Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

ОБ ОПИСАНИИ ПАР АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ТЕПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ

§1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, косой циркулянт, антикоммутирующие матрицы.

Работа второго автора поддержана грантом Российского научного фонда № 14-11-00806.

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и ϕ-циркулянтом, когда

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\phi \in \mathbf{C}$.

Для ганкелевых матриц, как и для теплицевых, также определены понятия ганкелева циркулянта, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

ганкелева косого циркулянта при

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и ганкелева ϕ-циркулянта, когда

$$h_{-j} = \phi h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\phi \in \mathbf{C}$.

Задача об антикоммутировании теплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар матриц (T, H) таких, что T теплицева, H ганкелева и выполняется соотношение

$$TH + HT = 0. \tag{3}$$

В предлагаемой работе дается полное решение этой задачи. В разделе 3 формулируется теорема 1, являющаяся главным результатом статьи; в ней перечисляются классы пар (T, H), решающих задачу. Доказательство теоремы проводится в разделе 7 и использует результаты разделов 4–6, где решаются три вспомогательные задачи. Стоит подчеркнуть, что две первые из этих задач можно рассматривать как самостоятельные. В разделе 4 дается описание пар антикоммутирующих симметричных теплицевых матриц. Ее решение представлено классами $ACCTM$. Вторая задача заключается в классификации пар антикоммутирующих симметричной и кососимметричной теплицевых матриц. Соответствующие классы $ACKTM$ выведены в разделе 5. Следующий раздел 6 посвящен решению задачи о тройках, заключающейся в описании всех троек теплицевых матриц (T_1, T_2, T_3) таких, что T_1 и T_2 – симметричные матрицы, T_3 – кососимметричная матрица и пары (T_1, T_2) и (T_1, T_3) антикоммутируют. Классы $\mathcal{ЗОТ}$ описывают полное решение этой проблемы. Формулировку теоремы 1 предваряют вспомогательные результаты, составляющие раздел 2.

Напомним некоторые определения и факты. Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение

$$C = F_n^* D F_n, \tag{4}$$

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

и $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы.

Если S – косой циркулянт, то вместо (4) имеем

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*,$$

где

$$G_{-1} = \mathrm{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1})$$

и $\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ есть корень n-ой степени из -1.

Введем следующие обозначения: если $\mathcal{Z}$ есть матрица размера $n \times 2$, то символ $\mathcal{Z}^{(k,m)}$ обозначает ее 2×2-подматрицу, образованную k-й и m-й строками; I_n есть стандартное обозначение единичной матрицы порядка n; $O_{k \times m}$ и O_k – нулевые $(k \times m)$-матрица и вектор размерности k. Определим еще матрицы Q_c и Q_s вида

$$Q_c = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$Q_s = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из определений Q_c и Q_s имеем

$$Q_c = Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n. \tag{7}$$

§2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Произведение нескалярных теплицевых матриц T_1 и T_2 тогда и только тогда является теплицевой матрицей, когда T_1 и T_2 принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс ТПТМ_1. *Матрицы T_1 и T_2 суть ϕ-циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0$.*

Класс ТПТМ_2. *Обе матрицы T_1 и T_2 верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.*

Этот факт принадлежит к теплицеву фольклору. Все знают о нем, но никто не знает первоисточника. Также достаточно очевидным является следующий факт.

Лемма 2. *Пусть даны две одноранговые матрицы $\mathcal{Q} = xy^\top$ и $\mathcal{R} = uv^\top$, где x, y, и u v – n-мерные векторы. Тогда из равенства $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$ следует существование такого ненулевого числа α, что $u = \alpha x$, $v = \frac{1}{\alpha} y$.*

В [1] представлены следующие критерии принадлежности теплицевой матрицы множествам циркулянтов и косых циркулянтов.

Лемма 3. *Матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_c (см. (5)):*

$$CQ_c = Q_c C. \tag{8}$$

Лемма 4. *Матрица S является косым циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_s (см. (6)):*

$$SQ_s = Q_s S. \tag{9}$$

Кроме леммы 3 известен и другой критерий, когда теплицева матрица является циркулянтом (см. [2]).

Лемма 5. *Теплицева матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда вектор g, составленный из одних единиц, является собственным для C.*

Дальнейшие утверждения являются менее тривиальными.

Лемма 6. *Пусть C – симметричный и нескалярный ϕ-циркулянт. Тогда $\phi = \pm 1$.*

Доказательство. Рассмотрим ненулевой элемент c_j циркулянта C. Имеем

$$\begin{aligned} c_j &= \{\text{матрица } C \text{ симметрична}\} = c_{-j} \\ &= \{\text{матрица } C - \phi\text{-циркулянт}\} = \phi c_{n-j} \\ &= \{\text{матрица } C \text{ симметрична}\} = \phi c_{-(n-j)} \\ &= \{\text{матрица } C - \phi\text{-циркулянт}\} = \phi^2 c_j, \end{aligned}$$

или

$$\left(1 - \phi^2\right) c_j = 0.$$

Так как $c_j \neq 0$, то $\phi^2 = 1$. Лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Пусть C – циркулянт, а S – косой циркулянт, причем обе матрицы нескалярные и имеют один и тот же порядок. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является теплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S, коллинеарны.*

Доказательство. Пусть C – циркулянт с первой строкой $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, а S – косой циркулянт с первой строкой $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$. Запишем условие теплицевости матрицы $SC - CS^\top$:

$$\left\{SC - CS^\top\right\}_{k,m} = \left\{SC - CS^\top\right\}_{k+1,m+1}, \quad k, m = 1, \ldots, n-1,$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{n} \{S\}_{k,q}\{C\}_{q,m} - \sum_{q=1}^{n} \{C\}_{k,q}\{S\}_{m,q} \\ - \sum_{q=1}^{n} \{S\}_{k+1,q}\{C\}_{q,m+1} + \sum_{q=1}^{n} \{C\}_{k+1,q}\{S\}_{m+1,q} = 0, \end{aligned}$$

или, учитывая теплицевость матриц C и S, равенству

$$\sum_{q=1}^{n} s_{q-k} c_{m-q} - \sum_{q=1}^{n} s_{q-k-1} c_{m+1-q} - \sum_{q=1}^{n} c_{q-k} s_{q-m} + \sum_{q=1}^{n} c_{q-k-1} s_{q-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования q на r, полагая $r = q$ в первой и третьей суммах и $r = q - 1$ во второй и четвертой:

$$\sum_{r=1}^{n} s_{r-k}c_{m-r} - \sum_{r=0}^{n-1} s_{r-k}c_{m-r} - \sum_{r=1}^{n} c_{r-k}s_{r-m} + \sum_{r=0}^{n-1} c_{r-k}s_{r-m} = 0.$$

После упрощения получаем

$$s_{n-k}c_{-(n-m)} - s_{-k}c_m - c_{n-k}s_{n-m} + c_{-k}s_{-m} = 0.$$

Поскольку C – циркулянт, а S – косой циркулянт, то

$$s_{n-k}c_m + s_{n-k}c_m - c_{n-k}s_{n-m} - c_{n-k}s_{n-m} = 0.$$

Заменяя здесь $n - k$ на k, имеем

$$s_k c_m = c_k s_{n-m}, \quad k, m = 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

По векторам

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})^\top, \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})^\top$$

построим две вспомогательные матрицы $M = sc^\top$ и $K = c\,(\mathcal{P}_{n-1}s)^\top$ порядка $n-1$. Равенство (10) означает, что $M = K$. Из условия нескалярности матриц C и S следует, что $c \neq 0$ и $s \neq 0$. Применяя лемму 2, заключаем, что для некоторого $\alpha \neq 0$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} c_k = \alpha s_k, & k = 1, \ldots, n-1, \\ c_{n-m} = \alpha s_m, & m = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k = \alpha s_k, \\ c_k = \alpha s_{n-k}, \end{array} \right. \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Из этих соотношений выводим, что для всех k верны равенства $s_k = s_{n-k}$, т.е. $S^\top = -S$, и равенства $c_k = c_{n-k}$, т.е. $C^\top = C$. При этом векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов матриц C и S, пропорциональны с коэффициентом $-\alpha$. Лемма 7 доказана. □

Лемма 8. *Пусть C – симметричный и нескалярный циркулянт, а S – кососимметричный и нескалярный косой циркулянт. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S, пропорциональны, а циркулянт C с точностью до скалярного множителя есть инволюция.*

Доказательство. В силу леммы 7, условие теплицевости матрицы $SC - CS^\top$ эквивалентно коллинеарности векторов, составленных из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S. Учтем теперь требование, чтобы матрица $SC-CS^\top = SC+CS$ была циркулянтом. Согласно лемме 3, имеем

$$Q_c(SC + CS) = (SC + CS)Q_c,$$

или

$$C\left(Q_cS - SQ_c\right) = \left(SQ_c - Q_cS\right)C.$$

Используя соотношение $Q_c = Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n$, можем написать

$$\begin{aligned} &C\left[\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)S - S\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)\right] \\ &\qquad\qquad = \left[S\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right) - \left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)S\right]C, \end{aligned}$$

или, после упрощения,

$$Ce_1e_n^\top S - CSe_1e_n^\top = Se_1e_n^\top C - e_1e_n^\top SC,$$

или, с учетом равенств $S^\top = -S$ и $C^\top = C$,

$$-Ce_1\left(Se_n\right)^\top - CSe_1e_n^\top = Se_1\left(Ce_n\right)^\top + e_1\left(CSe_n\right)^\top. \tag{11}$$

Положим $x = Se_1$, тогда $Ce_1 = x + \zeta e_1$. Вычислим векторы Se_n и Ce_n:

$$\begin{aligned} Se_n &= -\mathcal{P}_nS\mathcal{P}_ne_n = -\mathcal{P}_nSe_1 = -\mathcal{P}_nx, \\ Ce_n &= \mathcal{P}_nC\mathcal{P}_ne_n = \mathcal{P}_nCe_1 = \mathcal{P}_nx + \zeta e_n. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (11), получаем

$$\begin{aligned} (x + \zeta e_1)\left(\mathcal{P}_nx\right)^\top - Cxe_n^\top &= x\left(\mathcal{P}_nx + \zeta e_n\right)^\top - e_1\left(\mathcal{P}_nCx\right)^\top, \\ \zeta e_1\left(\mathcal{P}_nx\right)^\top - Cxe_n^\top &= \zeta xe_n^\top - e_1\left(\mathcal{P}_nCx\right)^\top, \\ e_1\left(\mathcal{P}_n\left(C + \zeta I_n\right)x\right)^\top &= \left(\left(C + \zeta I_n\right)x\right)e_n^\top. \end{aligned}$$

Матрица, стоящая в левой части этого равенства, имеет нули во всех строках, кроме первой, а матрица из правой части – нули во всех столбцах, кроме последнего. Поэтому

$$\{(C + \zeta I_n)\,x\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Введем циркулянт $\breve{C}$ с нулевой главной диагональю формулой $C = \breve{C} + \zeta I_n$; тогда предыдущие равенства можно записать как

$$\left\{\left(\breve{C} + 2\zeta I_n\right)x\right\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поскольку $x = Ce_1 - \zeta e_1 = \check{C}e_1$, то эти равенства эквивалентны матричному соотношению

$$\left(\check{C} + 2\zeta I_n\right)\check{C} = \kappa I_n,$$

откуда выводим

$$\check{C}^2 + 2\zeta\check{C} + \zeta^2 I_n = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n,$$
$$\left(\check{C} + \zeta I_n\right)^2 = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n.$$

Полагая $\kappa + \zeta^2 = \chi^2$, получаем

$$C^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $C \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\check{C}$ формулой $C = \chi\check{C}$, имеем $\check{C}^2 = I_n$, т.е. $\check{C}$ – симметричный инволютивный циркулянт. Лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *Пусть C – циркулянт, а S – косой циркулянт, причем обе матрицы нескалярные и имеют один и тот же порядок. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является теплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S, коллинеарны.*

Доказательство. Пусть C – циркулянт с первой строкой $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, а S – косой циркулянт с первой строкой $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$. Запишем условие теплицевости матрицы $CS - SC^\top$:

$$\left\{CS - SC^\top\right\}_{k,m} = \left\{CS - SC^\top\right\}_{k+1,m+1}, \quad k, m = 1, \ldots, n-1,$$

