$$

$$p_{j-1,2} = \frac{\mathbf{d}_{2j+1}^T \mathbf{a}_{2j+1}}{\mathbf{d}_{2j}^T \mathbf{a}_{2j+1}}, \qquad j \in J_{0,n/2-2}.$$

Доказательство. Для удобства в доказательстве будем явно указывать сетку, на которой рассматривается тот или иной объект. Если явная индикация сетки отсутствует, то рассматриваемый объект исследуется на исходной сетке X (1). Например, для сплайн-функций, построенных на сетках X (1) и $\widetilde{X}$ (9), согласно (13) и (21), справедливо равенство

$$\omega_{k-1}^{\widetilde{X}}(t) = \omega_{k-1}(t) + \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}}\,\omega_k(t).$$

Далее рассмотрим сетку $Y = \{y_j\}$, полученную из сетки $\widetilde{X}$ следующей перенумерацией узлов:

$$y_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{j-2}. \tag{28}$$

Аналогично тому, как из сетки X (1) удалением узла x_k построена сетка $\widetilde{X}$ (9), из сетки Y получим сетку $\widetilde{Y}$ удалением узла y_k. Тогда, ввиду калибровочного соотношения (14) и формулы (22), справедливо равенство

$$\omega_k^{\widetilde{Y}}(t) = \mathfrak{p}_{k,k}^{Y}\,\omega_k^{Y}(t) + \omega_{k+1}^{Y}(t).$$

В силу представлений (28) и (12), справедливы равенства

$$\omega_k^Y(t) = \omega_{k-2}^{\widetilde{X}}(t) = \omega_{k-2}(t),$$

$$\omega_{k+1}^Y(t) = \omega_{k-1}^{\widetilde{X}}(t).$$

Ввиду определения сеток X (1), $\widetilde{X}$ (9), Y (28) и представлений (10)–(11), верны цепочки равенств

$$\mathbf{d}_k^{T^Y} = \mathbf{d}_{k-2}^{T^{\widetilde{X}}} = \mathbf{d}_{k-2}^T,$$

$$\mathbf{a}_k^Y = \mathbf{a}_{k-2}^{\widetilde{X}} = \mathbf{a}_{k-2},$$

$$\mathbf{a}_{k+1}^Y = \mathbf{a}_{k-1}^{\widetilde{X}} = \mathbf{a}_{k-1},$$

откуда, учитывая (22), заключаем, что

$$\mathfrak{p}_{k,k}^Y = \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-1}}.$$

Теперь ясно, что, с одной стороны,

$$\omega_k^{\widetilde{Y}}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-1}}\, \omega_{k-2}(t) + \omega_{k-1}(t) + \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}}\, \omega_k(t).$$

С другой стороны, благодаря оперделению на сетке Ξ (24) функций Ω_j, имеем

$$\omega_k^{\widetilde{Y}}(t) = \Omega_{k/2-1}.$$

Делая в предыдущем равенстве замену $k = 2j$, приходим к доказываемому утверждению (26).

Для краевых сплайн-функций искомые равенства (25) и (27) очевидным образом следуют из представлений (13)–(14). $\square$

§4. Построение алгоритмов сплайн-вейвлетного разложения

Сетку вида (1), в которой $n = 2^L, L \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через Δ^L. На сетке Δ^L рассмотрим сплайны (8) с центральной нумерацией, обозначаемые далее через $\mathring{\omega}_j^L$. Пространство таких сплайнов на отрезке $[a, b]$ обозначим через

$$V_L = V_L(\Delta^L) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ s^L | s^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L} c_j^L\, \mathring{\omega}_j^L(t), \quad c_j^L \in \mathbb{R}^1, t \in [a, b] \right\}, \quad (29)$$

$$\dim V_L = 2^L + 1.$$

Если сетка $\Delta^{L-1}, L \geqslant 1$, получена четным двукратным укрупнением сетки Δ^L, то, благодаря калибровочным соотношениям (25)–(27), рассматриваемым для сплайнов с центральной нумерацией, справедливо вложение $V_{L-1} \subset V_L$. Пространство вейвлетов W_{L-1} можно определить как дополнение V_{L-1} до V_L таким образом, что любая функция в V_L может быть записана в виде суммы некоторой функции из V_{L-1} и некоторой функции из W_{L-1}. При этом существуют следующие две альтернативные возможности построения базисных функций в пространстве W_{L-1}.

