Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, А. А. Смирнов

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПОСТРОЕНИИ МАТРОИДА ИЗ ЧАСТЕЙ

§1. Введение

В нашей предыдущей статье [1] была доказана теорема о том, что, имея некоторое конечное множество, разбитое на несколько блоков, на каждом из которых задана структура матроида, и функцию ранга, заданную для всех объединений нескольких блоков, удовлетворяющую условиям на функцию ранга из определения матроида, мы можем доопределить функцию ранга для всех подмножеств исходного множества, превратив его в полноценный матроид при условии, что каждый из блоков как самостоятельный матроид имеет полный ранг.

Оказалось, что последнее условие является необязательным, т.е. блоки могут иметь структуры произвольных матроидов, лишь бы их ранги соответствовали рангам блоков, заданным для их объединений. Это значит, что ранг каждого блока, полученный из его структуры как матроида, должен совпадать с его рангом как объединения, состоящего из одного блока.

§2. Доопределения частичной функции ранга

Пусть есть конечный набор непересекающихся конечных множеств A_i при $i = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$. Определим A_S при $S \subset \{1, \dots, N\}$ как $\bigcup_{i \in S} A_i$.

Теорема 1. *Пусть*

(1) *заданы ранги (функция r_0) всех множеств вида A_S, так что для них выполняются условия из определения матроида*

$$r_0(L) + r_0(M) \geqslant r_0(L \cup M) + r_0(L \cap M)$$

и

$$r_0(L) \geqslant r_0(M) \text{ при } L \supset M,$$

где L и M — множества вида A_S;

Ключевые слова: прямая сумма, подпространство, матроид.

(2) *множества* A_i *при* $i = 1, \ldots, N$ *имеют струкутры матроидов* (*функция ранга обозначается* r_i), *причем* $r_i(A_i) = r_0(A_i)$.

Тогда функцию r *можно определить на всех подмножествах множества* $A_{\{1,\ldots,N\}}$ *так, чтобы*

(1) *последнее множество стало матроидом*;

(2а) *если* $X \subset A_i$, *то* $r(X) = r_i(X)$;

(2б) *если* $X \cap A_i \in \{\varnothing, A_i\}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, N\}$, *то* $r(X) = r_0(X)$.

Доказательство. Пусть $X \subset A_{\{1,\ldots,N\}}$. Определим $S(X) = \{i | X \cap A_i \neq \varnothing\}$. Далее, определим ранг X формулой

$$r(X) = \min_{\substack{u_1,\ldots,u_k \in S(X),\\ u_i \neq u_j \text{ при } i \neq j}} (r_0(A_{S(X) \setminus \{u_1,\ldots,u_k\}}) + \sum_{i=1}^{k} r_{u_i}(X \cap A_{u_i})).$$

Докажем сначала пункт (2а) в заключении теоремы. Если $X \subset A_i$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, то, по определению $r(X)$, имеем

$$r(X) = \min(r_0(A_i), r_i(X)) = \min(r_i(A_i), r_i(X)) = r_i(X).$$

Теперь докажем пункт (2б) в заключении теоремы. Если $X \cap A_i \in \{\varnothing, A_i\}$, то $X = A_{S(X)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} r(X) &= \min_{\substack{u_1,\ldots,u_k \in S(X),\\ u_i \neq u_j \text{ при } i \neq j}} (r_0(A_{S(X) \setminus \{u_1,\ldots,u_k\}}) + \sum_{i=1}^{k} r_{u_i}(X \cap A_{u_i})) \\ &= \min_{\substack{u_1,\ldots,u_k \in S(X),\\ u_i \neq u_j \text{ при } i \neq j}} (r_0(A_{S(X) \setminus \{u_1,\ldots,u_k\}}) + \sum_{i=1}^{k} r_{u_i}(A_{u_i})) \\ &= \min_{\substack{u_1,\ldots,u_k \in S(X),\\ u_i \neq u_j \text{ при } i \neq j}} (r_0(A_{S(X) \setminus \{u_1,\ldots,u_k\}}) + \sum_{i=1}^{k} r_0(A_{u_i})) \\ &= r_0(A_{S(X)}) = r_0(X), \end{aligned}$$

потому что для любых $u_1, \ldots, u_k \in S(X)$, $u_i \neq u_j$ при $i \neq j$, имеем

$$r_0(A_{S(X) \setminus \{u_1,\ldots,u_k\}}) + \sum_{i=1}^{k} r_0(A_{u_i}) \geqslant r(A_{S(X)}),$$

так как сумма рангов попарно непересекающихся множеств всегда не меньше ранга их объединения.

