Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Л. Ю. Колотилина

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ СТАРШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЙ БЛОЧНО ЛЕНТОЧНОЙ МАТРИЦЫ

Целью настоящей заметки является улучшение известных верхних оценок для старшего собственного значения эрмитовой положительно определенной (или полуопределенной) блочно ленточной матрицы. Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $n \geqslant 1$, – положительно определенная блочная $n \times n$ матрица. Предположим, что A – блочно ленточная матрица с блочной полушириной ленты p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, так что

$$A_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad |i-j| > p. \tag{1}$$

Предположим также, что диагональные блоки A являются единичными матрицами:

$$A_{ii} = I_{n_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Оказывается, что в указанных выше предположениях старшее собственное значение матрицы A, которое мы обозначаем через $\lambda_{\max}(A)$, можно оценить сверху в терминах единственного параметра p. Действительно, в работе [1] было показано, что

$$\lambda_{\max}(A) < 2^p, \tag{3}$$

а в работе [4] была установлена верхняя оценка

$$\lambda_{\max}(A) < 2p + 1. \tag{4}$$

Ясно, что, при $p \geqslant 3$ линейная оценка (4) более точна, чем оценка (3). С другой стороны, при $p = 1$, т.е. в случае блочно трехдиагональных матриц, экспоненциальная оценка (3) дает наилучший возможный результат

$$\lambda_{\max}(A) < 2. \tag{5}$$

Ключевые слова: эрмитова положительно полуопределенная матрица, блочная матрица, блочная полуширина ленты, старшее собственное значение, верхняя оценка.

Оценка (5) известна уже долгое время (см., например, монографию [5]) и означает, что для блочно трехдиагональной эрмитовой положительно определенной матрицы A расщепление с помощью блочного метода Якоби является сходящимся.

В работе [3] было получено обобщение неравенства (5) на случай эрмитовых положительно полуопределенных блочно трехдиагональных матриц, которые не обязаны быть отмасштабированы по блочному Якоби, т.е. могут не удовлетворять условию (2). В этом общем случае справедлива следующая оценка [3]:

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant \max_{i\ odd} \lambda_{\max}(A_{ii}) + \max_{i\ even} \lambda_{\max}(A_{ii}). \tag{6}$$

Ясно, что в случае отмасштабированных по блочному Якоби блочно трехдиагональных матриц оценка (6) при $n \geqslant 2$ сводится к оценке

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant 2. \tag{7}$$

Как будет показано ниже, оценку (7), соответствующую случаю $p = 1$, можно обобщить на случай произвольного p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. А именно, для отмасштабированной по блочному Якоби положительно полуопределенной блочно ленточной матрицы A с блочной полушириной ленты p имеет место неравенство

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant p + 1, \tag{8}$$

причем если матрица A положительно определена, то последнее неравенство является строгим. Тем самым, мы подтверждаем высказанное в работе [4] предположение о том, что оценку (4) можно улучшить. В действительности, оценка (8) одновременно улучшает обе известные ранее оценки (3) и (4). Заметим, что представленное ниже доказательство обобщает подход, ранее использованный в [3], со случая блочно трехдиагональных матриц на общий случай блочно ленточных матриц произвольной блочной полуширины ленты.

Главным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $n \geqslant 2$, *– блочно ленточная матрица блочной полуширины ленты* p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. *Если матрица* A *эрмитова и положительно полуопределена, то*

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{p+1} \max_{i \equiv k \pmod{p+1}} \lambda_{\max}(A_{ii}). \tag{9}$$

Кроме того, если матрица A положительно определена, то последнее неравенство является строгим.

Доказательство теоремы 1 будет базироваться на представленной ниже теореме 2, которая легко выводится из неравенствАроншайна [2] для упорядоченных в порядке невозрастания собственных значений

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{i+j-1}(A) \leqslant \lambda_i(A_{11}) + \lambda_j(A_{22}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_2,$$

справедливых для произвольной эрмитовой блочной 2×2 матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \dim A_{ii} = n_i, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

(Изящное доказательство неравенств (10) приводится в работе [7].)

Теорема 2 ([6]). *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$, $n \geqslant 1$, – эрмитова блочная матрица блочного порядка n. Тогда*

$$(n-1)\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\max}(A_{ii}). \tag{11}$$

Для положительно полуопределенной матрицы A из теоремы 2 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 2 *матрицы A положительно полуопределена, то*

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\max}(A_{ii}). \tag{12}$$

Кроме того, если A положительно определена, то последнее неравенство является строгим.

Замечание 1. Как немедленно вытекает из следствия 4.2 работы [6], неравенство (12) в действительности выполняется не только для положительно полуопределенных матриц, но также и для произвольной эрмитовой матрицы A такой, что сумма ее младших $n-1$ собственных значений неотрицательна, а если эта сумма положительна, то неравенство (12) строгое.

Теперь мы готовы к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Сперва мы рассмотрим случай $n \times n$ эрмитовой положительно полуопределенной ленточной матрицы $A = (a_{ij})$ со скалярными элементами, удовлетворяющей условию

$$a_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad |i - j| > p. \tag{13}$$

Докажем, что A перестановочно подобна блочной $(p+1)\times(p+1)$ матрице, диагональные блоки которой являются диагональными матрицами. С этой целью введем в рассмотрение следующие $p+1$ подмножеств индексного множества $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$:

$S_1 := \{i \in \langle n\rangle : \ i \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p+1)\}$,

$S_2 := \{i \in \langle n\rangle : \ i \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, p+1)\}$,

$\ldots$

$S_{p+1} := \{i \in \langle n\rangle : \ i \equiv p+1 \ (\mathrm{mod}\, p+1)\}$.

