Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫВОДУ ВЕРХНИХ ОЦЕНОК ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФОВ

§1. Введение и предварительные сведения

В работе рассматриваются верхние оценки для спектрального радиуса взвешенных графов и орграфов (ориентированных графов).

Взвешенные графы с положительно определенными весовыми матрицами были определены в работе [6], в которой была получена верхняя оценка для спектрального радиуса таких графов. Напомним некоторые необходимые определения и факты.

Пусть $G = (V, E)$ – простой граф на множестве вершин

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad n \geqslant 2,$$

не имеющий ни петель, ни кратных ребер, а E – это множество ребер, состоящее из некоторого подмножества неупорядоченных пар различных вершин $v_i \neq v_j$ из V. Тот факт, что вершины v_i и v_j являются смежными, т.е. $(v_i, v_j) \in E$, мы обозначаем символом $i \sim j$. Матрица смежности $A_G = (a_{ij})$ графа G определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \sim j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если к каждому ребру графа G приписана некоторая квадратная симметричная (или эрмитова) положительно определенная (или полуопределенная) матрица W_{ij} порядка p, $p \geqslant 1$, причем выполнено условие

$$W_{ij} = W_{ji} \quad \text{для всех} \quad i \sim j, \tag{1.1}$$

то граф G называется взвешенным; мы обозначаем его через G^W. Матрица смежности взвешенного графа G^W – это блочная $n \times n$ матрица

Ключевые слова: взвешенный орграф, матрица смежности, спектральный радиус, лемма Виландта, блочная матрица, неотрицательная матрица, перроновский корень, верхняя оценка.

$A_{G^W} = (A_{ij})$, состоящая из $p \times p$ эрмитовых (или, в частности, симметричных) блоков

$$A_{ij} = \begin{cases} W_{ij}, & \text{если} \quad i \sim j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Таким образом, блочная структура разреженности матрицы A_{G^W} определяется множеством ребер E, а ее ненулевые блоки – это весовые матрицы. Легко понять, что из условия (1.1) вытекает, что матрица смежности A_{G^W} является эрмитовой (или симметричной), если все весовые матрицы W_{ij} являются эрмитовыми (или симметричными). Действительно, при $i \sim j$ мы имеем

$$W_{ij}^* = W_{ij} = W_{ji} \quad \text{или} \quad W_{ij}^T = W_{ij} = W_{ji}.$$

Следовательно, все собственные значения матрицы A_{G^W} вещественны. В случае, когда $p = 1$, мы приходим к тому частному случаю, когда все веса являются положительными числами. Если же все они равны 1, то мы имеем обычный граф G.

Собственные значения взвешенного графа G^W определяются как собственные значения матрицы A_{G^W}, а его спектральный радиус определяется как спектральный радиус A_{G^W}, т.е.

$$\rho(G^W) = \max_{1 \leqslant i \leqslant pn} \{|\lambda_i(A_{G^W})|\}.$$

Заметим, что в случае $p = 1$, когда все веса являются положительными числами, матрица смежности неотрицательна, так что (см., например, [3, Theorem 2.1.1]) ее спектральный радиус совпадает с наибольшим собственным значением $\rho(A_{G^W})$, которое называется перроновским корнем матрицы A_{G^W}.

Также мы будем рассматривать взвешенные орграфы, не имеющие петель и кратных дуг. Орграф $D = (V, E)$ определяется своим множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеством дуг E, которое есть подмножество множества упорядоченных пар вершин (v_i, v_j), $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Тот факт, что из вершины v_i идет дуга в вершину v_j, т.е. $(v_i, v_j) \in E$, обозначается как $i \to j$.

Взвешенные орграфы D^W, подобно взвешенным графам, определяются посредством приписывания $p \times p$ весовых матриц W_{ij} ко всем дугам $i \to j$. В случае орграфов, весовые матрицы W_{ij} также являются эрмитовыми (или симметричными) и положительно определенными (или полуопределенными). Однако условия $W_{ij} = W_{ji}$ в этом случае не накладываются, поскольку граф является ориентированным.

Матрица смежности $A_{D^W} = (A_{ij})$ взвешенного орграфа D^W определяется следующими условиями:

$$A_{ij} = \begin{cases} W_{ij}, & \text{если} \quad i \to j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Собственные значения матрицы A_{D^W} называются собственными значениями орграфа D^W, а спектральный радиус A_{D^W} называется спектральным радиусом D^W.

Заметим, что хотя все блоки A_{ij} матрицы смежности A_{D^W} эрмитовы, сама матрица, вообще говоря, эрмитовой не является, а значит ее собственные значения, в общем случае, комплексны.

В точечном случае $p = 1$, все веса – положительные числа, и матрица A_{D^W} неотрицательна. Следовательно, в данном случае, как и в случае взвешенных неориентированных графов, спектральный радиус $\rho(D^W)$ совпадает с перроновским корнем матрицы смежности A_{D^W}, который является ее наибольшим по модулю собственным значением.

В настоящей работе описывается общий подход к выводу верхних оценок для спектральных радиусов взвешенных графов и орграфов. Предлагаемый подход опирается, во-первых, на обобщенную лемму Виландта в ее частном случае, а также на имеющиеся верхние оценки для спектрального радиуса (перроновского корня) неотрицательной матрицы.

Статья построена следующим образом. В §2 мы напоминаем формулировку обобщенной леммы Виландта, обобщающей классическую лемму Виландта на случай блочных матриц с произвольными прямоугольными комплексными блоками, а также устанавливаем ее частный случай, соответствующий блочным матрицам, все блоки которых являются квадратными эрмитовыми положительно полуопределнными матрицами одного и того же порядка. В следующем §3 представлены некоторые известные верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы и, в частности, некоторые оценки, зависящие от структуры разреженности матрицы, т.е. от ассоциированного с матрицей графа или орграфа. Наш выбор представленных в этом параграфе оценок объясняется, главным образом, встречающимися в литературе верхними оценками для спектральных радиусов взвешенных графов и орграфов.