что эквивалентно равенству

$$\sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k,q}\{S\}_{q,m} - \sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k,q}\{C\}_{m,q} - \sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k+1,q}\{S\}_{q,m+1} + \sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k+1,q}\{C\}_{m+1,q} = 0,$$

или, учитывая теплицевость матриц C и S, соотношению

$$\sum_{q=1}^{n} c_{q-k}s_{m-q} - \sum_{q=1}^{n} c_{q-k-1}s_{m+1-q} - \sum_{q=1}^{n} s_{q-k}c_{q-m} + \sum_{q=1}^{n} s_{q-k-1}c_{q-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования q на r, полагая $r = q$ в первой и третьей суммах и $r = q - 1$ во второй и четвертой:

$$\sum_{r=1}^{n} c_{r-k}s_{m-r} - \sum_{r=0}^{n-1} c_{r-k}s_{m-r} - \sum_{r=1}^{n} s_{r-k}c_{r-m} + \sum_{r=0}^{n-1} s_{r-k}c_{r-m} = 0.$$

После упрощения получаем

$$c_{n-k}s_{-(n-m)} - c_{-k}s_m - s_{n-k}c_{n-m} + s_{-k}c_{-m} = 0.$$

Поскольку C – циркулянт, а S – косой циркулянт, то

$$c_{n-k}s_m + c_{n-k}s_m + s_{n-k}c_{n-m} + s_{n-k}c_{n-m} = 0.$$

Заменяя здесь $n - k$ на k, имеем

$$c_k s_m = -s_k c_{n-m}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

По векторам

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})^\top, \qquad s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})^\top$$

построим две вспомогательные матрицы $M = cs^\top$ и $K = -s\,(\mathcal{P}_{n-1}c)^\top$ порядка $n-1$. Равенства (12) означают, что $M = K$. Из условия нескалярности матриц C и S следует, что $c \neq 0$ и $s \neq 0$. Применяя лемму 2, заключаем, что для некоторого $\alpha \neq 0$ выполняются равенства

$$\begin{cases} s_k = -\alpha c_k, & k = 1, \ldots, n-1, \\ s_{n-j} = \alpha c_j, & j = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} s_k = -\alpha c_k, \\ s_k = \alpha c_{n-k}, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Из этих соотношений выводим, что для всех k верны равенства $c_k = -c_{n-k}$, означающие, что $C^\top = -C$, и равенства $s_k = -s_{n-k}$, эквивалентные условию $S^\top = S$. При этом векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов матриц C и S, пропорциональны с коэффициентом α. Лемма 9 доказана. $\square$

Лемма 10. *Пусть S – симметричный и нескалярный косой циркулянт, а C – кососимметричный и нескалярный циркулянт. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S, пропорциональны, а косой циркулянт S с точностью до скалярного множителя есть инволюция.*

Доказательство. В силу леммы 9, условие теплицевости матрицы $CS - SC^\top$ эквивалентно коллинеарности векторов, составленных из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S.

Исследуем теперь требование, чтобы матрица $CS - SC^\top = CS + SC$ была косым циркулянтом. Согласно лемме 4, имеем

$$Q_s(CS + SC) = (CS + SC)Q_s,$$

или

$$S\left(Q_sC - CQ_s\right) = \left(CQ_s - Q_sC\right)S.$$

Используя соотношение $Q_s = Q_c - 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n$, можем написать

$$S\left[\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)C - C\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)\right] = \left[C\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right) - \left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)C\right]S,$$

или

$$Se_1e_n^\top C - SCe_1e_n^\top = Ce_1e_n^\top S - e_1e_n^\top CS,$$

или, с учетом равенств $C = -C^\top$ и $S^\top = S$,

$$-Se_1\left(Ce_n\right)^\top - SCe_1e_n^\top = Ce_1(Se_n)^\top + e_1\left(SCe_n\right)^\top. \tag{13}$$

Положим $x = Ce_1$, тогда $Se_1 = x + \zeta e_1$. Вычислим векторы Ce_n и Se_n:

$$\begin{aligned} Ce_n &= -\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_ne_n = -\mathcal{P}_nCe_1 = -\mathcal{P}_nx, \\ Se_n &= \mathcal{P}_nS\mathcal{P}_ne_n = \mathcal{P}_nSe_1 = \mathcal{P}_nx + \zeta e_n. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (13), получаем

$$\begin{aligned} (x + \zeta e_1)\left(\mathcal{P}_nx\right)^\top - Sxe_n^\top &= x\left(\mathcal{P}_nx + \zeta e_n\right)^\top - e_1\left(\mathcal{P}_nSx\right)^\top, \\ \zeta e_1\left(\mathcal{P}_nx\right)^\top - Sxe_n^\top &= \zeta xe_n^\top - e_1\left(\mathcal{P}_nSx\right)^\top, \\ e_1\left(\mathcal{P}_n\left(S + \zeta I_n\right)x\right)^\top &= \left(\left(S + \zeta I_n\right)x\right)e_n^\top. \end{aligned}$$

Матрица, стоящая в левой части этого равенства, имеет нули во всех строках, кроме первой, а матрица из правой части – нули во всех столбцах, кроме последнего. Поэтому

$$\{(S + \zeta I_n)x\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Введем косой циркулянт $\breve{S}$ с нулевой главной диагональю формулой $S = \breve{S} + \zeta I_n$; тогда предыдущие равенства можно записать как

$$\left\{\left(\breve{S} + 2\zeta I_n\right)x\right\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поскольку $x = Se_1 - \zeta e_1 = \check{S}e_1$, то эти равенства эквивалентны матричному соотношению

$$\left(\check{S} + 2\zeta I_n\right)\check{S} = \kappa I_n,$$

откуда выводим

$$\check{S}^2 + 2\zeta\check{S} + \zeta^2 I_n = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n,$$

$$\left(\check{S} + \zeta I_n\right)^2 = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n.$$

Полагая $\kappa + \zeta^2 = \chi^2$, получаем

$$S^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $S \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\check{S}$ формулой $S = \chi\check{S}$, имеем $\check{S}^2 = I_n$, т.е. $\check{S}$ – симметричный и инволютивный косой циркулянт. Лемма 10 доказана. □

Лемма 11. *Пусть C – ненулевой кососимметричный циркулянт, S– нескалярный косой циркулянт. Тогда условие, что матрица $CS - SC^\top$ является циркулянтом, эквивалентно равенству $S = 0$.*

Доказательство. Достаточность утверждения очевидна. Докажем его необходимость.

Предположим, что $S \neq 0$. Без ограничения общности, можно считать, что у матрицы S, как и у C, диагональный элемент нулевой. В противном случае, полагая $S = s_0 I_n + S_0$, где матрица S_0 имеет нуль на диагонали, получаем идентичность условий, при которых матрицы $CS - SC^\top = CS_0 - S_0C^\top + s_0\left(C - C^\top\right)$ и $CS_0 - S_0C^\top$ являются циркулянтами.

Поскольку обе матрицы C и S нескалярны, по лемме 9 их первые столбцы пропорциональны. Без ограничения общности можно считать, что матрицы C и S имеют один и тот же первый столбец

$$x = \left(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right)^\top.$$

Записывая с помощью леммы 3 условие, что матрица $CS - SC^\top = CS + SC$ является циркулянтом, получаем

$$Q_c\left(CS + SC\right) = \left(CS + SC\right)Q_c,$$

или

$$C\left(Q_cS - SQ_c\right) = \left(SQ_c - Q_cS\right)C,$$

или, используя соотношение $Q_c = Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n$ (см. (7)),

$$C\left[\left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)S - S\left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] = \left[S\left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right) - \left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)S\right]C.$$

Поскольку S – косой циркулянт, это равенство можно привести к виду

$$Ce_1e_n^\top S - CSe_1e_n^\top = Se_1e_n^\top C - e_1e_n^\top SC,$$

или, посредством соотношений $S = S^\top$ (см. доказательство леммы 9) и $C^\top = -C$, к виду

$$Ce_1\left(Se_n\right)^\top - CSe_1e_n^\top = -Se_1\left(Ce_n\right)^\top + e_1\left(CSe_n\right)^\top.$$

Ввиду условий $Ce_1 = Se_1 = x$ получаем

$$x\left(Se_n\right)^\top - Cxe_n^\top = -x\left(Ce_n\right)^\top + e_1\left(CSe_n\right)^\top,$$

что эквивалентно равенству

$$e_1\left(CSe_n\right)^\top + Cxe_n^\top = x\left(Ce_n + Se_n\right)^\top. \tag{14}$$

Заметим, что

$$CSe_n = CS\mathcal{P}_ne_1 = -\mathcal{P}_nCSe_1,$$

$$Ce_n + Se_n = C\mathcal{P}_ne_1 + S\mathcal{P}_ne_1 = \mathcal{P}_n\left(C^\top e_1 + S^\top e_1\right) = \{C^\top = -C,\ S^\top = S\} = \mathcal{P}_n\left(Se_1 - Ce_1\right) = 0.$$

Теперь уравнение (14) можно переписать как

$$-e_1\left(\mathcal{P}_nCSe_1\right)^\top + Cxe_n^\top = 0,$$

или

$$-e_1\left(\mathcal{P}_nCx\right)^\top + Cxe_n^\top = 0.$$

В первой из матриц, стоящих в левой части, все строки, кроме первой, нулевые, а во второй нулевыми являются все столбцы, кроме последнего. Поэтому $\{Cx\}_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Положим $\{Cx\}_1 = \xi$, тогда $Cx = \xi e_1$. Первым столбцом циркулянта C^2 является вектор Cx. Следовательно,

$$C^2 = \xi I_n.$$

Согласно лемме 5, вектор g, состоящий из одних единиц, будет собственным вектором для циркулянта C:

$$Cg = \lambda g.$$

Из соотношений $\mathcal{P}_n g = g$ и $\mathcal{P}_n C = -C\mathcal{P}_n$ выводим

$$\lambda g = \lambda \mathcal{P}_n g = \mathcal{P}_n (\lambda g) = \mathcal{P}_n (Cg) = -C\mathcal{P}_n g = -Cg = -\lambda g.$$

Поэтому $\lambda = 0$ и $Cg = 0$. Теперь имеем

$$\xi g = \xi I_n g = C^2 g = 0,$$

откуда $\xi = 0$ и, как следствие, $C^2 = 0$. Такое равенство возможно для циркулянта C только в случае, если $C = 0$, а тогда и $S = 0$. Эти выводы противоречат и условию леммы, и исходному предположению $S \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 11. $\square$

Лемма 12. *Пусть S – ненулевой кососимметричный косой циркулянт, C – нескалярный циркулянт. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

а) $C = 0$;

б) n – четное число, векторы Ce_1 и Se_1 линейно зависимы, и матрица S пропорциональна своей обратной.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что у матрицы C, как и у S, диагональный элемент нулевой. В противном случае, полагая $C = c_0 I_n + C_0$, где матрица C_0 имеет нуль на диагонали, получаем идентичность условий, при которых матрицы $SC - CS^\top = SC_0 - C_0 S^\top + c_0 \left(S - S^\top\right)$ и $SC_0 - C_0 S^\top$ являются косыми циркулянтами.