Ясно, что множества S_k, $k = 1, \ldots, p+1$, являются непустыми и непересекающимися, и мы имеем следующее разбиение множества индексов:

$$\langle n\rangle = \bigcup_{k=1}^{p+1} S_k. \tag{14}$$

Теперь мы симметрично переставим строки и столбцы матрицы A, собирая сперва строки и столбцы с индексами из множества S_1, затем строки и столбцы с индексами из множества S_2, и т.д. Внутри каждого из S_k строки и столбцы упорядочиваются в естественном порядке, хотя это несущественно.

В результате описанных перестановок строк и столбцов мы придем к некоторой матрице

$$B = PAP^T, \quad B = (b_{ij}) = (a_{\pi(i),\pi(j)}),$$

где π – соответствующая перестановка на множестве $\langle n\rangle$, а P – матрица перестановки π. Разбиению (14) множества индексов отвечает соответствующее блочное представление матрицы B в виде блочной $(p+1)\times(p+1)$ матрицы

$$B = (B_{rs})_{r,s=1}^{p+1},$$

где

$$B_{rs} = (a_{ij})_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_s}}, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p+1.$$

Как несложно убедиться, диагональные блоки матрицы B являются диагональными матрицами. Действительно, если $i, j \in S_k$ и $i \neq j$, то $i \equiv j \ (\mathrm{mod}\, p+1)$. Следовательно, $|i - j| \geqslant p+1$. В силу условия (13), отсюда следует, что $a_{ij} = 0$. Итак, диагональные блоки матрицы B имеют вид:

$$B_{kk} = \operatorname{diag}(a_{k,k}, a_{k+p+1,k+p+1}, \dots), \quad k = 1, \dots p+1,$$

а значит

$$\lambda_{\max}(B_{kk}) = \max_{i \equiv k \pmod{p+1}} \{a_{ii}\}.$$

Теперь, применяя следствие 1 к матрице B, мы получаем требуемое неравенство

$$\lambda_{\max}(A) = \lambda_{\max}(B) \leqslant \sum_{k=1}^{p+1} \max_{i \equiv k \pmod{p+1}} \{a_{ii}\},$$

причем если матрица A положительно определена, то это неравенство строгое.

Тем самым в точечном случае теорема доказана.

В том случае, когда A является блочной матрицей, доказательство проводится по той же схеме, но матрица B формируется в результате перестановок блочных строк и столбцов матрицы A. Ясно, что в этом случае B по-прежнему является блочной $(p+1) \times (p+1)$ матрицей, блоки которой состоят из исходных блоков матрицы A, а диагональные блоки B являются блочно диагональными матрицами вида

$$B_{kk} = \operatorname{Diag}(A_{k,k}, A_{k+p+1,k+p+1}, \dots), \quad k = 1, \dots p+1.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_{\max}(B_{kk}) = \max_{i \equiv k \pmod{p+1}} \{A_{ii}\}.$$

Теорема 1 доказана полностью. □

Для матриц с единичными диагональными блоками из теоремы 1 мы немедленно получаем заявленную оценку (8).

Следствие 2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова блочно ленточная матрица блочной полуширины ленты p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, и пусть*

$$A_{ii} = I_{n_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если матрица A положительно полуопределена, то

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant p+1,$$

а если A является положительно определенной, то последнее неравенство строгое.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые оценки собственных значений симметричных матриц, отмасштабированных с помощью блочного Якоби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **202** (1992), 18–25.
2. N. Aronszajn, *Rayleigh–Ritz and A. Weinstein mwthods for approximation of eigenvalues. I. Operators in a Hilbert space.* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 474–480.
3. O. Axelsson, L. Yu. Kolotilina, *Block matrix generalizations of some eigenvalue bounds involving traces for symmetric matrices.* — Report 9423, May 1994, Dept. of Math., Univ. of Nijmegen, Nijmegen, The Nethrlands, 1994.
4. Yuyan Ge, Minghua Lin, *A note on the extreme eigenvalues of scaled block positive definite matrices.* — Submitted to Math. Notes (2017).
5. L. A. Hageman, D. M. Young, *Applied Iterative Methods*, New York, 1981.
6. L. Yu. Kolotilina, *Eigenvalue bounds and inequalities using vector aggregation of matrices.* — Linear Algebra Appl. **271** (1998), 139–167.
7. R. C. Thompson, S. Therianos, *Inequalities connecting the eigenvalues of a hermitian matrix with the eigenvalues of complementary principal submatrices.* — Bull. Austral. Math. Soc. **6** (1972), 117–132.

Kolotilina L. Yu. An upper bound for the largest eigenvalue of a positive semidefinite block banded matrix.

The new upper bound

$$\lambda_{\max}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{p+1} \max_{i \equiv k \pmod{p+1}} \lambda_{\max}(A_{ii})$$

for the largest eigenvalue of a Hermitian positive semidefinite block banded matrix $A = (A_{ij})$ of block semibandwidth p is suggested. In the special case where the diagonal blocks of A are identity matrices, the latter bound reduces to the bound $\lambda_{\max}(A) \leqslant p+1$, depending on p only, which improves the bounds established for such matrices earlier and extends the bound $\lambda_{\max}(A) \leqslant 2$, old known for $p = 1$, i.e., for block tridiagonal matrices, to the general case $p \geqslant 1$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 25 октября 2017 г.

E-mail: lilikona@mail.ru