Наконец, в §4, используя совместно результаты §§2 и 3, мы получаем верхние оценки для спектральных радиусов взвешенных графов и орграфов, уделяя при этом отдельное внимание описанию случаев равенства. Также мы проясняем соотношение полученных оценок с ранее известными результатами, опубликованными в [2, 5, 6, 16, 17, 18, 19].

В заключение этот вводного параграфа мы приводим некоторые обозначения, используемые в статье.

- $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$.
- Для матрицы A порядка n через $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$ обозначаются n собственных значений A, а через
$$\rho(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A)|$$
– спектральный радиус A.
- Собственные значения, в общем случае, упорядочены в порядке невозрастания их модулей, т.е.
$$\rho(A) = |\lambda_1(A)| \geqslant |\lambda_2(A)| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n(A)|. \tag{1.4}$$
Заметим, что в том случае, когда матрица A является положительно полуопределенной, (1.4) сводится к
$$\rho(A) = \lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A). \tag{1.5}$$
- Для матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ через $\|A\|$ обозначается спектральная норма A, так что $\|A\| = [\rho(AA^*)]^{1/2}$.
- Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{и} \quad r_i'(A) = r_i(A) - |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$
– это соответственно абсолютные строчные суммы и усеченные абсолютные строчные суммы A; $c_i(A) = r_i(A^T)$ и $c_i'(A) = c_i(A) - |a_{ii}|$, $i = 1, \dots, n$, – абсолютные столбцовые суммы и усеченные абсолютные столбцовые суммы матрицы A.
- $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ – диагональная матрица с диагональными элементами $d_1, \dots, d_n$.
- $e = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.

§2. Обобщенная лемма Виландта для взвешенных орграфов

Для начала, напомним лемму Виландта в ее классическом варианте [20] (также см. [3, Theorem 2.2.14]).

Лемма 2.1 (Лемма Виландта). *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *и неотрицательная матрица* $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *связаны покомпонентным соотношением*

$$|A| \leqslant P. \tag{2.1}$$

Тогда каждое собственное значение λ *матрицы* A *удовлетворяет неравенству*

$$|\lambda| \leqslant \rho(P), \tag{2.2}$$

где $\rho(P)$ *– спектральный радиус матрицы* P*, т.е. ее перроновский корень.*

Кроме того, если матрица P *неприводима, то равенство в* (2.2) *имеет место тогда и только тогда, когда существует унитарная диагональная матрица* D*, такая что*

$$D^* A D = \varepsilon P,$$

где $\varepsilon = \lambda / \rho(P)$.

Блочный аналог леммы Виландта, из которого очевидным образом вытекает точечная версия, может быть сформулирована следующим образом.

Лемма 2.2 (Обобщенная лемма Виландта [9]). *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, *– блочная* $n \times n$ *матрица с квадратными диагональными блоками* A_{ii} *порядков* $n_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, *и пусть*

$$\|A_{ij}\| \leqslant p_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Тогда каждое собственное значение λ *матрицы* A *удовлетворяет неравенству*

$$|\lambda| \leqslant \rho(P), \tag{2.4}$$

где $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Кроме того, если матрица P *неприводима, то равенство в* (2.4) *имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

(i)

$$p_{ij} = \|A_{ij}\|, \qquad i, j = 1, \ldots, n; \tag{2.5}$$

(ii) *существуют ненулевые векторы* $y_i \in \mathbb{C}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, n$, *такие что*

$$\frac{y_i^* A_{ij} y_j}{\|y_i\| \, \|y_j\|} = \varepsilon \|A_{ij}\|, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

где $\varepsilon = \lambda / \rho(P)$.

Замечание 2.1. Тот факт, что из условий (2.3) следует неравенство (2.4), является давно известным и имеет место не только для случая спектральной нормы, но также и в общем случае $\|A_{ij}\|_{ij} \leqslant p_{ij}$ произвольных операторных норм (см., например, [13, Theorem 4], [14, Théorème 2] и [15, Théorème 2]). Относительно новой частью обобщенной леммы Виландта являются установленные в работе [9] необходимые и достаточные условия, при которых справедливо равенство

$$\rho(A) = \rho(P).$$

В обобщенной лемме Виландта блоки A_{ij} могут быть произвольными комплексными прямоугольными матрицами. Однако в том случае, который представляет интерес для данной работы, все блоки являются квадратными матрицами одного и того же порядка p. Более того, они либо эрмитовы и положительно (полу)определенные, либо нулевые, так что

$$\|A_{ij}\| = \rho(A_{ij}) = \lambda_1(A_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

В рассматриваемом частном случае, обобщенная лемма Виландта сводится к следующему утверждению, на котором базируется данная статья.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{pn\times pn}$, $n \geqslant 2$, $p \geqslant 1$, – блочная $n\times n$ матрица с квадратными блоками порядка p. Предположим, что все матрицы A_{ij} являются эрмитовыми и положительно полуопределенными. Определим неотрицательную матрицу*

$$N(A) = (\rho(A_{ij})) \tag{2.7}$$

порядка n. Тогда

$$\rho(A) \leqslant \rho(N(A)). \tag{2.8}$$

Кроме того, если матрица $N(A)$ является неприводимой, то равенство в (2.8) *имеет место тогда и только тогда, когда все блоки A_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, имеют общий собственный вектор, ассоциированный с их наибольшими собственными значениями, т.е. найдется вектор $x \in \mathbb{C}^p$, $x \neq 0$, такой что*

$$A_{ij}x = \lambda_1(A_{ij})x, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{2.9}$$

Доказательство. Неравенство (2.8) тривиально следует из обобщенной леммы Виландта. Следовательно, требуется лишь показать, что

(2.9) – это необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство
$$\rho(A) = \rho(N(A)). \tag{2.10}$$
Поскольку в рассматриваемом случае условия (2.5), очевидно, выполняются, нам остается только показать, что условия (2.6) равносильны условиям (2.9).