Пусть C – циркулянт с первой строкой $0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, S – косой циркулянт с первой строкой $0, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

При $C = 0$ получаем случай а) нашей леммы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $C \neq 0$. Поскольку обе матрицы C и S нескалярны, по лемме 7 их первые столбцы пропорциональны. Без ограничения общности можно считать, что они имеют одинаковый первый столбец

$$x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^\top.$$

Записывая условие, что матрица $SC - CS^\top = SC + CS$ является косым циркулянтом, получаем

$$Q_s (SC + CS) = (SC + CS) Q_s,$$

или

$$S (Q_s C - C Q_s) = (C Q_s - Q_s C) S,$$

или, ввиду соотношения $Q_s = Q_c - 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n$ (см. (7)),

$$S\left[\left(Q_c - 2e_1 e_n^\top\right) C - C\left(Q_c - 2e_1 e_n^\top\right)\right] = \left[C\left(Q_c - 2e_1 e_n^\top\right) - \left(Q_c - 2e_1 e_n^\top\right) C\right] S.$$

Поскольку C – циркулянт, это равенство можно привести к виду

$$Se_1 e_n^\top C - SCe_1 e_n^\top = Ce_1 e_n^\top S - e_1 e_n^\top CS,$$

или, посредством соотношений $S = -S^\top$ и $C^\top = C$ (см. доказательство леммы 7), к виду

$$Se_1 \left(Ce_n\right)^\top - SCe_1 e_n^\top = -Ce_1 \left(Se_n\right)^\top + e_1 \left(SCe_n\right)^\top .$$

Используя равенства $Ce_1 = Se_1 = x$, получаем

$$x\left(\left(C + S\right) e_n\right)^\top = SCe_1 e_n^\top + e_1 \left(SCe_n\right)^\top .$$

Поскольку $(C + S)\, e_n = 0$ и $SCe_n = SC\mathcal{P}_n e_1 = -\mathcal{P}_n SCe_1$, то

$$Sxe_n^\top - e_1 \left(\mathcal{P}_n Sx\right)^\top = 0,$$

или

$$e_1 \left(\mathcal{P}_n Sx\right)^\top - Sxe_n^\top = 0.$$

В первой из матриц, стоящих в левой части, все строки, кроме первой, нулевые, а во второй нулевыми являются все столбцы, кроме последнего. Поэтому $\{Sx\}_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Пусть $\{Sx\}_1 = \xi$, тогда $Sx = \xi e_1$. Первым столбцом косого циркулянта S^2 является вектор Sx. Следовательно,

$$S^2 = \xi I_n.$$

Если $\xi = 0$ (что имеет место, например, при нечетном $n = 2l + 1$, поскольку всякая кососимметричная матрица нечетного порядка вырождена), то $S = 0$ и $C = 0$, тогда как по предположению $C \neq 0$.

При четном n и невырожденном косом циркулянте S имеем случай б). Здесь соотношение $S^2 = \xi I_n$ эквивалентно равенству $S = \xi S^{-1}$. Лемма 12 доказана. □

§3. Главный результат

Теорема 1. *Ненулевые теплицева матрица T и ганкелева матрица H антикоммутируют тогда и только только, когда T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

Класс 1. *Матрица T кососимметрична, H является скалярным кратным матрицы $\mathcal{P}_n$.*

Класс 2. *Матрица* T *является циркулянтом*

$$T = {F_n}^* D_1 F_n,$$

а H – *ганкелевым циркулянтом*

$$H = {F_n}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – *диагональные матрицы; при этом*

$$\begin{aligned} & d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0, \\ & d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} + d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Класс 3. *Матрица* T *является косым циркулянтом*

$$T = G_{-1} {F_n}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H – *ганкелевым косым циркулянтом*

$$H = G_{-1} {F_n}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right) \text{ и } D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$$

удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} & d_1^{(2)}\left(d_1^{(1)} + d_2^{(1)}\right) = 0, \qquad d_2^{(2)}\left(d_2^{(1)} + d_1^{(1)}\right) = 0, \\ & d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} + d_{n+3-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n. \end{aligned}$$

Класс 4. *Порядок* n – *четное число. Матрицы* T *и* H *задаются формулами*

$$T = \alpha\,(C - SCS) + S_1,$$
$$H = \gamma S \mathcal{P}_n,$$

где S – *кососимметричный инволютивный косой циркулянт,* C – *циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* S, *а* S_1 – *кососимметричный косой циркулянт.*

Класс 5. *Матрицы* T *и* H *имеют вид*

$$T = \alpha L + \beta L^{\top},$$
$$H = \gamma\left(L - L^{\top}\right)\mathcal{P}_n,$$

где L – *ненулевая строго нижнетреугольная теплицева матрица, для которой* $L^2 = 0$.

Класс 6. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*

$$T = \alpha C + \beta\left(S - CSC\right),$$
$$H = \gamma\left(S - CSC\right)\mathcal{P}_n.$$

Здесь C *– симметричный инволютивный циркулянт,* S *– косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* C.

Класс 7. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*

$$T = \alpha S + \beta\left(C - SCS\right),$$
$$H = \gamma\left(C - SCS\right)\mathcal{P}_n.$$

Здесь S *– симметричный инволютивный косой циркулянт,* C *– циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы* S.

Класс 8. *Матрицы* T *и* H *задаются формулами*

$$T = \alpha Z + \beta Z^{\top},$$
$$H = \gamma\left(Z - Z^{\top}\right)\mathcal{P}_n,$$

где Z *– инволютивный* ϕ*-циркулянт, причем* $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$.

Класс 9. *Матрицы* T *и* H *имеют вид*

$$T = \alpha\left(C + S\right), \quad H = \beta\left(C - S\right)\mathcal{P}_n,$$

где C *и* S *– инволютивные симметричные циркулянт и косой циркулянт.*

§4. Описание антикоммутирующих симметричных теплицевых матриц

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, исследуем решение нескольких вспомогательных задач. Начнем с задачи о классификации антикоммутирующих симметричных теплицевых матриц.

Задача об антикоммутировании симметричных теплицевых матриц заключается в описании пар симметричных теплицевых матриц T_1 и T_2, удовлетворяющих условию

$$T_1 T_2 + T_2 T_1 = 0. \tag{15}$$

Решение этой задачи дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Ненулевые симметричные теплицевы матрицы T_1 и T_2 антикоммутируют тогда и только тогда, когда они принадлежат одному из следующих классов:*

Класс ACCTM_1. *Матрицы T_1 и T_2 – циркулянты, делящие нуль, т.е. $T_1T_2 = 0$.*

Класс ACCTM_2. *Матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, делящие нуль.*

Класс ACCTM_3. *Матрицы T_1 и T_2 имеют вид*

$$T_1 = \alpha\,(C + S)\,, \quad T_2 = \beta\,(C - S)\,,$$

где C и S – инволютивные симметричные циркулянт и косой циркулянт.

Доказательство. Если одна из матриц является скалярной, то другая будет нулевой. Получаем противоречие с условием теоремы. В дальнейшем считаем, что обе матрицы нескалярные.

Если обе матрицы T_1 и T_2 – симметричные циркулянты, то, будучи перестановочными, они должны делить нуль. Получаем класс ACCTM_1.

Аналогично, если T_1 и T_2 – симметричные косые циркулянты, то вследствие одновременной диагонализуемости они должны делить нуль. Получаем класс ACCTM_2.

Теперь рассмотрим общий случай. Обозначим элементы первой строки матрицы T_1 через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, а ее первого столбца – через $a_0,\ a_{-1},\ \ldots,\ a_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы T_2 обозначим через $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-1}$, а ее первого столбца – через b_0, $b_{-1}, \ldots, b_{-(n-1)}$.

Запишем матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1, \quad T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2,$$

где $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ имеют нулевую главную диагональ, и подставим эти выражения в уравнение (15):

$$\left(a_0 I_n + \widehat{T}_1\right)\left(b_0 I_n + \widehat{T}_2\right) + \left(b_0 I_n + \widehat{T}_2\right)\left(a_0 I_n + \widehat{T}_1\right) = 0.$$

После упрощения получаем

$$\widehat{T}_1\widehat{T}_2 + \widehat{T}_2\widehat{T}_1 = -2a_0 b_0 I_n - 2a_0\widehat{T}_2 - 2b_0\widehat{T}_1.$$

Правая часть является теплицевой матрицей, значит, и левая часть должна быть теплицевой:

$$\left\{\widehat{T}_1\widehat{T}_2+\widehat{T}_2\widehat{T}_1\right\}_{k,m}=\left\{\widehat{T}_1\widehat{T}_2+\widehat{T}_2\widehat{T}_1\right\}_{k+1,m+1}, \qquad k,m=1,\ldots,n-1.$$

Подробная запись последнего равенства

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{k,l}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{l,m}+\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{k,l}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{l,m} -\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{k+1,l}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{l,m+1}-\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{k+1,l}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{l,m+1}=0$$

эквивалентна, в силу теплицевости T_1 и T_2, условию

$$\sum_{l=1}^{n}a_{l-k}b_{m-l}+\sum_{l=1}^{n}b_{l-k}a_{m-l}-\sum_{l=1}^{n}a_{l-k-1}b_{m+1-l}-\sum_{l=1}^{n}b_{l-k-1}a_{m+1-l}=0.$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p=l$ в первой и второй суммах и $p=l-1$ в третьей и четвертой:

$$\sum_{p=1}^{n}a_{p-k}b_{m-p}+\sum_{p=1}^{n}b_{p-k}a_{m-p}-\sum_{p=0}^{n-1}a_{p-k}b_{m-p}-\sum_{p=0}^{n-1}b_{p-k}a_{m-p}=0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{n-k}b_{-(n-m)}-a_{-k}b_m+b_{n-k}a_{-(n-m)}-b_{-k}a_m=0,$$

которое, в силу симметричности T_1 и T_2, равносильно соотношению

$$a_kb_m+b_ka_m=a_{n-k}b_{n-m}+b_{n-k}a_{n-m}. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение две вспомогательные $(n-1)\times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, задавая их формулами

$$\mathcal{F}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & b_{n-1}\end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1}\\ a_{n-2} & b_{n-2}\\ \vdots & \vdots\\ a_1 & b_1\end{bmatrix}.$$

Теперь условия (16) можно записать в виде

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\mathcal{F}^{\top}=\mathcal{G}\mathcal{P}_2\mathcal{G}^{\top}. \tag{17}$$

Так как матрицы T_1 и T_2 нескалярные, то $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не имеют нулевых столбцов. Значит, $\operatorname{rank}\mathcal{F}\geqslant 1$ и $\operatorname{rank}\mathcal{G}\geqslant 1$.

Покажем, что rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G}$. Пусть rank $\mathcal{F} = 2$, тогда найдутся числа k и m такие, что 2×2-матрица $\mathcal{F}^{(k,m)}$ невырожденна. Запишем соотношение (17) для k-х и m-х строк и столбцов

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = \mathcal{G}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top .$$

Матрица в левой части невырожденна, значит, и матрица в правой части должна быть невырожденной. Поэтому подматрица $\mathcal{G}^{(k,m)}$ невырожденна и rank $\mathcal{G} = 2$. Так как матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ входят в условие (17) равноправно, то из условия rank $\mathcal{G} = 2$ следует соотношение rank $\mathcal{F} = 2$. Значит, возможны лишь два случая: rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 1$ и rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 2$. Последовательно проанализируем их.

I. rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 1$.

Если пара матриц T_1 и T_2 является решением, то пара, составленная из их скалярных кратных, также является решением. Поэтому можно считать, что у $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ одинаковые столбцы. Значит, наддиагональные элементы матриц T_1 и T_2 и, в силу симметрии, их поддиагональные элементы совпадают. Поэтому

$$T_2 = (b_0 - a_0)\, I_n + T_1,$$

т.е. матрица T_2 – линейный многочлен от T_1. Такие матрицы T_1 и T_2 коммутируют и делят нуль. Поскольку произведение T_1T_2 есть (нулевая) теплицева матрица, то T_1 и T_2 – либо верхнетреугольные, либо нижнетреугольные матрицы, либо ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ. В силу симметрии и нескалярности матриц T_1 и T_2, первые два случая невозможны. Из леммы 6 выводим, что T_1 и T_2 – циркулянты или косые циркулянты, делящие нуль. Приходим к классам ACCTM_1 и ACCTM_2.

II. rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 2$.

Так как rank $\mathcal{F} = 2$, то найдутся числа k и m такие, что матрица $\mathcal{F}^{(k,m)}$ невырожденна. Запишем соотношение (17) для k-х и m-х строк и столбцов

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = \mathcal{G}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top .$$

Из невырожденности матрицы $\mathcal{F}^{(k,m)}$ следует невырожденность матрицы $\mathcal{G}^{(k,m)}$. Далее распишем (17) для k-ых и m-ых столбцов:

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = \mathcal{G}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top.$$

Выразим отсюда матрицу $\mathcal{G}$ как

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top\left(\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top\right)^{-1}\mathcal{P}_2.$$

Введем матрицу

$$W = \mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top\left(\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top\right)^{-1}\mathcal{P}_2,$$

тогда

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}W, \tag{18}$$

и условие (17) примет вид

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\mathcal{F}^\top = \mathcal{F}W\mathcal{P}_2W^\top\mathcal{F}^\top,$$

что равносильно соотношению

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P}_2 - W\mathcal{P}_2W^\top\right)\mathcal{F}^\top = 0.$$

Запишем последнее равенство для k-х и m-х строк и столбцов:

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\left(\mathcal{P}_2 - W\mathcal{P}_2W^\top\right)\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = 0.$$

В силу невырожденности матрицы $\mathcal{F}^{(k,m)}$, получаем

$$W\mathcal{P}_2W^\top = \mathcal{P}_2. \tag{19}$$

Представим матрицу W в виде

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

С учетом (20) соотношение (19) имеет вид

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После элементарных преобразований получаем условие

$$\begin{pmatrix} 2w_{11}w_{12} & w_{11}w_{22} + w_{12}w_{21} \\ w_{12}w_{21} + w_{11}w_{22} & 2w_{21}w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентное системе

$$\left\{\begin{array}{l} w_{11}w_{12}=0, \\ w_{21}w_{22}=0, \\ w_{11}w_{22}+w_{12}w_{21}=1. \end{array}\right. \tag{21}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от равенства или неравенства нулю параметра w_{11}. Пусть сначала $w_{11}\neq 0$, тогда, в силу (21), $w_{12}=0$, $w_{22}\neq 0$ и $w_{21}=0$. Положим $w_{11}=\phi$. Матрица W будет диагональной: $W=\operatorname{diag}(\phi,1/\phi)$. Это означает, что выполнены условия

$$a_{n-j}=\phi a_j, \quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Расписывая это соотношение для $j=j_0$ и $j=n-j_0$ при условии $a_{n-j_0}\neq 0$, получаем

$$a_{n-j_0}=\phi a_{j_0}, \quad a_{j_0}=\phi a_{n-j_0}.$$

Отсюда следует, что $\phi=\pm 1$ и $W=\pm I_2$.

Пусть сначала $W=I_2$. Тогда имеем совокупность условий

$$\left\{\begin{array}{l} a_j=a_{n-j}, \\ b_j=b_{n-j}, \end{array}\right. \quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Поскольку матрицы T_1 и T_2 симметричны, можем записать

$$\left\{\begin{array}{l} a_{-j}=a_{n-j}, \\ b_{-j}=b_{n-j}, \end{array}\right. \quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

В этом случае T_1 и T_2 – циркулянты. Такая ситуация уже рассматривалась и дала пары класса ACCTM_1.

В случае $W=-I_2$ имеем условия

$$\left\{\begin{array}{l} a_j=-a_{n-j}, \\ b_j=-b_{n-j}, \end{array}\right. \quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Поскольку матрицы T_1 и T_2 симметричны, можем записать

$$\left\{\begin{array}{l} a_{-j}=-a_{n-j}, \\ b_{-j}=-b_{n-j}, \end{array}\right. \quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Теперь T_1 и T_2 – косые циркулянты. Такая ситуация тоже уже рассматривалась и дала пары класса ACCTM_2.

Далее считаем, что $w_{11}=0$. Тогда, в силу (21), $w_{12}\neq 0$, $w_{21}\neq 0$ и $w_{22}=0$. Положим $w_{21}=\lambda\neq 0$. Матрица W имеет вид

$$W=\left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \lambda & 0 \end{array}\right),$$

и условия (18) можно записать как

$$\begin{cases} a_{n-j} = \lambda b_j, \\ b_{n-j} = \frac{1}{\lambda} a_j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поскольку T_2 можно умножить на (ненулевое) число, будем считать, что $\lambda = 1$. Поэтому имеем соотношения

$$b_j = a_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Введем циркулянт C_1 и косой циркулянт S_1 с одинаковыми первыми строками

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{n-1}\right).$$

В этом случае матрицы T_1 и T_2 можно записать в виде

$$T_1 = C_1 + S_1 + C_1^\top + S_1^\top,$$
$$T_2 = b_0 I_n + C_1 - S_1 + C_1^\top - S_1^\top.$$

Определим циркулянт C и косой циркулянт S формулами

$$C = C_1 + C_1^\top + \frac{b_0}{2} I_n, \quad S = S_1 + S_1^\top - \frac{b_0}{2} I_n,$$

тогда справедливы равенства

$$T_1 = C + S, \quad T_2 = C - S.$$

После подстановки в уравнение (15) получаем соотношение

$$(C+S)(C-S) + (C-S)(C+S) = 0,$$

которое можно упростить к виду

$$C^2 = S^2.$$

В левой части стоит циркулянт, в правой – косой циркулянт. Поэтому последнее равенство возможно лишь при выполнении условий

$$C^2 = S^2 = \mu I_n.$$

Так как T_1 и T_2 можно умножать на ненулевые числа, то считаем, что выполнены соотношения

$$C^2 = S^2 = I_n.$$

Приходим к паре из класса ACCTM_3. Все возможные варианты рассмотрены. Теорема 2 полностью доказана. □

Из описания первых двух классов следует, что матрицы их представителей вырожденны.

§5. Описание антикоммутирующих симметричной и кососимметричной теплицевых матриц

Следующая задача также будет важна для исследования нашей основной проблемы.

Задача об антикоммутировании симметричной и кососимметричной теплицевых матриц заключается в описании пар, составленных из симметричной и кососимметричной теплицевых матриц T_1 и T_2 таких, что

$$T_1 T_2 + T_2 T_1 = 0. \tag{22}$$

Решение данной задачи дается следующим утверждением.

Теорема 3. *Ненулевые симметричная теплицева матрица T_1 и кососимметричная теплицева матрица T_2 антикоммутируют тогда и только тогда, когда они принадлежат одному из следующих классов:*

Класс АСКТМ_1. *Матрицы T_1 и T_2 – циркулянты, делящие нуль.*

Класс АСКТМ_2. *Матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, делящие нуль.*

Класс АСКТМ_3. *Матрицы T_1 и T_2 имеют вид*

$$T_1 = \alpha \left(L + L^\top \right), \quad T_2 = \beta \left(L - L^\top \right),$$

где L – ненулевая строго нижнетреугольная теплицева матрица, для которой $L^2 = 0$.

Класс АСКТМ_4. *Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами*

$$T_1 = \alpha C, \quad T_2 = \beta \left(S - CSC \right).$$

Здесь C – симметричный инволютивный циркулянт, S – косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C.

Класс АСКТМ_5. *Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами*

$$T_1 = \alpha S, \quad T_2 = \beta \left(C - SCS \right).$$

Здесь S – симметричный инволютивный косой циркулянт, C – циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S.

Класс ACKTM_6. *Порядок n – четное число. Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами*

$$T_1 = \alpha\left(C - SCS\right), \quad T_2 = \beta S,$$

где S – кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C – циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S.

Класс ACKTM_7. *Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами*

$$T_1 = \alpha\left(Z + Z^\top\right), \quad T_2 = \beta\left(Z - Z^\top\right),$$

где Z – инволютивный ϕ-циркулянт, причем $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$.

Доказательство. Если матрица T_1 является скалярной, то T_2 будет нулевой. Получаем противоречие с условием теоремы. Далее считаем, что обе матрицы нескалярные.

Если обе матрицы T_1 и T_2 – циркулянты, то, будучи перестановочными, они должны делить нуль. Получаем класс ACKTM_1.

Аналогично, если T_1 и T_2 – косые циркулянты, то, вследствие одновременной диагонализуемости, они должны делить нуль. Получаем класс ACKTM_2.

Рассмотрим общий случай. Обозначим элементы первой строки матрицы T_1 через a_0, a_1, …, a_{n-1}, а элементы первого столбца – через $a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы T_2 обозначим через 0, b_1, …, b_{n-1}, а элементы первого столбца – через 0, $b_{-1}, \ldots, b_{-(n-1)}$.

Запишем матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1, \quad T_2 = \widehat{T}_2,$$

где $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ имеют нулевую главную диагональ, и подставим эти выражения в уравнение (22):

$$\left(a_0 I_n + \widehat{T}_1\right)\widehat{T}_2 + \widehat{T}_2\left(a_0 I_n + \widehat{T}_1\right) = 0.$$

После упрощения получаем

$$\widehat{T}_1\widehat{T}_2 + \widehat{T}_2\widehat{T}_1 = -2a_0\widehat{T}_2. \tag{23}$$

Правая часть является теплицевой матрицей, значит, и левая часть должна быть теплицевой:

$$\left\{\widehat{T}_1\widehat{T}_2 + \widehat{T}_2\widehat{T}_1\right\}_{k,m} = \left\{\widehat{T}_1\widehat{T}_2 + \widehat{T}_2\widehat{T}_1\right\}_{k+1,m+1}, \quad k,m = 1,\ldots,n-1.$$

Подробная запись последнего равенства

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{k,l}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{l,m}+\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{k,l}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{l,m}$$
$$-\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{k+1,l}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{l,m+1}-\sum_{l=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{k+1,l}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{l,m+1}=0,$$

в силу теплицевости T_1 и T_2, эквивалентна условию

$$\sum_{l=1}^{n}a_{l-k}b_{m-l}+\sum_{l=1}^{n}b_{l-k}a_{m-l}-\sum_{l=1}^{n}a_{l-k-1}b_{m+1-l}-\sum_{l=1}^{n}b_{l-k-1}a_{m+1-l}=0.$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p=l$ в первой и второй суммах и $p=l-1$ в третьей и четвертой:

$$\sum_{p=1}^{n}a_{p-k}b_{m-p}+\sum_{p=1}^{n}b_{p-k}a_{m-p}-\sum_{p=0}^{n-1}a_{p-k}b_{m-p}-\sum_{p=0}^{n-1}b_{p-k}a_{m-p}=0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{n-k}b_{-(n-m)}-a_{-k}b_m+b_{n-k}a_{-(n-m)}-b_{-k}a_m=0,$$

которое, в силу симметричности T_1 и кососимметричности T_2, равносильно соотношению

$$a_{n-k}b_{n-m}-b_{n-k}a_{n-m}=b_ka_m-a_kb_m. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение две вспомогательные $(n-1)\times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ формулами

$$\mathcal{F}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1}\\ a_{n-2} & b_{n-2}\\ \vdots & \vdots\\ a_1 & b_1\end{bmatrix},\quad \mathcal{G}=\begin{bmatrix} b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\\ \vdots & \vdots\\ b_{n-1} & a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Определим величины

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km}=\det\begin{pmatrix} a_{n-k} & b_{n-k}\\ a_{n-m} & b_{n-m}\end{pmatrix}=a_{n-k}b_{n-m}-a_{n-m}b_{n-k},$$
$$\triangle^{\mathcal{G}}_{km}=\det\begin{pmatrix} b_k & a_k\\ b_m & a_m\end{pmatrix}=b_ka_m-b_ma_k.$$

Теперь условия (24) можно записать в виде

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km}=\triangle^{\mathcal{G}}_{km}. \tag{25}$$

Вводя векторы

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})^\top, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})^\top,$$

можем представить матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как

$$\mathcal{F} = [\ \mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\ ], \quad \mathcal{G} = [\ b \mid a\ ].$$

По условиям рассматриваемого случая, матрицы T_1 и T_2 не являются диагональными. Поэтому матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не имеют нулевых столбцов, и, следовательно, ранг каждой из них не меньше единицы. В силу (25), возможны лишь два случая: $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$ и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$

Пусть $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$. Тогда (ненулевые) векторы a и b должны быть линейно зависимы. Положим $b = \gamma a$. Определим L как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу с первым столбцом $(0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Поскольку $a \neq 0$, то $L \neq 0$. Теперь $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ можно записать в виде

$$\widehat{T}_1 = L + L^\top, \quad \widehat{T}_2 = \gamma L - \gamma L^\top.$$

Подставляя эти выражения в (23), находим

$$\gamma\left(L + L^\top\right)\left(L - L^\top\right) + \gamma\left(L - L^\top\right)\left(L + L^\top\right) = -2a_0\gamma\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 - LL^\top + L^\top L - \left(L^\top\right)^2 + L^2 + LL^\top - L^\top L - \left(L^\top\right)^2 = -2a_0\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 - \left(L^\top\right)^2 = -a_0\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 + a_0 L = \left(L^\top\right)^2 + a_0 L^\top.$$

Матрица в левой части этого равенства строго нижнетреугольная, а матрица в правой части строго верхнетреугольная, поэтому

$$L^2 + a_0 L = 0,$$

или

$$L\left(L + a_0 I_n\right) = 0.$$

Если $a_0 \neq 0$, то матрица $L + a_0 I_n$ невырожденна, а тогда $L = 0$, что противоречит условиям данного случая. Следовательно, $a_0 = 0$ и $L^2 = 0$. Возвращаясь к исходным матрицам T_1 и T_2, получаем пару из класса ACKTM_3.