Например, в качестве базисных функций в пространстве W_{L-1} можно использовать базисные функции в V_L с центрами в нечетных узлах. Так получаются "ленивые" вейвлеты, которые не требуют дополнительных вычислений, являясь подмножеством масштабирующих функций. Ясно, что $\dim W_{L-1} = 2^{L-1}$. Тогда выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т.е.

$$\dim V_L = \dim V_{L-1} + \dim W_{L-1}.$$

Составим из базисных функций $\mathring{\omega}_j^L$ вектор-строку

$$\boldsymbol{\omega}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathring{\omega}_0^L, \mathring{\omega}_1^L, \ldots, \mathring{\omega}_{2^L}^L\right).$$

Вводя обозначения для вектора, состоящего из коэффициентов аппроксимации, $\boldsymbol{c}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(c_0^L, c_1^L, \ldots, c_{2^L}^L\right)^T$, запишем (29) в векторном виде

$$s^L(t) = \boldsymbol{\omega}^L(t)\, \boldsymbol{c}^L.$$

Наличие вложенных пространств эквивалентно существованию матрицы укрупняющей реконструкции масштабирующих функций (или матрицы последовательного деления) $\boldsymbol{P}^L$ размера $(2^L+1) \times (2^{L-1}+1)$ такой, что

$$\boldsymbol{\omega}^{L-1} = \boldsymbol{\omega}^L\, \boldsymbol{P}^L,$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (25)–(27), записанных для сплайнов с центральной нумерацией:

$$\mathring{\omega}_j^{L-1}(t) = p_{j-1,0}\, \mathring{\omega}_{2j-1}^L(t) + \mathring{\omega}_{2j}^L(t) + p_{j-1,2}\, \mathring{\omega}_{2j+1}^L(t). \qquad (30)$$

Вид краевых сплайнов очевидным образом вытекает из представления (30), выписывать его подробнее не будем. Вместо этого для наглядности приведем пример матрицы $\boldsymbol{P}^L$ при $L = 3$:

$$\boldsymbol{P}^3_{9\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{-1,2} & p_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2} & p_{1,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} & p_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{2,2} & p_{3,0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные вейвлет-функции обозначим через

$$\psi_i^{L-1}(t) = \mathring{\omega}^L_{2i+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^{L-1} - 1,$$

и введем вектор-строку $\boldsymbol{\psi}^{L-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\psi_0^{L-1}, \psi_1^{L-1}, \ldots, \psi^{L-1}_{2^{L-1}-1}\right)$. Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через d_i^{L-1} и введем вектор $\boldsymbol{d}^{L-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(d_0^{L-1}, d_1^{L-1}, \ldots, d^{L-1}_{2^{L-1}-1}\right)^T$.

Поскольку пространство вейвлетов W_{L-1} по определению является подпространством V^L, можно представить вейвлет-функции ψ_i^{L-1} в виде линейной комбинации масштабирующих функций $\mathring{\omega}^L_j$. Таким образом, существует матрица укрупняющей реконструкции вейвлет-функций $\boldsymbol{Q}^L$ размера $(2^L + 1) \times 2^{L-1}$ такая, что