Действительно, равенства (2.6), в которых $y_1 = \cdots = y_n = x$ и $\varepsilon = 1$, немедленно следуют из (2.9). Обратно, в силу неравенства Коши–Шварца, соотношения
$$\frac{|y_i^* A_{ij} y_j|}{\|y_i\|\|y_j\|} = \lambda_1(A_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$
вытекающие из (2.6), справедливы для эрмитовых положительно полуопределенных матриц A_{ij} в том и только том случае, когда
$$A_{ij} y_j = \lambda_1(A_{ij}) y_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$
и при всех $i \neq j$
$$y_i = \xi^{ij} y_j,$$
где $\xi^{ij} \in \mathbb{C}$. Значит, все векторы $y_1, \ldots, y_n$ коллинеарны вектору $x \neq 0$, для которого выполняется (2.9). □

§3. Некоторые верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы

В этом параграфе мы напоминаем некоторые известные верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы. Начнем с оценок типа Фробениуса, в которых структура разреженности матрицы не используется. Для полноты изложения мы сопровождаем верхние оценки соответствующими нижними оценками, если таковые имеют место, хотя в данной работе нижние оценки не используются.

Теорема 3.1 (Фробениус [8]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда*
$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A). \tag{3.1}$$

Кроме того, если матрица A является неприводимой, то любое из неравенств в (3.1) *является равенством тогда и только тогда, когда*
$$r_1(A) = \cdots = r_n(A). \tag{3.2}$$

Применяя оценки Фробениуса к диагонально сопряженной матрице, мы приходим к следующему обобщению теоремы 3.1.

Следствие 3.1 (см., например, [1, Следствие 3.1]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D – произвольная диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD). \tag{3.3}$$

Кроме того, если матрица A является неприводимой, то любое из неравенств в (3.3) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$r_1(D^{-1}AD) = \cdots = r_n(D^{-1}AD). \tag{3.4}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая хорошо известная техническая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть a_i, $i = 1,\dots,n$, $n \geqslant 1$, – вещественные числа и пусть b_i, $i = 1,\dots,n$, – положительные числа. Тогда*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{a_i}{b_i},$$

причем каждое из этих неравенств является равенством тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Заметим, что в теореме 3.1 неприводимость матрицы A требуется лишь для того, чтобы обеспечить существование у A положительных (правого и левого) перроновских векторов. Действительно, пусть, v – положительный вектор, такой что $v^TA = \rho(A)v^T$. В этом случае, мы имеем

$$v^TAe = \rho(A)\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i r_i(A),$$

так что, по лемме 3.1,

$$\rho(A) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i r_i(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{v_i r_i(A)}{v_i} = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A) \tag{3.5}$$

и, аналогично,

$$\rho(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i r_i(A)}{\sum_{i=1}^{n} v_i} \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \frac{v_i r_i(A)}{v_i} = \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A), \tag{3.6}$$

причем равенства в (3.5) и (3.6) имеют место тогда и только тогда, когда

$$r_1(A) = \dots = r_n(A).$$

Поскольку для неприводимой матрицы A ее степени A^s, $s \geqslant 1$, имеют тот же положительный перроновский вектор, что и A (хотя степени матрицы A не обязаны быть неприводимыми матрицами), мы аналогичным образом получаем, что для каждого $s \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^s) \leqslant \rho(A)^s \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^s), \tag{3.7}$$

причем любое из неравенств в (3.7) является равенством тогда и только тогда, когда все строчные суммы матрицы A^s равны.

Итак, теорему 3.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда при всех $s \geqslant 1$ справедливы двусторонние оценки* (3.7).

Кроме того, если матрица A неприводима, то в (3.7) *любое из неравенств является равенством тогда и только тогда, когда*

$$r_1(A^s) = \dots = r_n(A^s). \tag{3.8}$$

Используя диагональное сопряжение, из теоремы 3.2 мы легко получаем следующее обобщение следствия 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D – произвольная диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда при любом $s \geqslant 1$ имеют место неравенства*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^sD) \leqslant \rho(A)^s \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^sD). \tag{3.9}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то в (3.9) *любое из неравенств является равенством тогда и только тогда, когда*

$$r_1(D^{-1}A^sD) = \dots = r_n(D^{-1}A^sD). \tag{3.10}$$

Полагая $D = \operatorname{diag}(r_1(A^k), \dots, r_n(A^k))$, $k \geqslant 0$, и применяя следствие 3.2, мы приходим к следующим двусторонним оценкам, установленным Лю [10]. Заметим, что в работе [10] случай равенства не рассматривается.

Следствие 3.3 ([10], также см. [1, следствие 4.2]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда при всех $k \geqslant 0$ и $s \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right\}^{1/s} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right\}^{1/s}. \tag{3.11}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то в (3.11) *любое из неравенств является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r_1(A^{k+s})}{r_1(A^k)} = \dots = \frac{r_n(A^{k+s})}{r_n(A^k)}. \tag{3.12}$$

В частности, при $k = s = 1$ оценки (3.11) сводятся к оценкам Минка [11, Theorem II.1.2]

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^2)}{r_i(A)} \right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^2)}{r_i(A)} \right\}. \tag{3.13}$$

Представляется достаточно удивительным, что условия равенства для оценок (3.7), (3.9), (3.11) и (3.13) в литературе, насколько известно автору, не встречаются.