Пусть теперь $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$. Тогда найдется 2×2-матрица

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{26}$$

с определителем, равным единице, такая, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{G}W. \tag{27}$$

В данном случае $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}\mathcal{P}_2$, поэтому, умножив равенство (27) слева на $\mathcal{P}_{n-1}$, а справа на $\mathcal{P}_2$, получим

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2. \tag{28}$$

Из (28) выводим

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{n-1}\left(\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2\right)W\mathcal{P}_2 = \mathcal{G}\left(W\mathcal{P}_2\right)^2.$$

Таким образом,

$$\mathcal{G}\left(I_2 - \left(W\mathcal{P}_2\right)^2\right) = 0.$$

Поскольку $\mathcal{G}$ – матрица полного ранга, это равенство возможно лишь при условии, что $\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = I_2$.

Используя (26), находим

$$W\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

и

$$\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha\delta & \alpha\left(\beta+\gamma\right) \\ \delta\left(\beta+\gamma\right) & \gamma^2 + \alpha\delta \end{pmatrix}.$$

Матричное равенство $\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = I_2$ дает скалярные соотношения

$$\begin{cases} \beta^2 + \alpha\delta \ = 1, \\ \alpha\left(\beta+\gamma\right) = 0, \\ \delta\left(\beta+\gamma\right) = 0, \\ \gamma^2 + \alpha\delta \ = 1. \end{cases}$$

Условие $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ позволяет переписать их в виде

$$\begin{cases} \beta\left(\beta+\gamma\right) = 0, \\ \alpha\left(\beta+\gamma\right) = 0, \\ \delta\left(\beta+\gamma\right) = 0, \\ \gamma\left(\beta+\gamma\right) = 0. \end{cases}$$

Это же условие гарантирует, что не все числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ равны нулю. Следовательно, $\gamma = -\beta$, и матрицу W можно искать в виде

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее исследование разобьем на три случая: $\alpha = 0$, $\delta = 0$ и $\alpha\delta \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то $\beta = \pm 1$.

1) Пусть сначала $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Получаем условие $\mathcal{P}_{n-1}a = a$, означающее, что T_1 является симметричным циркулянтом $T_1 = C$. Перепишем соотношение (22), подставив в него представление $T_2 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$, где $\widetilde{C}$ – циркулянт, а $\widetilde{S}$ – косой циркулянт:

$$\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right) C + C\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = 0,$$

или

$$\widetilde{S}C + C\widetilde{S} = -2C\widetilde{C},$$

или, в силу косой симметрии матрицы $\widetilde{S}$,

$$\widetilde{S}C - C\widetilde{S}^{\top} = -2C\widetilde{C}.$$

В правой части стоит циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть циркулянтом. Для анализа этого требования используем лемму 8. Так как в задаче об антикоммутировании обе матрицы T_1 и T_2 определяются с точностью до скалярных множителей, то без ограничения общности можно считать, что циркулянт C есть инволюция. В этом случае получаем

$$\widetilde{C} = -\frac{1}{2}\widetilde{S} - \frac{1}{2}C\widetilde{S}C.$$

В терминах исходных матриц имеем

$$T_1 = C,$$

$$T_2 = \widetilde{C} + \widetilde{S} = \widetilde{S} - \frac{1}{2}\widetilde{S} - \frac{1}{2}C\widetilde{S}C = \frac{1}{2}\left(\widetilde{S} - C\widetilde{S}C\right).$$

Приходим к паре из класса АСКТМ_4.

2) Если $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то выполнено соотношение $\mathcal{P}_{n-1}a = -a$, т.е. T_1 является симметричным косым циркулянтом $T_1 = S$. Положим $T_2 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$ и подставим это выражение в (22):

$$\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right) S + S\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = 0.$$

В результате имеем

$$\widetilde{C}S + S\widetilde{C} = -2\widetilde{S}S,$$

или, в силу косой симметрии матрицы $\widetilde{C}$,

$$\widetilde{C}S - S\widetilde{C}^{\top} = -2\widetilde{S}S.$$

В правой части стоит косой циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть косым циркулянтом. Это ограничение приводит к условиям, описываемым леммой 10. Так как в задаче об антикоммутировании обе матрицы T_1 и T_2 определяются с точностью до скалярных множителей, то без ограничения общности можно считать, что косой циркулянт S есть инволюция.

В данной ситуации

$$\widetilde{S} = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S\widetilde{C}S.$$

В терминах исходных матриц имеем

$$T_1 = S,$$
$$T_2 = \widetilde{C} + \widetilde{S} = \widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S\widetilde{C}S = \frac{1}{2}\left(\widetilde{C} - S\widetilde{C}S\right).$$

Приходим к паре из класса АСКТМ_5.

Если $\delta = 0$, то снова $\beta = \pm 1$.

1) Пусть $\delta = 0$ и $\beta = -1$, тогда имеем равенство $\mathcal{P}_{n-1}b = -b$, из которого следует, что T_2 является кососимметричным циркулянтом: $T_2 = C$. Положим $T_1 = a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}$ и подставим это выражение в (22):

$$\left(a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) C + C \left(a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = 0,$$

или

$$C\widetilde{S} - \widetilde{S}C^\top = -2C(a_0 I_n + \widetilde{C}).$$

В соответствии с этим равенством матрица $C\widetilde{S} - \widetilde{S}C^\top$ должна быть циркулянтом. Из леммы 11 выводим, что $\widetilde{S} = 0$, а потому T_1 и T_2 – циркулянты. Приходим к паре из класса АСКТМ_1.

2) Если $\delta = 0$ и $\beta = 1$, то справедливо соотношение $\mathcal{P}_{n-1}b = b$, показывающее, что T_2 является кососимметричным косым циркулянтом: $T_2 = S$. Положим $T_1 = a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}$ и подставим это выражение в (22):

$$\left(a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) S + S \left(a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = 0.$$

Приходим к условию

$$S\widetilde{C} - \widetilde{C}S^\top = -2S(a_0 I_n + \widetilde{S}). \tag{29}$$

Из этого равенства следует, что матрица $S\widetilde{C} - \widetilde{C}S^\top$ должна быть косым циркулянтом. Применим теперь лемму 12.

В случае а) получаем, что $\widetilde{C} = 0$ и, значит, T_1 и T_2 – косые циркулянты. Приходим к паре из класса АСКТМ_2.

Второй случай более интересен. Он возможен только для четного n. Теперь матрица S должна быть скалярным кратным кососимметричной инволюции. Из (29) получаем

$$a_0 I_n + \widetilde{S} = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S\widetilde{C}S.$$

Для исходной матрицы T_1 имеем

$$T_1 = a_0 I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S} = \widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S\widetilde{C}S = \frac{1}{2}\left(\widetilde{C} - S\widetilde{C}S\right).$$

Приходим к паре из класса АСКТМ_6.

Сделаем важное замечание относительно класса АСКТМ_6.

Замечание 1. Если матрица T_2 – кососимметричный косой циркулянт, то разложение T_1 в сумму циркулянта и косого циркулянта имеет вид

$$T_1 = \widetilde{C} - \left[\frac{1}{2}\widetilde{C} + \frac{1}{2}S\widetilde{C}S\right].$$

Пусть теперь $\alpha\delta \neq 0$. Рассмотрим уравнение (23) и умножим обе его части на $\xi\nu$:

$$(\xi T_1)(\nu T_2) + (\nu T_2)(\xi T_1) = -2(\xi a_0)(\nu T_2).$$

Очевидно, что если пара матриц T_1 и T_2 является решением задачи об антикоммутировании, то решением будет и пара $(\xi T_1, \nu T_2)$. При этом вектор a перейдет в ξa, а вектор b – в νb.

Запишем соотношение (27) в виде

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\,] = [\,b \mid a\,]W$$

и преобразуем его к равенству

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\,]\begin{pmatrix} \xi & \\ & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & \\ & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix} = [\,b \mid a\,]\begin{pmatrix} \nu & \\ & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix},$$

которое эквивалентно условию

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\,]\begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & \\ & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix} = [\,\nu b \mid \xi a\,]\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Умножим последнее равенство справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\xi, \nu)$:

$$[\ \mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\ ] = [\ \nu b \ |\xi a\ ] \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \\ & \nu \end{pmatrix}.$$

После упрощения получим

$$[\ \mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\ ] = [\ \nu b \ |\xi a\ ] \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\nu}\alpha & \beta \\ -\beta & \frac{\nu}{\xi}\delta \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\alpha\delta \neq 0$, поэтому параметры ξ и ν можем выбрать из условия

$$\frac{\xi}{\nu}\alpha = \frac{\nu}{\xi}\delta,$$

которое равносильно соотношению

$$\left(\frac{\xi}{\nu}\right)^2 = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что если в матрице W диагональные элементы ненулевые, то можно считать, что они равны и W имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Приходим к условию

$$[\ \mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\ ] = [\ b \mid a\ ] \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{31}$$

При этом $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Введем теплицеву матрицу $\widetilde{T} = T_1 + T_2$, тогда условие антикоммутирования T_1 и T_2 можно записать как

$$\frac{\widetilde{T} + \widetilde{T}^{\top}}{2}\,\frac{\widetilde{T} - \widetilde{T}^{\top}}{2} + \frac{\widetilde{T} - \widetilde{T}^{\top}}{2}\,\frac{\widetilde{T} + \widetilde{T}^{\top}}{2} = 0,$$

что эквивалентно соотношению

$$\widetilde{T}^2 - \widetilde{T}\widetilde{T}^{\top} + \widetilde{T}^{\top}\widetilde{T} - \left(\widetilde{T}^{\top}\right)^2 + \widetilde{T}^2 + \widetilde{T}\widetilde{T}^{\top} - \widetilde{T}^{\top}T - \left(\widetilde{T}^{\top}\right)^2 = 0,$$

или

$$\widetilde{T}^2 = \left(\widetilde{T}^2\right)^{\top}.$$

Приходим к задаче описания теплицевых матриц, квадрат которых является симметричной матрицей, а поддиагональные и наддиагональные элементы удовлетворяют определенным условиям. Для вывода этих условий обозначим элементы первого столбца матрицы $\widetilde{T}$ через a_0, t_{-1}, t_{-2}, …, $t_{-(n-1)}$, а элементы первой строки – через a_0, t_1, t_2, …, t_{n-1}. Введем векторы

$$\begin{aligned} u_1 &= (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})^\top, \\ u_2 &= \left(t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-(n-1)}\right)^\top. \end{aligned}$$

Так как $\widetilde{T} = T_1 + T_2$, то

$$u_1 = a + b, \quad u_2 = a - b.$$

Перепишем равенство (31) в виде

$$\begin{aligned} &[\, \mathcal{P}_{n-1} a \mid \mathcal{P}_{n-1} b \,] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\qquad = [\, b \mid a \,] \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}(a-b) \mid \mathcal{P}_{n-1}(a+b) \,] = [\, a+b \mid a-b \,] \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}.$$

С учетом выражений для u_1 и u_2 имеем

$$[\, \mathcal{P}_{n-1} u_2 \mid \mathcal{P}_{n-1} u_1 \,] = [\, u_1 \mid u_2 \,] \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Наряду с матрицей $\widetilde{T}$ определим матрицу

$$Z = \widetilde{T} + i\widetilde{T}^\top. \qquad (33)$$

Равенство $\widetilde{T}^2 = \left(\widetilde{T}^\top\right)^2$ эквивалентно соотношению $Z^2 = \left(Z^\top\right)^2$. Действительно,

$$\begin{aligned} Z^2 - \left(Z^\top\right)^2 &= \left(\widetilde{T} + i\widetilde{T}^\top\right)^2 - \left(\left(\widetilde{T} + i\widetilde{T}^\top\right)^\top\right)^2 \\ &= \widetilde{T}^2 - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 + i\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^\top + \widetilde{T}^\top\widetilde{T}\right) - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 \\ &\qquad + \widetilde{T}^2 - i\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^\top + \widetilde{T}^\top\widetilde{T}\right) = 2\left(\widetilde{T}^2 - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2\right). \end{aligned}$$

Из (33) следует, что матрицу $\widetilde{T}$ можно искать в виде

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2}Z - \frac{i}{2}Z^\top.$$

Исследуем условие $Z^2 = \left(Z^\top\right)^2$ на матрицу Z. Обозначим через v_1 вектор, состоящий из внедиагональных элементов первой строки матрицы Z, а через v_2 – вектор, состоящий из внедиагональных элементов первого столбца этой матрицы. Тогда

$$v_1 = u_1 + iu_2, \quad v_2 = u_2 + iu_1. \tag{34}$$

Переписав равенство (32) в виде

$$\begin{gathered} \left[\ \mathcal{P}_{n-1}u_2 \mid \mathcal{P}_{n-1}u_1\ \right] \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ = \left[\ u_1 \mid u_2\ \right] \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \end{gathered}$$

приходим к соотношению

$$\begin{gathered} \left[\ \mathcal{P}_{n-1}\left(u_2 + iu_1\right) \mid \mathcal{P}_{n-1}\left(u_1 + iu_2\right)\ \right] \\ = \left[\ u_1 + iu_2 \mid u_2 + iu_1\ \right] \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{gathered}$$

В силу (34) имеем

$$\left[\ \mathcal{P}_{n-1}v_2 \mid \mathcal{P}_{n-1}v_1\ \right] = \left[\ v_1 \mid v_2\ \right] \begin{pmatrix} -\left(\beta - i\alpha\right) & 0 \\ 0 & -\left(\beta + i\alpha\right) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\phi = -\left(\beta - i\alpha\right)$, тогда предыдущее равенство означает, что

$$v_2 = \phi \mathcal{P}_{n-1} v_1.$$

Тем самым матрица Z является ϕ-циркулянтом. При этом она должна удовлетворять соотношению $Z^2 = \left(Z^\top\right)^2$.