$$\boldsymbol{\psi}^{L-1} = \boldsymbol{\omega}^L\, \boldsymbol{Q}^L,$$

где все элементы столбцов матрицы $\boldsymbol{Q}^L$ – нули, за исключением единственной единицы, т.к. каждый ленивый вейвлет – это одна “узкая” базисная функция. Матрица $\boldsymbol{Q}^L$ при $L = 3$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{Q}^3_{9\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду сказанного выше, любая функция в V_L может быть записана в виде суммы некоторой функции из V_{L-1} и некоторой функции из W_{L-1}, причем справедлива следующая цепочка равенств:

$$\boldsymbol{\omega}^L(t)\,\boldsymbol{c}^L = \boldsymbol{\omega}^{L-1}(t)\,\boldsymbol{c}^{L-1} + \boldsymbol{\psi}^{L-1}(t)\,\boldsymbol{d}^{L-1} = \boldsymbol{\omega}^L(t)\,\boldsymbol{P}^L\,\boldsymbol{c}^{L-1} + \boldsymbol{\omega}^L(t)\,\boldsymbol{Q}^L\boldsymbol{d}^{L-1}.$$

Следовательно, коэффициенты $\boldsymbol{c}^L$ могут быть получены из коэффициентов $\boldsymbol{c}^{L-1}$ и $\boldsymbol{d}^{L-1}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{c}^L = \boldsymbol{P}^L\,\boldsymbol{c}^{L-1} + \boldsymbol{Q}^L\,\boldsymbol{d}^{L-1},$$

или, в обозначениях для блочных матриц,

$$\boldsymbol{c}^L = \begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^L & \boldsymbol{Q}^L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}^{L-1}\\ \boldsymbol{d}^{L-1}\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов $\boldsymbol{c}^L$ на более грубую версию $\boldsymbol{c}^{L-1}$ и уточняющие коэффициенты $\boldsymbol{d}^{L-1}$ состоит в решении разреженной системы линейных уравнений (31).

Второй вариант выбора базисных функций в пространстве W_{L-1} заключается в использовании базисных функции в V_L с центрами в четных узлах при дополнительно накладываемом условии обнуления сплайна в последнем узле на отрезке $[a,b]$. Тогда соответствующие базисные функции удаляются из базисов рассматриваемых пространств V_L, V_{L-1}, W_{L-1}. Снабдим обозначения рассматриваемых пространств верхним индексом "0":

$$V_L^0 = V_L^0(\Delta^L) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ S^L | S^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L-1} C_j^L\,\mathring{\omega}_j^L(t),\ \ C_j^L \in \mathbb{R}^1,\ t\in[a,b] \right\}, \tag{32}$$

$$\dim V_L^0 = 2^L.$$

Тогда $\dim W_{L-1}^0 = 2^{L-1}$, и выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств:

$$\dim V_L^0 = \dim V_{L-1}^0 + \dim W_{L-1}^0.$$

Вводя обозначения

$$\boldsymbol{C}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(C_0^L, C_1^L, \dots, C_{2^L-1}^L\right)^T, \qquad \boldsymbol{\Omega}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathring{\omega}_0^L, \mathring{\omega}_1^L, \dots, \mathring{\omega}_{2^L-1}^L\right),$$

запишем (32) в векторном виде

$$S^L(t) = \boldsymbol{\Omega}^L(t)\boldsymbol{C}^L.$$

Соответствующая матрица реконструкции $\mathfrak{P}^L$ размера $2^L \times 2^{L-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\Omega}^{L-1} = \boldsymbol{\Omega}^L \, \mathfrak{P}^L,$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов калибровочных соотношений для сплайнов с центральной нумерацией (30).

Матрица $\mathfrak{P}^L$ при $L = 3$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{P}^3_{8\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{-1,2} & p_{0,0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2} & p_{1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} & p_{2,0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Базисные вейвлет-функции обозначим через

$$\Psi_i^{L-1}(t) = \mathring{\omega}^L_{2i}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^{L-1} - 1,$$

и введем обозначение $\boldsymbol{\Psi}^{L-1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\Psi_0^{L-1}, \Psi_1^{L-1}, \ldots, \Psi^{L-1}_{2^{L-1}-1}\right)$. Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через D_i^{L-1} и введем вектор $\boldsymbol{D}^{L-1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(D_0^{L-1}, D_1^{L-1}, \ldots, D^{L-1}_{2^{L-1}-1}\right)^T$.