В связи со следствием 3.3 уместно также упомянуть, что последовательности

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \min_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей, см. [10]. Отсюда следует, что в (3.11) можно перейти к пределам при $k \to \infty$.

В случае $s = 2$ неприводимые матрицы, удовлетворяющие условиям (3.8), могут быть охарактеризованы следующим образом.

Теорема 3.3. *Пусть A – неотрицательная неприводимая матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда ее квадрат A^2 имеет равные строчные суммы,*

$$r_1(A^2) = \dots = r_n(A^2), \tag{3.14}$$

тогда и только тогда, когда

- *либо*

$$r_1(A) = \cdots = r_n(A),$$

- *либо одновременно выполнены следующие условия:*

(i) $\langle n \rangle$ *является объединением двух непустых непересекающихся подмножеств,* $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$;

(ii) *если* $i, j \in S_1$ *или* $i, j \in S_2$, *то* $a_{ij} = 0$;

(iii) *если* $i, j \in S_1$ *или* $i, j \in S_2$, *то* $r_i(A) = r_j(A)$.

Доказательство. Достаточность устанавливается тривиальным образом.

Для того, чтобы доказать необходимость, предположим, что выполняются соотношения (3.14).

Если все строчные суммы матрицы A равны, то нам нечего доказывать. Поэтому предположим, что

$$r \equiv \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) < R \equiv \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A),$$

и определим множества индексов

$$S_1 = \{i \in \langle n \rangle : \ r_i(A) = r\} \quad \text{и} \quad S_2 = \{i \in \langle n \rangle : \ r_i(A) = R\}.$$

Тогда для всех $p \in S_1$ и $q \in S_2$ мы имеем

$$r_p(A^2) = \sum_{j:\ a_{pj} \neq 0} a_{pj} r_j(A) \leqslant R r_p(A) = Rr \tag{3.15}$$

и, аналогично,

$$r_q(A^2) = \sum_{j:\ a_{qj} \neq 0} a_{qj} r_j(A) \geqslant r r_q(A) = rR. \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.15) и (3.16), совместно с (3.14), следует, что

$$r_i(A^2) = rR, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Кроме того, из (3.15) и (3.16) также следует, что если $i, j \in S_k$, $k = 1, 2$, то $a_{ij} = 0$.

Итак, нам осталось показать, что

$$\langle n \rangle = S_1 \cup S_2.$$

Действительно, из (3.15)–(3.17) вытекает, что если $i \in S_1 \cup S_2$ и $a_{ij} \neq 0$, то $j \in S_1 \cup S_2$, т.е. либо $r_j(A) = r$, либо $r_j(A) = R$. Допустим, что $\langle n \rangle \neq S_1 \cup S_2$. Тогда при всех $k \notin S_1 \cup S_2$ мы имеем $a_{ik} = 0$ для всех $i \in S_1 \cup S_2$. Но это противоречит неприводимости матрицы A, так что $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$. Тем самым теорема 3.3 доказана. $\square$

Заметим, что теорема 3.3 обобщает на случай произвольных неприводимых неотрицательных матриц характеризацию связных графов, таких что строчные суммы квадратов их матриц смежности A_G^2 все равны, которая была установлена в работе [7]. В [7] было доказано, что такие графы являются либо регулярными, либо двудольными и полурегулярными.

В случае несимметричных неотрицательных матриц верхнюю оценку Фробениуса (3.1) можно обобщить в терминах строчных и столбцовых сумм следующим образом.

Теорема 3.4. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеет место неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{a_{ii} + r_i'(A)^\alpha \, c_i'(A)^{1-\alpha}\}, \tag{3.18}$$

из которого следует, что

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{r_i(A)^\alpha \, c_i(A)^{1-\alpha}\}. \tag{3.19}$$

Оценки (3.18) и (3.19) легко получаются (см., например, [1]) из следующего хорошо известного результата Островского [12]: при любом $\alpha \in [0, 1]$ каждое собственное значение $\lambda(A)$ произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, содержится в одном из кругов

$$|\lambda(A) - a_{ii}| \leqslant r_i'(A)^\alpha \, c_i'(A)^{1-\alpha}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Можно также упомянуть, что оценки (3.18) и (3.19) являются частными случаями более общих оценок, см. [1, следствие 4.2], которые позволяют "смешивать" не только строчные и столбцовые суммы матрицы A, но также и строчные и столбцовые суммы матриц, диагонально сопряженных с A.

Ниже мы напоминаем некоторые оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, зависящие от ее структуры разреженности. Начнем со следующих двусторонних оценок.

Теорема 3.5 ([1, следствие 5.1]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ имеют место двусторонние оценки*

$$\min_{i,j\colon a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j\colon a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\}. \tag{3.20}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то в (3.20) *любое из неравенств является равенством тогда и только тогда, когда*

• *либо*

$$r_1(A) = \cdots = r_n(A),$$

• *либо одновременно выполняются следующие условия*:

(i) $\alpha = 1/2$;

(ii) $\langle n\rangle$ *есть объединение двух непустых непересекающихся подмножеств:* $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$;

(iii) *если* $i, j \in S_1$ *или* $i, j \in S_2$, *то* $a_{ij} = 0$;

(iv) *если* $i, j \in S_1$ *или* $i, j \in S_2$, *то* $r_i(A) = r_j(A)$.