Условие, что матрица W имеет определитель, равный единице, можно записать как

$$-(\beta + i\alpha)[-(\beta - i\alpha)] = \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{35}$$

Покажем, что $\phi \neq \pm 1$. Предположим, что $\phi = 1$, т.е.

$$-(\beta - i\alpha) = 1$$

и, с учетом (35),

$$-(\beta + i\alpha) = 1.$$

Отсюда имеем равенство $\alpha = 0$, которое противоречит условию $\alpha \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай $\phi = -1$, т.е.

$$-(\beta - i\alpha) = -1$$

и, с учетом (35),

$$-(\beta + i\alpha) = -1.$$

Снова получаем соотношение $\alpha = 0$, противоречащее условию $\alpha \neq 0$ исследуемого случая. Значит, $\phi \neq \pm 1$.

Рассмотрим равенство

$$Z^2 = \left(Z^\top\right)^2.$$

В левой части стоит ϕ-циркулянт, в правой – $(1/\phi)$-циркулянт. Так как $\phi \neq \pm 1$, последнее равенство возможно, лишь если

$$Z^2 = \left(Z^\top\right)^2 = \xi I_n.$$

Представив матрицу Z в виде $Z = \sqrt{\xi} Z_0$, приходим к условию $Z_0^2 = I_n$, означающему, что матрица Z_0 является инволюцией.

Таким образом, в данном случае имеем

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2} Z - \frac{i}{2} Z^\top,$$

где $Z = \kappa Z_0$, Z_0 – инволютивный ϕ-циркулянт и κ – комплексное число. Заметим, что если ϕ и κ фиксированы, то существует только конечное число подходящих матриц Z.

Вспомним, что T_1 и T_2 – симметричная и кососимметричная части матрицы $\widetilde{T}$. Это означает выполнение соотношений

$$T_1 = \frac{1-i}{4}\left(Z + Z^\top\right), \qquad T_2 = \frac{1+i}{4}\left(Z - Z^\top\right).$$

Полученные матрицы составляют пару из класса ACKTM_7. Теорема 3 доказана. $\square$

§6. Задача о тройках матриц

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу.

Задача о тройках (ЗОТ) заключается в описании всех троек теплицевых матриц (T_1, T_2, T_3) таких, что T_1 и T_2 – симметричные матрицы, T_3 – кососимметричная матрица, а пары (T_1, T_2) и (T_1, T_3) антикоммутируют.

Теорема 4. *Ненулевые теплицевы матрицы T_1, T_2 и T_3 являются решением задачи о тройках тогда и только тогда, когда они принадлежат какому-либо из следующих классов:*

Класс ЗОТ_1. *Матрицы T_1, T_2 и T_3 – циркулянты, при этом пары (T_1, T_2) и (T_1, T_3) делят нуль, т.е. $T_1 T_2 = 0$ и $T_1 T_3 = 0$.*

Класс ЗОТ_2. *Матрицы T_1, T_2 и T_3 – косые циркулянты, при этом пары (T_1, T_2) и (T_1, T_3) делят нуль.*

Доказательство. Для доказательства теоремы проанализируем решения задач об описании симметричных антикоммутирующих теплицевых матриц и о классификации антикоммутирующих теплицевых матриц, одна из которых симметрична, а другая кососимметрична. Выделим множество тех решений обеих задач, в которых симметричные составляющие совпадают.

Заметим, что T_1 не может быть ненулевой скалярной матрицей, так как тогда матрицы T_2 и T_3 нулевые.

В соответствии с теоремой 2, рассмотрим три возможных случая.

I. T_1 – вырожденный нескалярный симметричный циркулянт. Покажем, что в этом случае найдется симметричный циркулянт T_2 такой, что пара (T_1, T_2) делит нуль. Представим T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n,$$

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы. Условия симметричности матриц T_1 и T_2 имеют вид

$$d_j^{(1)} = d_{n+2-j}^{(1)}, \quad j = 2, \ldots, n, \tag{36}$$

$$d_j^{(2)} = d_{n+2-j}^{(2)}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{37}$$

Положим $r = n - \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. В силу (36), всякий симметричный циркулянт T_1 однозначно определяется своими первыми r собственными значениями. Пусть задана матрица T_1 как вырожденный нескалярный симметричный циркулянт. Тогда среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, r$, есть как нулевые, так и ненулевые. Выберем числа $d_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, r$, из условий $d_j^{(1)} d_j^{(2)} = 0$, $j = 1, \ldots, r$, причем так, что не все числа $d_j^{(2)}$ являются нулевыми. Тогда соотношения (37) полностью определяют матрицу D_2 и, значит, T_2.

Теперь выясним, какие из кососимметричных теплицевых матриц могут антикоммутировать с T_1.

Если T_1 делит нуль с кососимметричным циркулянтом T_3 как пара класса АСКТМ_1, то тройка (T_1, T_2, T_3) принадлежит классу ЗОТ_1. Покажем, что такие матрицы T_3 найдутся. Запишем T_3 как

$$T_3 = F_n^* D_3 F_n,$$

где $D_3 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \ldots, d_n^{(3)}\right)$ – диагональная матрица. Условия косой симметрии матрицы T_3 имеют вид

$$\begin{cases} d_1^{(3)} = 0, \\ d_j^{(3)} = -d_{n+2-j}^{(3)}, \quad j = 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{38}$$

Если $n = 2k$, то $d_{k+1}^{(3)} = 0$. Напомним, что T_1 есть вырожденный нескалярный симметричный циркулянт и что поэтому среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, r$, есть как нулевые, так и ненулевые. Наложим еще дополнительное ограничение, что среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 2, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$, есть нулевые. Выберем числа $d_j^{(3)}$, $j = 2, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$, из условий $d_j^{(1)} d_j^{(3)} = 0$, $j = 2, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$, причем так, что не все из этих чисел являются нулевыми. Тогда соотношения (38) полностью определяют матрицу D_3 и, следовательно, матрицу T_3.

Так как T_1 – нескалярный циркулянт, то он не является косым циркулянтом, поэтому пересечение с классом АСКТМ_2 невозможно.

Рассмотрим пересечение с классом АСКТМ_3. Тогда

$$T_1 = L + L^\top, \quad L^2 = 0.$$

В этом случае $t_0 = t_{-1} = t_{-2} = \ldots = t_{-k} = 0$, где $k = \lceil n/2 \rceil - 1$. Так как T_1 – симметричный циркулянт, то $t_{-j} = t_{-(n-j)}$, поэтому при $n = 2k + 1$ имеем $T_1 = 0$. Если же $n = 2k$, то T_1 должна быть матрицей

вида
$$T_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}.$$
Матрица такого вида может быть вырожденной только при $\alpha = 0$, т.е. если $T_1 = 0$. Таким образом, пересечение с классом АСКТМ_3 пусто.

Так как T_1 – вырожденная нескалярная матрица, то она не может быть скалярным кратным инволюции, поэтому пересечение с классами АСКТМ_4 и АСКТМ_5 пусто.

Теперь исследуем пересечение с классом АСКТМ_6. Согласно замечанию 1, матрицу T_1 можно записать как
$$T_1 = C - \frac{1}{2}\left[C + SCS\right],$$
где S – кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C – циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S; при этом матрица $C + SCS$ – косой циркулянт и $n = 2k$. Положим
$$S = L - L^\top, \quad L \neq 0,$$
где L – строго нижнетреугольная матрица. Тогда
$$C = c_0 I_n + L + L^\top.$$

Так как матрица T_1 должна быть циркулянтом, то
$$C + SCS = \alpha I_n$$
для некоторого числа α. Введем вспомогательный циркулянт C_1 формулой
$$C = C_1 + \frac{\alpha}{2} I_n,$$
тогда
$$C_1 + SC_1S = 0,$$
или
$$SC_1 - C_1S^\top = 0.$$
В силу леммы 8, циркулянт C_1 является симметричной инволюцией. Используя представления для C и C_1, можем записать
$$C_1 = \beta I_n + L + L^\top, \quad \beta = c_0 - \frac{\alpha}{2}.$$
Покажем, что $\beta = 0$. Условие инволютивности матрицы S имеет вид
$$L^2 - LL^\top - L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = I_n,$$

или

$$LL^\top + L^\top L = L^2 + \left(L^\top\right)^2 - I_n. \tag{39}$$

Распишем теперь условие инволютивности матрицы C_1:

$$\beta^2 I_n + 2\beta L + 2\beta L^\top + L^2 + LL^\top + L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = I_n,$$

или, с учетом (39),

$$\beta^2 I_n + 2\beta L + 2\beta L^\top + 2L^2 + 2\left(L^\top\right)^2 = 2I_n,$$

или

$$\beta^2 I_n + 2L\left(\beta I_n + L\right) + 2L^\top\left(\beta I_n + L^\top\right) = 2I_n.$$

Отсюда получаем, что $L(\beta I_n + L) = 0$. Если предположить, что $\beta \neq 0$, то матрица $\beta I_n + L$ невырожденна, а тогда $L = 0$. Поэтому $\beta = 0$ и должно выполняться соотношение

$$L^2 + \left(L^\top\right)^2 = I_n.$$

Это равенство невозможно, так как левая часть имеет нулевую главную диагональ. Поэтому пересечение с классом ACKTM_6 пусто.

Исследуем теперь пересечение с классом ACKTM_7. Пусть Z – инволютивный ϕ-циркулянт такой, что матрица $C = Z + Z^\top$ – вырожденный циркулянт. Представим Z в виде суммы циркулянта C_1 и косого циркулянта S_1:

$$Z = C_1 + S_1.$$

Для обеспечения единственности такого разложения потребуем, чтобы косой циркулянт S_1 имел нулевую диагональ. Из принятого разложения выводим

$$Z + Z^\top = C_1 + C_1^\top + S_1 + S_1^\top.$$

Условие, что $C = Z + Z^\top$ есть циркулянт, можно записать как $S_1^\top = -S_1$. Тогда $C = Z + Z^\top = C_1 + C_1^\top$. Запишем соотношение, означающее инволютивность матрицы Z:

$$C_1^2 + C_1 S_1 + S_1 C_1 + S_1^2 = I_n.$$

Транспонируя его, получаем

$$\left(C_1^\top\right)^2 - C_1^\top S_1 - S_1 C_1^\top + S_1^2 = I_n.$$

Разность двух последних соотношений имеет вид

$$\left(C_1^2 - \left(C_1^\top\right)^2\right) + \left(C_1 + C_1^\top\right) S_1 + S_1 \left(C_1 + C_1^\top\right) = 0,$$

или

$$S_1\left(C_1+C_1^{\top}\right)-\left(C_1+C_1^{\top}\right)S_1^{\top}=\left(C_1^{\top}\right)^2-C_1^2.$$

В правой части стоит циркулянт, значит, и матрица в левой части обязана быть циркулянтом. По лемме 8, матрица $C=Z+Z^{\top}=C_1+C_1^{\top}$ должна быть скалярным кратным инволютивного циркулянта, что противоречит условию вырожденности этой матрицы. Тем самым пересечение с классом АСКТМ_7 пусто.