Докажем пункт (1) в заключении теоремы. Пусть $X, Y \subset A_{\{1,\dots,N\}}$. Нам нужно доказать, что

$$r(X) + r(Y) \geqslant r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

Поскольку входящие в это неравентство ранги определяются как минимумы из некоторого набора выражений, нам нужно на самом деле доказать, что сумма любых выражений из минимумов в определении слагаемых в левой части не меньше, чем сумма каких-то выражений из минимумов в определении слагаемых в правой части этого неравенства.

Доказывать нужное нам утверждение будем индукцией по $\alpha + \beta$. База индукции ($\alpha = \beta = 0$) является простым следствием того, что r_0 — функция, удовлетворяющая условию на ранг (пункт 1) в условии теоремы). Пусть теперь у нас есть произвольные выражения из минимумов в определении слагаемых в левой части:

$$r_0(A_{S(X)\setminus\{x_1,\dots,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha+1} r_{x_i}(X \cap A_{x_i}) + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}),$$

где x_i попарно различны и y_j тоже. Определим множество X' формулой

$$X' = \bigcup_{i \in S(X)\setminus\{x_{\alpha+1}\}} (X \cap A_i).$$

По индукционному предположению для X' и Y имеем

$$\begin{aligned} &r_0(A_{S(X')\setminus\{x_1,\dots,x_\alpha\}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\alpha} r_{x_i}(X \cap A_{x_i}) + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) \\ &\qquad \geqslant r_0(A_{S(X'\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X' \cup Y) \cap A_{z_p}) \\ &\qquad\quad + r_0(A_{S(X'\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X' \cap Y) \cap A_{t_q}). \end{aligned}$$

.

Рассмотрим несколько случаев:

(I) $x_{\alpha+1} \notin S(Y)$. Тогда $S(X' \cup Y) = S(X \cup Y) \setminus \{x_{\alpha+1}\}$, $(X' \cup Y) \cap A_{z_p} = (X \cup Y) \cap A_{z_p}$, $z_p \neq x_{\alpha+1}$ $(x_{\alpha+1} \notin S(X' \cup Y))$, $(X \cup Y) \cap A_{x_{\alpha+1}} = X \cap A_{x_{\alpha+1}}$, $X' \cap Y = X \cap Y$, $t_q \neq x_{\alpha+1}$ $(x_{\alpha+1} \notin S(X \cap Y))$.

В итоге имеем:

$$
\begin{aligned}
&r_0(A_{S(X)\setminus\{x_1,\dots,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha+1} r_{x_i}(X \cap A_{x_i}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) \\
&= r_0(A_{S(X')\setminus\{x_1,\dots,x_\alpha\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha} r_{x_i}(X' \cap A_{x_i}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&\geqslant r_0(A_{S(X'\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X' \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(X'\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X' \cap Y) \cap A_{t_q}) \\
&\qquad + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&= r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X \cap Y) \cap A_{t_q}) \\
&\qquad + r_{x_{\alpha+1}}((X \cup Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать (достаточно положить $z_{\gamma+1} = x_{\alpha+1}$).

(II) $x_{\alpha+1} \in S(Y)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
S(X' \cup Y) &= S(X \cup Y) \\
S(X' \cap Y) &= S(X \cap Y) \setminus \{x_{\alpha+1}\};
\end{aligned}
$$

рассмотрим еще два случая:

(а) $x_{\alpha+1} \notin \{z_1, \ldots, z_\gamma\}$. Тогда

$$(X' \cap Y) \cap A_{z_p} = (X \cap Y) \cap A_{z_p},$$
$$r_{x_{\alpha+1}}((X \cap Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}) \leqslant r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}),$$
$$t_q \neq x_{\alpha+1} \quad (x_{\alpha+1} \notin S(X' \cap Y)).$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
r_0(A_{S(X)\setminus\{x_1,\ldots,x_{\alpha+1}\}}) &+ \sum_{i=1}^{\alpha+1} r_{x_i}(X \cap A_{x_i}) \\
&+ r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\ldots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) \\
&= r_0(A_{S(X')\setminus\{x_1,\ldots,x_\alpha\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha} r_{x_i}(X' \cap A_{x_i}) \\
&+ r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\ldots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&\geqslant r_0(A_{S(X'\cup Y)\setminus\{z_1,\ldots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X' \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&+ r_0(A_{S(X'\cap Y)\setminus\{t_1,\ldots,t_\delta\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X' \cap Y) \cap A_{t_q}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&\geqslant r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\ldots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&+ r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\ldots,t_\delta,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X \cap Y) \cap A_{t_q}) \\
&+ r_{x_{\alpha+1}}((X \cap Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать (достаточно положить $t_{\delta+1} = x_{\alpha+1}$).