Здесь представляется уместным привести некоторые простые соотношения между оценками (3.7) для $s = 2$, т.е.

$$\min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ r_i(A^2) \right\}^{1/2} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \left\{ r_i(A^2) \right\}^{1/2}, \tag{3.21}$$

и оценками (3.20).

1. В том частном случае, когда $\alpha = 1/2$, оценки (3.21) по крайней мере столь же точны, как оценки (3.20), и последние следуют из них. Действительно, для любого $i \in \langle n\rangle$ мы имеем:

$$r_i(A^2) = (A^2 e)_i = \sum_{j\colon a_{ij}\neq 0} a_{ij} (Ae)_j = \sum_{j\colon a_{ij}\neq 0} a_{ij} r_j(A),$$

откуда следует, что

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^2) \geqslant \min_{i,j\colon a_{ij}\neq 0} \{ r_i(A)\, r_j(A) \}$$

и

$$\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^2) \leqslant \max_{i,j\colon a_{ij}\neq 0} \{ r_i(A)\, r_j(A) \}.$$

2. При любом $\alpha \in [0,1]$ обе оценки в (3.20) являются равенствами в том и только том случае, когда обе оценки в (3.21) являются равенствами. Это утверждение немедленно вытекает из теорем 3.3 и 3.5.

3. Оценки (3.20), в отличие от (3.21), явным образом учитывают структуру разреженности матрицы.

Следующий результат может быть получен применением теоремы 3.5 к диагонально сопряженной матрице $D^{-1}AD$, а приводимая ниже верхняя оценка является частным случаем гораздо более общей оценки, представленной в следствии 5.2 из работы [1].

Следствие 3.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D – произвольная диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Тогда при любом $\alpha \in [0,1]$ имеют место оценки*

$$\min_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(D^{-1}AD)^{\alpha}\, r_j(D^{-1}AD)^{1-\alpha} \right\} \leqslant \rho(A)$$
$$\leqslant \max_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(D^{-1}AD)^{\alpha}\, r_j(D^{-1}AD)^{1-\alpha} \right\}. \tag{3.22}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то неравенство в любой из частей (3.22) *является равенством тогда и только тогда, когда*

- *либо*

$$r_1(D^{-1}AD) = \cdots = r_n(D^{-1}AD),$$

- *либо одновременно выполняются условия* (i)–(iii) *теоремы* 3.5 *и условия*

$$r_i(D^{-1}AD) = r_j(D^{-1}AD) \quad \textit{для всех} \quad i,j \in S_k, \quad k = 1,2.$$

В завершение этого параграфа приведем следующие “смешанные” аналоги верхней оценки из (3.20), совпадающие с ней в том случае, когда $r_i(A) = c_i(A)$, $i = 1,\ldots,n$.

Теорема 3.6 ([1, следствие 5.5]). *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда при любом $\alpha \in [0,1]$ справедливы неравенства*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, c_j(A)^{1-\alpha} \right\} \tag{3.23}$$

и

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{ c_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\}. \tag{3.24}$$

§4. Верхние оценки для спектрального радиуса взвешенного орграфа

В этом параграфе приведены некоторые верхние оценки для спектрального радиуса взвешенного орграфа с положительно полуопределенными весовыми матрицами W_{ij}. Эти оценки устанавливаются посредством перехода от матрицы смежности A_{D^W} заданного взвешенного орграфа D^W к ассоциированной с ней матрице $N(A_{D^W})$, а затем применением некоторой известной верхней оценки для перроновского корня к неотрицательной матрице $N(A_{D^W})$. Ясно, что этот подход базируется на теореме 2.1. Заметим, что матрица $N(A_{D^W})$ может рассматриваться как матрица смежности орграфа D с положительными числовыми весами $p_{ij} = \rho(W_{ij})$. Как хорошо известно, матрица A_{D^W} является неприводимой тогда и только тогда, когда орграф D^W сильно связен.

Ниже мы устанавливаем результаты для взвешенных орграфов с матричными весами. Ясно, что получаемые оценки заведомо справедливы для неориентированных взвешенных графов с матричными весами, а так же и для орграфов, веса которых – положительные числа. В частности, они, разумеется, применимы и к обычным (невзвешенным) графам и орграфам.

Комбинируя теорему 2.1 с верхней оценкой Фробениуса, см. (3.1), мы приходим к следующему простейшему результату.

Теорема 4.1. *Пусть D^W – сильно связный взвешенный орграф на множестве из $n \geqslant 2$ вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами W_{ij}. Тогда*

$$\rho(D^W) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(N(A_{D^W})) = \max_{i\in\langle n\rangle} \sum_{j:\ i\to j} \rho(W_{ij}). \tag{4.1}$$

Кроме того, равенство в (4.1) *имеет место тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *все строчные суммы матрицы $N(A_{D^W}) = (\rho(W_{ij}))_{i,j=1}^n$ равны между собой:*

$$\sum_{j:\ 1\to j} \rho(W_{1j}) = \cdots = \sum_{j:\ n\to j} \rho(W_{nj}); \tag{4.2}$$

(ii) *для всех упорядоченных пар индексов* (i, j) *таких, что* $i \to j$, *весовые матрицы* W_{ij} *имеют общий собственный вектор* $x \neq 0$, *ассоциированный с их наибольшими собственными значениями, т.е.*

$$W_{ij}x = \rho(W_{ij})x. \tag{4.3}$$

Заметим, что в том случае, когда весами являются положительные числа или же орграф (граф) является невзвешенным, условие (ii) выполняется автоматически.