II. T_1 – вырожденный нескалярный косой циркулянт. В этом случае найдется симметричный косой циркулянт T_2 такой, что пара (T_1, T_2) делит нуль. Действительно, представим матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1=G_{-1}F_n^*D_1F_nG_{-1}^*,$$

$$T_2=G_{-1}F_n^*D_2F_nG_{-1}^*,$$

где $D_1=\operatorname{diag}\left(d_1^{(1)},d_2^{(1)},\dots,d_n^{(1)}\right)$ и $D_2=\operatorname{diag}\left(d_1^{(2)},d_2^{(2)},\dots,d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы. Из свойства симметрии теплицевых косых циркулянтов T_1 и T_2 вытекает, что

$$\begin{cases} d_1^{(1)}=d_2^{(1)}, \\ d_j^{(1)}=d_{n+3-j}^{(1)}, \quad j=3,\dots,n, \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} d_1^{(2)}=d_2^{(2)}, \\ d_j^{(2)}=d_{n+3-j}^{(2)}, \quad j=3,\dots,n. \end{cases} \tag{41}$$

Если теперь определить число r как $r=n-\lfloor n/2\rfloor$, то, в силу (40), всякий симметричный косой циркулянт T_1 однозначно определяется r собственными значениями с номерами $1,3,4,\dots,r+1$. Пусть задана матрица T_1 как вырожденный нескалярный симметричный косой циркулянт. Тогда среди чисел $d_1^{(1)}$ и $d_j^{(1)}$, $j=3,\dots,r+1$, есть как нулевые, так и ненулевые. Выберем числа $d_1^{(2)}$ и $d_j^{(2)}$, $j=3,\dots,r+1$, из условий, что $d_j^{(1)}d_j^{(2)}=0$, $j=1,3,\dots,r+1$, и не все из них являются нулевыми. Тогда соотношения (41) полностью определяют матрицу D_2 и, значит, T_2.

Теперь исследуем вопрос о том, какие из кососимметричных теплицевых матриц могут антикоммутировать с T_1.

Так как T_1 – нескалярный косой циркулянт, то он не является циркулянтом, поэтому пересечение с классом АСКТМ_1 невозможно.

Если T_1 делит нуль с кососимметричным косым циркулянтом T_3 как пара класса АСКТМ_2, то тройка (T_1, T_2, T_3) принадлежит классу

ЗОТ_2. Покажем, что такие матрицы T_3 найдутся. Запишем матрицу T_3 как

$$T_3 = G_{-1}F_n^* D_3 F_n G_{-1}^*,$$

где $D_3 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \ldots, d_n^{(3)}\right)$ – диагональная матрица. Условия косой симметрии матрицы T_3 имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^{(3)} = -d_2^{(3)}, \\ d_j^{(3)} = -d_{n+3-j}^{(3)}, \quad j = 3, \ldots, n. \end{array} \right. \tag{42}$$

Если $n = 2k + 1$, то $d_{k+2}^{(3)} = 0$. Напомним, что T_1 есть вырожденный нескалярный симметричный косой циркулянт и что поэтому среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 1, 3, 4, \ldots, r + 1$, есть как нулевые, так и ненулевые. Наложим еще дополнительное ограничение, что среди чисел $d_j^{(1)}$, $j = 1, 3, 4, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$, есть нулевые. Выберем числа $d_j^{(3)}$, $j = 1, 3, 4, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$, из условий $d_j^{(1)} d_j^{(3)} = 0$, $j = 1, 3, 4, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$, причем так, что не все из этих чисел $d_j^{(3)}$ являются нулевыми. Тогда соотношения (42) полностью определяют матрицу D_3 и, следовательно, матрицу T_3.

Изучим теперь пересечение с классом АСКТМ_3. Здесь

$$T_1 = L + L^\top, \quad L^2 = 0.$$

Поэтому $t_0 = t_{-1} = t_{-2} = \ldots = t_{-k} = 0$, где $k = \lceil n/2 \rceil - 1$. Так как T_1 – симметричный косой циркулянт, то $t_{-j} = -t_{-(n-j)}$ для всех j, а потому $T_1 = 0$. Таким образом, пересечение с классом АСКТМ_3 пусто.

Поскольку T_1 – вырожденная нескалярная матрица, то она не может быть скалярным кратным инволюции. Следовательно, пересечение с классами АСКТМ_4 и АСКТМ_5 пусто.

Теперь рассмотрим пересечение с классом АСКТМ_6. Согласно замечанию 1, матрицу T_1 можно записать как

$$T_1 = C - \frac{1}{2}\left[C + SCS\right],$$

где S – кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C – циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S; при этом матрица $C + SCS$ – косой циркулянт. Так как T_1 – косой циркулянт, то C – скалярная матрица и, следовательно, T_1 – скалярная матрица. В силу вырожденности

T_1 заключаем, что $T_1 = 0$. Это означает, что пересечение с классом *АСКТМ_6* пусто.

Исследуем теперь пересечение с классом АСКТМ_7. Пусть Z – инволютивный ϕ-циркулянт такой, что матрица $S = Z + Z^\top$ есть вырожденный косой циркулянт. Представим Z в виде суммы циркулянта C_1 и косого циркулянта S_1:

$$Z = C_1 + S_1.$$

Для обеспечения единственности этого разложения потребуем, чтобы циркулянт C_1 имел нулевую диагональ. Тогда

$$Z + Z^\top = C_1 + C_1^\top + S_1 + S_1^\top.$$

Условие, что $S = Z + Z^\top$ – косой циркулянт, можно записать как $C_1^\top = -C_1$. Тогда $S = Z + Z^\top = S_1 + S_1^\top$. Запишем соотношение, означающее инволютивность матрицы Z:

$$C_1^2 + C_1 S_1 + S_1 C_1 + S_1^2 = I_n.$$

Транспонируя его, получаем

$$C_1^2 - S_1^\top C_1 - C_1 S_1^\top + \left(S_1^\top\right)^2 = I_n.$$

Разность двух последних соотношений имеет вид

$$C_1\left(S_1 + S_1^\top\right) - \left(S_1 + S_1^\top\right) C_1^\top = \left(\left(S_1^\top\right)^2 - S_1^2\right).$$

В правой части стоит косой циркулянт, значит, и матрица в левой части обязана быть косым циркулянтом. По лемме 10, матрица $S = Z + Z^\top = S_1 + S_1^\top$ должна быть скалярным кратным инволютивного косого циркулянта, что противоречит ее вырожденности. Поэтому пересечение с классом АСКТМ_7 пусто.

III. Пусть теперь $T_1 = \widehat{C} + \widehat{S}$, где $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ – инволютивные симметричные циркулянт и косой циркулянт. Сама матрица T_1 не является ни циркулянтом, ни косым циркулянтом. Поэтому пересечение с классами АСКТМ_1, АСКТМ_2, АСКТМ_4 и АСКТМ_5 пусто.

Довольно сложным оказывается анализ пересечения с классом АСКТМ_3. В этом случае имеем $T_1 = \widehat{C} + \widehat{S}$ и одновременно $T_1 = L + L^\top$, где L – ненулевая строго нижнетреугольная теплицева матрица такая, что $L^2 = 0$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $n = 2r + 1$. Элементы в первых $n - r$ позициях первого столбца матрицы L равны нулю, а, значит, первые $n - r$ элементов первых столбцов в $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ противоположны по знаку. Поскольку матрицы $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ симметричны, последние r элементов первых столбцов в $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ совпадают и равны половинам соответствующих элементов первого столбца матрицы L. Определим векторы $y = \frac{1}{2}(Le_1)$ и $x = \widehat{C}e_1 - y$. Удобно представить y в виде $y = (0_{n-r}, \widehat{y})^\top$. Пусть $c_0 = \left\{\widehat{C}\right\}_{1,1}$. В силу симметрии матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$, имеем

$$x = \begin{pmatrix} c_0, & \mathcal{P}_r\widehat{y}, & 0_{n-r-1} \end{pmatrix}^\top,$$

$$\widehat{C}e_1 = x + y, \quad \widehat{S}e_1 = -x + y.$$

Из определений векторов x и y мы видим, что при любом нечетном n последние r компонент вектора x нулевые; в векторе y равны нулю первые $n - r$ компонент. Введем две вспомогательные симметричные теплицевы матрицы A и B с первыми столбцами соответственно x и y. Для наглядности приведем схематичный вид матриц A и B:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} * & * & * & * & & & \\ * & * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \\ & & & & & & \\ \hline * & & & & & & \\ * & * & & & & & \\ * & * & * & & & & \end{array}\right).$$

Тогда

$$\widehat{C} = B + A, \quad \widehat{S} = B - A.$$

Из условия инволютивности матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ выводим для их первых столбцов равенства

$$(B + A)(y + x) = e_1, \quad (B - A)(y - x) = e_1. \tag{43}$$

Отсюда следует, что

$$(B + A)(y + x) = (B - A)(y - x),$$

или

$$Ay + Bx = 0.$$

Поскольку L – ненулевая матрица, то и матрица B ненулевая и, следовательно, матрица A не является скалярной.

Представим матрицы A, B и векторы x, y в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_{(n-r)\times(n-r)} & B_1 \\ B_1^\top & 0_{r\times r} \end{pmatrix},$$
$$x = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ 0_r \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0_{n-r} \\ \widehat{y} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_2 – теплицева строго нижнетреугольная матрица. Из соотношения $Ay + Bx = 0$ выводим систему

$$\begin{cases} A_2\widehat{y} = 0, \\ A_1\widehat{y} + B_1^\top\widehat{x} = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $B_1 = 0$, откуда будет следовать, что $B = 0$. Пусть $q = \mathrm{rank}\ A_2$. Обозначим через $\widehat{A}_2$ невырожденную $q \times q$-подматрицу, расположенную в левом нижнем углу блока A_2. Введем q-мерные векторы $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_m$, где $m = [n/q]$, и, если $p = n - qm \neq 0$, то еще и векторы v_1 и v_2 размерности p, такие что

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ и $v_2 = 0$.

Выпишем более подробно второе уравнение системы:

$$\begin{pmatrix} * & \widehat{A}_2 & & & \\ * & * & \widehat{A}_2 & & \\ * & * & * & \widehat{A}_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{B}_1 & & & \\ \widehat{B}_2 & \widehat{B}_1 & & \\ \widehat{B}_3 & \widehat{B}_2 & \widehat{B}_1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0.$$

Каждый блок $\widehat{B}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, есть теплицева матрица с первым столбцом y_j.

Вследствие невырожденности подматрицы $\widehat{A}_2$ первое уравнение системы дает $y_1 = 0$. Поскольку $\widehat{B}_1$ – симметричная теплицева матрица с первым столбцом y_1, то $\widehat{B}_1 = 0$. Снова используя невырожденность подматрицы $\widehat{A}_2$, выводим из первых q строк второго уравнения, что $y_2 = 0$. Тем самым все элементы первого столбца и первой строки теплицевой матрицы $\widehat{B}_2$ равны нулю, а потому $\widehat{B}_2 = 0$.

Пусть уже установлено, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_{l-1} = 0$. Покажем, что $y_l = 0$. Так как $y_1 = y_2 = \ldots = y_{l-1} = 0$, то первые $(l-1)q$ строк матрицы $B_1^\top$ нулевые. Рассмотрим строки второго уравнения системы с номерами $(l-2)q+1$, $(l-2)q+2$, ..., $(l-1)q$. В матрице $B_1^\top$ строки с такими номерами нулевые, а потому уравнения в этих строках упрощаются к виду $A_1\widehat{y} = 0$. Вследствие предположения $y_1 = y_2 = \ldots = y_{l-1} = 0$ это соотношение в действительности означает, что $\widehat{A}_2 y_l = 0$, а потому $y_l = 0$. Продолжая подобным образом, заключаем, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$. Теперь для v_2 получаем уравнение $A_3 v_2 = 0$, где A_3 – ведущая подматрица порядка p в матрице $\widehat{A}_2$. Эта подматрица также невырожденна, а потому $v_2 = 0$. Итак, $y = 0$. Как следствие, равна нулю симметричная теплицева матрица B, в которой y является первым столбцом. Вместе с B равна нулю матрица L, которая, по исходному предположению, должна быть ненулевой. Это противоречие доказывает, что для нечетного n пересечение с классом $ACKTM_3$ пусто.