(б) $x_{\alpha+1} \in \{z_1, \ldots, z_\gamma\}$. Для определенности будем считать $x_{\alpha+1} = z_\gamma$. Тогда

$$(X' \cap Y) \cap A_{z_p} = (X \cap Y) \cap A_{z_p}, \quad \text{при } p < \gamma,$$

и

$$r_{x_{\alpha+1}}((X' \cup Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= r_{x_{\alpha+1}}(Y \cap A_{x_{\alpha+1}}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&\geqslant r_{x_{\alpha+1}}((X \cup Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}) + r_{x_{\alpha+1}}((X \cap Y) \cap A_{x_{\alpha+1}}), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad t_q \neq x_{\alpha+1} \quad (x_{\alpha+1} \notin S(X' \cap Y)).
\end{aligned}
$$

В итоге имеем:

$$
\begin{aligned}
&r_0(A_{S(X)\setminus\{x_1,\dots,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha+1} r_{x_i}(X \cap A_{x_i}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) \\
&= r_0(A_{S(X')\setminus\{x_1,\dots,x_\alpha\}}) + \sum_{i=1}^{\alpha} r_{x_i}(X' \cap A_{x_i}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\beta\}}) + \sum_{j=1}^{\beta} r_{y_j}(Y \cap A_{y_j}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&\geqslant r_0(A_{S(X'\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X' \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(X'\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X' \cap Y) \cap A_{t_q}) \\
&\qquad + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&= r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma-1} r_{z_p}((X \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X \cap Y) \cap A_{t_q}) \\
&\qquad + r_{z_\gamma}((X' \cup Y) \cap A_{z_\gamma}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
&= r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma-1} r_{z_p}((X \cup Y) \cap A_{z_p}) \\
&\qquad + r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X \cap Y) \cap A_{t_q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ r_{x_{\alpha+1}}(Y \cap A_{x_{\alpha+1}}) + r_{x_{\alpha+1}}(X \cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
\geqslant{}& r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma-1} r_{z_p}((X\cup Y)\cap A_{z_p}) \\
&+ r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X\cap Y)\cap A_{t_q}) \\
&+ r_{x_{\alpha+1}}((X\cup Y)\cap A_{x_{\alpha+1}}) + r_{x_{\alpha+1}}((X\cap Y)\cap A_{x_{\alpha+1}}) \\
={}& r_0(A_{S(X\cup Y)\setminus\{z_1,\dots,z_\gamma\}}) + \sum_{p=1}^{\gamma} r_{z_p}((X\cup Y)\cap A_{z_p}) \\
&+ r_0(A_{S(X\cap Y)\setminus\{t_1,\dots,t_\delta,x_{\alpha+1}\}}) + \sum_{q=1}^{\delta} r_{t_q}((X\cap Y)\cap A_{t_q}) \\
&+ r_{x_{\alpha+1}}((X\cap Y)\cap A_{x_{\alpha+1}}),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать (достаточно положить $t_{\delta+1} = x_{\alpha+1}$).

Наконец, докажем монотонность новой функции. Пусть

$$X \subset Y \subset A_{\{1,\dots,N\}}.$$

Нам нужно доказать, что любое выражение из минимума для Y не меньше, чем какое-то выражение из минимума для X.

$$r_0(A_{S(Y)\setminus\{y_1,\dots,y_\alpha\}}) + \sum_{j=1}^{\alpha} r_{y_j}(Y\cap A_{y_j}) \geqslant r_0(A_{S(X)\setminus M_X}) + \sum_{i\in M_X} r_{y_i}(X\cap A_{y_i}),$$

где $M_X = \{y_1,\dots,y_\alpha\}\cap X$, что и требовалось доказать. □

Литература

1. Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, А. А. Смирнов, *О возможных значениях размерностей пересечений подпространств для пяти прямых слагаемых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 189–197.

Lebedinskaya N. A., Lebedinskii D. M., Smirnov A. A. A generalization of the theorem on forming a matroid from parts.

A generalization of the theorem on forming a matroid from parts is proved, i.e., given a finite set subdivided into some blocks, each of which is supplied with a matroid structure, and assuming that the ranks of every union of certain blocks are prescribed in such a way that the conditions

on the rank function of a matroid are fulfilled, one can extend the rank function to all the subsets of the original set in such a way that the latter becomes a matroid.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: n.lebedinskaya@spbu.ru
E-mail: d.lebedinsky@spbu.ru

Военно-космическая академия
имени А. Ф. Можайского
ул. Ждановская, 13
197198, С.-Петербург, Россия
E-mail: alexandr.alexandrovich.smirnov@gmail.com

Поступило 11 октября 2017 г.