Замечание 4.1. Предположим, что условие (ii) теоремы 4.1 выполнено. Тогда, очевидно, мы имеем:

$$\rho\left(\sum_{j:\ i\to j} W_{ij}\right) = \sum_{j:\ i\to j} \rho(W_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, для неориентированного взвешенного графа G^W условие (i) теоремы 4.1 означает, что в терминологии, принятой в работах [4, 5, 6, 16, 17, 18, 19], граф G^W является *weight-regular*. В случае же орграфа D^W, следуя работе [2], можно сказать, что D^W является *outweight-regular*. (Мы приводим англоязычные оригиналы терминов, чтобы не вносить в них еще большую путаницу посредством перевода на русский язык.) В приводимых ниже формулировках результатов, чтобы избежать путаницы, связанной с использованием не слишком ясной терминологии вроде *weight-regular* или *outweight-pseudo-regular* в применении к графам и орграфам, мы просто указываем соответствующие условия на строчные суммы в явном виде.

Полагая

$$D = \operatorname{diag}(r_1(N(A_{D^W})), \ldots, r_n(N(A_{D^W}))) \tag{4.4}$$

и применяя следствие 3.1 к матрице $N(A_{D^W})$, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.2. *Пусть* D^W – *сильно связный взвешенный орграф на множестве из* $n \geqslant 2$ *вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами* W_{ij}. *Тогда справедлива верхняя оценка*

$$\rho(D^W) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}N(A_{D^W})D) = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{r_i(N^2(A_{D^W}))}{r_i(N(A_{D^W}))}$$

$$= \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\sum\limits_{j:\ i\to j}\left[\rho(W_{ij}) \sum\limits_{k:\ j\to k}\rho(W_{jk})\right]}{\sum\limits_{j:\ i\to j}\rho(W_{ij})}, \tag{4.5}$$

где матрица D определена в (4.4).

Кроме того, равенство в (4.5) *имеет место тогда и только тогда, когда все строчные суммы матрицы $D^{-1}N(A_{D^W})D$ равны между собой, т.е.*

$$\frac{r_1(N^2(A_{D^W}))}{r_1(N(A_{D^W}))} = \cdots = \frac{r_n(N^2(A_{D^W}))}{r_n(N(A_{D^W}))}, \tag{4.6}$$

и выполнено условие (ii) *теоремы* 4.1.

Если же вместо (4.4) мы определим диагональную матрицу $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ с помощью соотношений

$$d_i := \rho\left(\sum_{j:\ i\to j} W_{ij}\right) \leqslant \sum_{j:\ i\to j}\rho(W_{ij}) = r_i(N(A_{D^W})), \tag{4.7}$$

то, снова применяя теорему 2.1 и следствие 3.1, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. *Пусть D^W – сильно связный взвешенный орграф на множестве из $n \geqslant 2$ вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами W_{ij}. Тогда*

$$\rho(D^W) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\sum\limits_{j:\ i\to j}\left[\rho(W_{ij})\ \rho\left(\sum\limits_{k:\ j\to k} W_{jk}\right)\right]}{\rho\left(\sum\limits_{j:\ i\to j} W_{ij}\right)}. \tag{4.8}$$

Кроме того, равенство в (4.8) *имеет место тогда и только тогда, когда все строчные суммы матрицы $D^{-1}N(A_{D^W})D$ равны между собой, т.е.*

$$\frac{\sum\limits_{j:\ 1\to j}\left[\rho(W_{1j})\ \rho\left(\sum\limits_{k:\ j\to k} W_{jk}\right)\right]}{\rho\left(\sum\limits_{j:\ 1\to j} W_{1j}\right)} = \cdots = \frac{\sum_{j:\ n\to j}\left[\rho(W_{nj})\ \rho\left(\sum\limits_{k:\ j\to k} W_{jk}\right)\right]}{\rho\left(\sum\limits_{j:\ n\to j} W_{nj}\right)}, \tag{4.9}$$

и выполнено условие (ii) *теоремы* 4.1.

Заметим, что оценки теорем 4.1 и 4.2 выражаются в терминах строчных сумм матриц $N(A_{D^W})$ и $N^2(A_{D^W})$, а оценки теоремы 4.3 формулируются в терминах спектрального радиуса блочных строчных сумм $W_i := \sum_{j:\ i\to j} W_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, которые, очевидно, являются положительно (полу)определенными. В случае неориентированного взвешенного графа, теорема 4.3 сводится к следствию 2.6 из работы [19].

По нашему мнению, в контексте применения верхних оценок к матрице $N(A_{D^W})$ представляется более естественным использовать диагональную матрицу D, определенную в (4.4), а не матрицу (4.7), поскольку последняя определяется на основе матрицы смежности A_{D^W}, а не матрицы $N(A_{D^W})$, к которой применяется оценка. Тем не менее, для того, чтобы покрыть результаты, имеющиеся в литературе, мы рассматриваем обе диагональные матрицы (4.4) и (4.7). Здесь будет уместно упомянуть, что если условие (ii) теоремы 4.1 (которое необходимо для того, чтобы все представленные в этом параграфе оценки являлись равенствами) выполнено, то диагональные матрицы (4.4) и (4.7), очевидно, совпадают.

Используя теорему 3.2 при $s = 2$ и теорему 3.3, мы получаем следующий результат, установленный в [2, Theorem 2.4] и обобщающий теорему 4.1 из работы [5] со случая взвешенных графов с матричными весами на случай взвешенных орграфов. Отметим, что в работе [2] в условиях равенства не указано, что орграф обязан быть двудольным.