Соответствующая матрица реконструкции $\mathfrak{Q}^L$ размера $2^L \times 2^{L-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\Psi}^{L-1} = \boldsymbol{\Omega}^L \, \mathfrak{Q}^L,$$

где все элементы столбцов матрицы $\mathfrak{Q}^L$ – нули, за исключением единственной единицы. Матрица $\mathfrak{Q}^L$ при $L = 3$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{Q}^3_{8\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь процесс получения коэффициентов $\boldsymbol{C}^L$ из $\boldsymbol{C}^{L-1}$ и $\boldsymbol{D}^{L-1}$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{C}^L = (\mathfrak{P}^L \;\; \mathfrak{Q}^L) \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^{L-1} \\ \boldsymbol{D}^{L-1} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Чтобы решить систему (31) относительно $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{L-1} \\ \boldsymbol{d}^{L-1} \end{pmatrix}$, предлагается матрицу $(\boldsymbol{P}^L \quad \boldsymbol{Q}^L)$ сделать ленточной, изменив порядок неизвестных таким образом, чтобы столбцы матриц $\boldsymbol{P}^L$ и $\boldsymbol{Q}^L$ перемежались (в случае B-сплайнов подробности см. в работе [11]). Хотя разрешимость полученной системы гарантирована ввиду линейной независимости базисных функций, вопрос о ее обусловленности остается открытым.

За счет сдвига носителей базисных вейвлетов систему (33) целесообразно расщепить на системы для четных и нечетных узлов со строгим диагональным преобладанием (в случае B-сплайнов подробности см. в работе [8]). Такие системы уравнений можно решать методом прогонки с гарантией корректности и устойчивости.

Литература

1. А. А. Макаров, *О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка* — Пробл. мат. анализа **38** (2008), 47–60.
2. А. А. Макаров, *Алгоритмы вэйвлетного сжатия пространств линейных сплайнов.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. **1**, No. 2 (2012), 41–51.
3. А. А. Макаров, *Алгоритмы вэйвлетного уточнения пространств сплайнов первого порядка.* — Труды СПИИРАН **19** (2011), 203–220.
4. Ю. К. Демьянович, И. Д. Мирошниченко, *Гнездовые сплайн-вэйвлетные разложения.* — Пробл. мат. анализа **64** (2012), 51–61.
5. Ю. К. Демьянович, *Сплайн-вэйвлеты при однократном локальном укрупнении сетки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 97–118.
6. Ю. К. Демьянович, А. С. Пономарев, *О реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 33–73.
7. W. Sweldens, *The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets.* — Appl. Comput. Harmonic Anal. **3**, No. 2 (1996), 186–200.
8. Б. М. Шумилов *Алгоритмы с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени на неравномерных сетках.* — Вычисл. мат. мат. физ. **56**, No. 7 (2016), 1236–1247.
9. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. мат. анализа **60** (2011), 25–38.
10. А. А. Макаров, *Об одном алгебраическом тождестве в теории B_φ-сплайнов второго порядка.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та **1**, No. 1 (2007) 96–98.
11. Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин, *Вейвлеты в компьютерной графике.* Пер. с англ., НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2002, 272 с.

Makarov A. A. On two algorithms of wavelet decomposition for spaces of linear splines.

The purpose of this paper is to construct new types of wavelets for minimal splines on an irregular grid. The approach used to construct spline-wavelet decompositions uses approximation relations as the initial structure for constructing the spaces of minimal splines. The advantages of this approach are the possibility of using irregular grids and sufficiently arbitrary nonpolynomial spline-wavelets.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9, 199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 8 ноября 2017 г.