Теорема 4.4 ([2]). *Пусть $D^W = (V, E)$ – сильно связный взвешенный орграф на множестве из $n \geqslant 2$ вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами W_{ij}. Тогда*

$$\begin{aligned}\rho(D^W) &\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \left\{r_i(N^2(A_{D^W}))\right\}^{1/2} \\ &= \max_{i\in\langle n\rangle} \left\{ \sum_{j:\ i\to j} \left[\rho(W_{ij}) \sum_{k:\ j\to k} \rho(W_{jk})\right]\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Кроме того, равенство в соотношении (4.10) *имеет место тогда и только тогда, когда*

- *либо*

$$r_1(N(A_{D^W})) = \cdots = r_n(N(A_{D^W})), \tag{4.11}$$

• *либо орграф* $D^W = (V, E)$ *является двудольным,* $V = V_1 \cup V_2$, *причем*

$$r_i(N(A_{D^W})) = r_j(N(A_{D^W})) \quad \text{для всех} \quad i, j \in V_k, \quad k = 1, 2, \tag{4.12}$$

и выполнено условие (ii) *теоремы* 4.1.

Замечание 4.2. Представляется целесообразным отметить, что поскольку блоки $\sum\limits_k W_{ik} W_{kj}$ возведенной в квадрат матрицы смежности $A^2_{D^W}$, вообще говоря, не являются эрмитовыми, то теорема 2.1 непосредственно к $A^2_{D^W}$ неприменима.

Следующий результат, вытекающий из теоремы 2.1 и теоремы 3.5, очевидно, улучшает теорему 4.1 и обобщает некоторые известные результаты.

Теорема 4.5. *Пусть* $D^W = (V, E)$ – *сильно связный взвешенный орграф на множестве из* $n \geqslant 2$ *вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами* W_{ij}. *Тогда при любом* $\alpha \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\rho(D^W) \leqslant \max_{i,j:\ i \to j} \left\{ [r_i(N(A_{D^W}))]^\alpha \ [r_j(N(A_{D^W}))]^{1-\alpha} \right\}$$

$$= \max_{i,j:\ i \to j} \left\{ \left[\sum_{k:\ i \to k} \rho(W_{ik}) \right]^\alpha \left[\sum_{k:\ j \to k} \rho(W_{jk}) \right]^{1-\alpha} \right\}. \tag{4.13}$$

Кроме того, соотношение (4.13) *является равенством тогда и только тогда, когда выполнено условие* (ii) *теоремы* 4.1 *и*

• *либо*

$$r_1(N(A_{D^W})) = \cdots = r_n(N(A_{D^W})), \tag{4.14}$$

• *либо* $\alpha = 1/2$, *орграф* $D^W = (V, E)$ *является двудольным,* $V = V_1 \cup V_2$, *и*

$$r_i(N(A_{D^W})) = r_j(N(A_{D^W})) \quad \text{для всех} \quad i, j \in V_k, \quad k = 1, 2. \tag{4.15}$$

При $\alpha = 1/2$ результат теоремы 4.5 был установлен а работе [2] как следствие из приведенной выше теоремы 4.4, но в условиях равенства отсутствует требование, что орграф обязан быть двудольным.

Для $\alpha = 1/2$ и связного неориентированного взвешенного графа G^W результаты теоремы 4.5 были установлены в [6], а также в работе [5], в которой они были выведены из соответствующего (неориентированного) аналога теоремы 4.4.

Следующие две теоремы получаются применением следствия 3.4 с диагональными матрицами D, определенными соответственно в (4.4) и (4.7). Таким образом мы легко получаем обобщения некоторых недавних результатов, установленных для взвешенных неориентированных графов.

Теорема 4.6. *Пусть* $D^W = (V, E)$ *– сильно связный взвешенный орграф на множестве из* $n \geqslant 2$ *вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами* W_{ij}*. Тогда при любом* $\alpha \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\rho(D^W) &\leqslant \max_{i,j:\, i\to j}\left\{\left[\frac{r_i(N^2(A_{D^W}))}{r_i(N(A_{D^W}))}\right]^{\alpha}\left[\frac{r_j(N^2(A_{D^W}))}{r_j(N(A_{D^W}))}\right]^{1-\alpha}\right\}\\ &= \max_{i,j:\, i\to j}\left\{\left[\frac{\sum\limits_{k:\, i\to k}\left[\rho(W_{ik})\sum\limits_{p:\, k\to p}\rho(W_{kp})\right]}{\sum\limits_{k:\, i\to k}\rho(W_{ik})}\right]^{\alpha}\right.\\ &\qquad\left.\times\left[\frac{\sum\limits_{k:\, j\to k}\left[\rho(W_{jk})\sum\limits_{p:\, k\to p}\rho(W_{kp})\right]}{\sum\limits_{k:\, j\to k}\rho(W_{jk})}\right]^{1-\alpha}\right\}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Кроме того, соотношение (4.16) *является равенством тогда и только тогда, когда выполнено условие* (ii) *теоремы* 4.1 *и*

- *либо*

$$\frac{r_1(N^2(A_{D^W}))}{r_1(N(A_{D^W}))} = \dots = \frac{r_n(N^2(A_{D^W}))}{r_n(N(A_{D^W}))}, \tag{4.17}$$

- *либо* $\alpha = 1/2$, *орграф* $D^W = (V, E)$ *является двудольным,* $V = V_1 \cup V_2$, *и*

$$\frac{r_i(N^2(A_{D^W}))}{r_i(N(A_{D^W}))} = \frac{r_j(N^2(A_{D^W}))}{r_j(N(A_{D^W}))} \quad \text{для всех} \quad i, j \in V_k, \quad k = 1, 2. \tag{4.18}$$

Заметим, что в том случае, когда $\alpha = 1/2$ и взвешенный граф является неориентированным, теорема 4.6 сводится к теореме 3 работы [17].

Следующая теорема 4.7 в указанных выше предположениях сводится к теореме 2 работы [17], в которой условия равенства сформулированы с ошибкой. Эта ошибка была указана и исправлена в работе [19].

Теорема 4.7. *Пусть* $D^W = (V, E)$ – *сильно связный взвешенный орграф на множестве из* $n \geqslant 2$ *вершин с положительно полуопределенными ненулевыми весовыми матрицами* W_{ij}. *Тогда при любом* $\alpha \in [0,1]$ *справедливо неравенство*

$$\rho(D^W) \leqslant \max_{i,j:\ i\to j} \left\{ \left[\frac{\sum\limits_{k:\ i\to k} \left[\rho(W_{ik})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ i\to k} W_{ik} \right)} \right]^{\alpha} \times \left[\frac{\sum\limits_{k:\ j\to k} \left[\rho(W_{jk})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ j\to k} W_{jk} \right)} \right]^{1-\alpha} \right\}. \tag{4.19}$$

Кроме того, соотношение (4.19) *является равенством тогда и только тогда, когда выполнено условие* (ii) *теоремы* 4.1 *и*

• *либо*

$$\frac{\sum\limits_{k:\ 1\to k} \left[\rho(W_{1k})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ 1\to k} W_{1k} \right)} = \cdots = \frac{\sum\limits_{k:\ n\to k} \left[\rho(W_{nk})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ n\to k} W_{nk} \right)} \tag{4.20}$$

• *либо* $\alpha = 1/2$, *орграф* $D^W = (V, E)$ *является двудольным*, $V = V_1 \cup V_2$, *и*

$$\frac{\sum\limits_{k:\ i\to k} \left[\rho(W_{ik})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ i\to k} W_{ik} \right)} = \frac{\sum\limits_{k:\ j\to k} \left[\rho(W_{jk})\ \rho\left(\sum\limits_{p:\ k\to p} W_{kp} \right) \right]}{\rho\left(\sum\limits_{k:\ j\to k} W_{jk} \right)} \tag{4.21}$$

$$\text{для всех}\quad i,j \in V_k, \quad k = 1,2.$$

Ясно, что теоремы 4.6 и 4.7 улучшают соответственно теоремы 4.2 и 4.3.

В заключение статьи подчеркнем еще раз, что полученные оценки для спектрального радиуса взвешенных орграфов представлены главным образом в качестве иллюстрации предлагаемого подхода, применимого к блочным матрицам общего вида (в частности, к матрицам, имеющим квадратные положительно (полу)определенные эрмитовы блоки). В частном случае графов и орграфов этот подход позволяет получать верхние оценки для спектрального радиуса на основе имеющихся верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы простым стандартным способом.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
2. Ş. B. Bozkurt, D. Bozkurt, *On the spectral radius of weighted digraphs.* — Proyec. J. Math. **31**, No. 3 (2012), 247–259.
3. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic, New York, 1979.
4. Ş. Büyükköse, S. Sorgun, *A bound on the spectral radius of a weighted graph.* — Gazi Univ. J. Sci. **22**(4) (2009), 263–266.
5. Kinkar Ch. Das, *Extremal graph characterization from the bounds of the spectral radius.* — Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7420–7426.
6. Kinkar Ch. Das, R. B. Bapat, *A sharp upper bound on the spectral radius of weighted graphs.* — Discrete Math. **308** (2008), 3180–3186.
7. O. Favaron, M. Mahéo, J.-F. Saclé, *Some eigenvalue properties in graphs (conjectures of Graffiti - II).* — Discrete Math. **111** (1993), 197–220.
8. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen.* — Sitzungsber. Kön. uss. Akad. Wiss., Berlin (1912), 465–477.
9. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **359** (2003), 133–159.
10. Shu-Lin Liu, *Bounds for the greatest characteristic root of a nonnegative matrix.* — Linear Algebra Appl. **239** (1996), 151–160.
11. H. Minc, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York, 1988.
12. A. M. Ostrowski, *Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakterischen Wurzeln von Matrizen.* — Compositio Math. **9** (1951), 209–226.
13. A. M. Ostrowski, *On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks.* — J. Math. Anal. Appl. **2** (1961), 161–209.
14. F. Robert, *Recherche d'une M-matrice parmi les minorantes d'un opérateur linéaire.* — Numer. Math. **9** (1966), 189–199.

15. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative classiques par blocs.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
16. S. Sorgun, *The comparison of upper bounds for spectral radius of weighted graphs.* — Int. J. Algebra **5** (2011), 1567–1574.
17. S. Sorgun, Ş. Büyükköse, *The new upper bounds on the spectral radius of weighted graphs.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 5231–5238.
18. S. Sorgun, Ş. Büyükköse, H. S. Özarslan, *An upper bound on the spectral radius of weighted graphs.* — Hacettepe J. Math Stat. **42**(5) (2013), 517–524.
19. Gui-Xian Tian, Ting-Zhu Huang, *A note on upper bounds for the spectral radius of weighted graphs.* — Appl. Math. Comput. **243** (2014), 392–397.
20. H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.* — Math. Zeitschr. **52** (1950), 642–648.

Kolotilina L. Yu. An approach to bounding the spectral radius of a weighted digraph.

The paper suggests a general approach to deriving upper bounds for the spectral radii of weighted graphs and digraphs. The approach is based on the generalized Wielandt lemma (GWL), which reduces the problem of bounding the spectral radius of a given block matrix to bounding the Perron root of the matrix composed of the norms of the blocks. In the case of the adjacency matrix of weighted graphs and digraphs, where all the blocks are square positive semidefinite matrices of the same order, the GWL takes an especially nice simple form. The second component of the approach consists in applying known upper bounds for the Perron root of a nonnegative matrix. It is shown that the approach suggested covers, in particular, the known upper bounds of the spectral radius and allows one to describe the equality cases.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 16 октября 2017 г.