Пусть теперь $n = 2r$. Элементы в первых r позициях первого столбца матрицы L равны нулю, а, значит, первые r элементов первых столбцов в $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ противоположны. Поскольку матрицы $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ симметричны, последние $r-1$ элементов первых столбцов в $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ совпадают и равны половинам соответствующих элементов первого столбца матрицы L, $\{\widehat{S}\}_{r+1,1} = 0$.

Определим теперь три n-мерных вектора x, y и u по правилу

$$y_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \ldots, r+1, \\ \frac{1}{2}\{Le_1\}_j, & j = r+2, \ldots, n, \end{cases} \qquad u_j = \begin{cases} \{Le_1\}_{r+1}, & j = r+1, \\ 0, & j \neq r+1, \end{cases}$$

и $x = \widehat{C}e_1 - y - u$. Введем три вспомогательные симметричные теплицевы матрицы A, B и R с первыми столбцами соответственно x, y и u. Для наглядности приведем схематичный вид матриц A, B и R:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc} * & * & * & * & & & & \\ * & * & * & * & * & & & \\ * & * & * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & * & * & * & \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * \\ \hline & & * & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * & * \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc} & & & & & * & * & * \\ & & & & & & * & * \\ & & & & & & & * \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline * & & & & & & & \\ * & * & & & & & & \\ * & * & * & & & & & \end{array}\right),$$

$$
R = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc}
 & & & & * & & & \\
 & & & & & * & & \\
 & & & & & & * & \\
 & & & & & & & * \\
\hline
* & & & & & & & \\
\hline
 & * & & & & & & \\
 & & * & & & & & \\
 & & & * & & & &
\end{array}\right).
$$

Тогда

$$
\widehat{C} = B + A + R, \quad \widehat{S} = B - A.
$$

Из условия инволютивности матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ выводим для их первых столбцов равенства

$$
(B + A + R)(y + x + u) = e_1, \quad (B - A)(y - x) = e_1.
$$

Отсюда следует, что

$$
(B + A + R)(y + x + u) = (B - A)(y - x),
$$

или

$$
2Ay + 2Bx + Bu + Au + Ry + Rx + Ru = 0.
$$

Рассматривая данное соотношение для первой компоненты, видим, что $\{Ay\}_1 = \{Bx\}_1 = \{Bu\}_1 = \{Au\}_1 = \{Ry\}_1 = \{Rx\}_1 = 0$. Приходим к условию $\{Ru\}_1 = 0$, из которого следует, что $R = 0$ и $u = 0$. В результате условие инволютивности матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ имеет такой же вид, как и в случае нечетного порядка. Повторяя предыдущие рассуждения, снова получаем, что пересечение с классом АСКТМ_3 пусто.

Исследуем пересечение с классом АСКТМ_6. Матрица T_1 пары (T_1, T_3) должна удовлетворять соотношениям

$$
T_1 = C - \frac{1}{2}\left[C + SCS\right], \quad T_1 = \alpha(\widehat{C} + \widehat{S}).
$$

Здесь $\widehat{C}$ и $\widehat{S}$ – инволютивные симметричные циркулянт и косой циркулянт, S – инволютивный кососимметричный косой циркулянт, C – циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами S, и n – четное число. В силу замечания 1, матрица $C + SCS$ есть косой циркулянт, поэтому можно считать, что $C = \alpha\widehat{C}$ и, значит, C^2 является скалярной матрицей. Положим

$$
S = L - L^{\top},
$$

где L – теплицева строго нижнетреугольная матрица; тогда

$$C = c_0 I_n + L + L^\top.$$

Покажем, что $c_0 = 0$. Так как S – инволютивный кососимметричный косой циркулянт, то

$$L^2 - LL^\top - L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = I_n, \tag{44}$$

или

$$LL^\top + L^\top L = L^2 + \left(L^\top\right)^2 - I_n. \tag{45}$$

Условие, что C^2 – скалярная матрица, дает

$$c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + L^2 + LL^\top + L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = \beta I_n, \tag{46}$$

или, с учетом (45),

$$c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + 2L^2 + 2\left(L^\top\right)^2 = (\beta+1) I_n,$$

или

$$c_0^2 I_n + 2L(c_0 I_n + L) + 2L^\top (c_0 I_n + L^\top) = (\beta+1) I_n.$$

Отсюда следует, что $L(c_0 I_n + L) = 0$. Если допустить, что $c_0 \neq 0$, то $L = 0$. Поэтому $c_0 = 0$. Соотношения (44) и (46) принимают вид

$$\begin{cases} L^2 - LL^\top - L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = I_n, \\ L^2 + LL^\top + L^\top L + \left(L^\top\right)^2 = \beta I_n. \end{cases}$$

Складывая их, получаем

$$2L^2 + 2\left(L^\top\right)^2 = (\beta+1) I_n.$$

Тем самым $L^2 = 0$. Пусть $n = 2k$. Определим z как вектор размерности $n-1$, составленный из поддиагональных элементов первого столбца матрицы L. Так как S – кососимметричный косой циркулянт, то $\mathcal{P}_{n-1} z = z$. Из условия $L^2 = 0$ следует, что первые $k-1$ компонент вектора z нулевые, а в силу равенства $\mathcal{P}_{n-1} z = z$ равны нулю и последние $k-1$ компонент. Таким образом, S и C – это матрицы вида

$$S = \gamma \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix}, \quad C = \delta \begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix}.$$

Так как S – инволютивная матрица, то $\gamma = i$. Поэтому

$$C + SCS = \delta \left[\begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \right]$$

$$= \delta \left[\begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_k \end{pmatrix} \right]$$
$$= \delta \left[\begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & I_k \\ I_k & \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Получаем противоречие с условием, что матрица $C + SCS$ должна быть ненулевым скалярным кратным инволютивного косого циркулянта. Значит, пересечение с классом АСКТМ_6 пусто.

Наконец, исследуем пересечение с классом АСКТМ_7. В этом случае
$$T_1 = \alpha \left(Z + Z^\top \right),$$
где Z – инволютивный ϕ-циркулянт, причем $|\phi| = 1$, $\phi \neq \pm 1$, а также
$$T_1 = \beta \left(C + S \right),$$
где C и S – инволютивные симметричные циркулянт и косой циркулянт соответственно.

Из этих представлений матрицы T_1 следует, что
$$Z + Z^\top = \mu (C + S), \tag{47}$$
где $\mu \neq 0$.

Очевидно, что скалярные матрицы Z, C и S могут удовлетворять данному уравнению, но в этом случае сама матрица T_1 является скалярной и, значит, антикоммутирует только с нулевой матрицей. Поэтому исследуем лишь случай нескалярной матрицы T_1. Покажем, что тогда уравнение (47) не имеет решений.

Обозначим элементы первой строки матрицы Z через z_0, z_1, $\ldots$, z_{n-1}, а элементы первого столбца – через $z_0, z_{-1}, \ldots, z_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы C обозначим через c_0, $c_1, \ldots, c_{n-1}$, элементы первого столбца – через c_0, c_{-1}, $\ldots$, $c_{-(n-1)}$, а элементы первых строки и столбца матрицы S – через s_0, s_1, $\ldots$, s_{n-1} и s_0, s_{-1}, $\ldots$, $s_{-(n-1)}$ соответственно.

Положим
$$r_1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad r_2 = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$
Условия симметричности циркулянта C и косого циркулянта S имеют вид
$$c_{n-j} = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r_1, \tag{48}$$
$$s_{n-j} = -s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r_2. \tag{49}$$
Следовательно, если n – четное число, то $s_{r_2} = 0$.

Матрица Z есть ϕ-циркулянт с условием $|\phi| = 1$, а потому является нормальной. В силу ее инволютивности, заключаем, что матрица Z эрмитова. Отсюда выводим

$$z_{n-j} = \overline{z}_{-(n-j)} = \overline{\phi}\overline{z}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{50}$$

Распишем условие (47) для позиций $(1, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$z_k + \overline{z}_k = \mu\,(c_k + s_k)\,.$$

Положив $k = j$ и $k = n - j$, $j = 1, 2, \ldots, r_2$, приходим к соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{l} z_j + \overline{z}_j = \mu\,(c_j + s_j)\,, \\ z_{n-j} + \overline{z}_{n-j} = \mu\,(c_{n-j} + s_{n-j})\,, \end{array} \right.$$

которые, в силу (48)–(50), эквивалентны условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} z_j + \overline{z}_j = \mu\,(c_j + s_j)\,, \\ \overline{\phi z_j} + \phi z_j = \mu\,(c_j - s_j)\,. \end{array} \right.$$

Умножая первое уравнение на $\overline{\phi}$ и вычитая из него второе уравнение, получаем

$$\overline{\phi} z_j - \phi z_j = \mu\overline{\phi}\,(c_j + s_j) - \mu\,(c_j - s_j)\,,$$

откуда находим

$$z_j = \mu \left[\frac{\overline{\phi} - 1}{\overline{\phi} - \phi} c_j + \frac{\overline{\phi} + 1}{\overline{\phi} - \phi} s_j \right].$$

Выполняя элементарные преобразования, имеем

$$z_j = \mu \left[\frac{1 - \phi}{1 - \phi^2} c_j + \frac{1 + \phi}{1 - \phi^2} s_j \right],$$

или

$$z_j = \mu \left[\frac{1}{1 + \phi} c_j + \frac{1}{1 - \phi} s_j \right]. \tag{51}$$

Из соотношения (47) выводим

$$z_0 = \frac{\mu}{2}\,[c_0 + s_0]\,. \tag{52}$$

Введем следующие вспомогательные матрицы: U_1 и U_1^c – строго верхнетреугольные теплицевы матрицы с элементами первых строк 0, c_1, c_2, …, c_{n-1} и 0, c_{n-1}, c_{n-2}, …, c_1 соответственно; аналогичные матрицы U_2 и U_2^c имеют в первых строках элементы 0, s_1, s_2, …, s_{n-1} и 0, s_{n-1}, s_{n-2}, …, s_1. С помощью этих матриц циркулянт C и косой циркулянт S можем записать как

$$C = c_0 I_n + U_1 + U_1^{c\top}, \quad S = s_0 I_n + U_2 - U_2^{c\top}.$$

Условия их симметричности имеют вид

$$U_1^c = U_1, \quad U_2^c = -U_2. \tag{53}$$

Поэтому

$$C = c_0 I_n + U_1 + U_1^\top, \quad S = s_0 I_n + U_2 + U_2^\top.$$

Распишем подробно тот факт, что матрицы C и S инволютивны:

$$\begin{cases} c_0^2 I_n + 2c_0 U_1 + 2c_0 U_1^\top + U_1^2 + \left(U_1^\top\right)^2 + U_1 U_1^\top + U_1^\top U_1 = I_n, \\ s_0^2 I_n + 2s_0 U_2 + 2s_0 U_2^\top + U_2^2 + \left(U_2^\top\right)^2 + U_2 U_2^\top + U_2^\top U_2 = I_n. \end{cases}$$

Будем использовать эти условия в виде

$$\begin{cases} U_1 U_1^\top + U_1^\top U_1 = \left(1 - c_0^2\right) I_n - 2c_0 U_1 - 2c_0 U_1^\top - U_1^2 - \left(U_1^\top\right)^2, \\ U_2 U_2^\top + U_2^\top U_2 = \left(1 - s_0^2\right) I_n - 2s_0 U_2 - 2s_0 U_2^\top - U_2^2 - \left(U_2^\top\right)^2. \end{cases} \tag{54}$$

Вследствие формул (51)–(53) матрицу Z можно записать как

$$Z = \mu \left[\frac{c_0 + s_0}{2} I_n + \frac{1}{1+\phi} U_1 + \frac{\phi}{1+\phi} U_1^{c\top} + \frac{1}{1-\phi} U_2 + \frac{\phi}{1-\phi} U_2^{c\top} \right],$$

или

$$Z = \mu \left[\frac{c_0 + s_0}{2} I_n + \frac{1}{1+\phi} U_1 + \frac{\phi}{1+\phi} U_1^\top + \frac{1}{1-\phi} U_2 - \frac{\phi}{1-\phi} U_2^\top \right]. \tag{55}$$

Основным уравнением, исследуемым в данном подразделе, является условие инволютивности матрицы Z:

$$\begin{aligned} &\frac{(c_0+s_0)^2}{4} I_n + \frac{(c_0+s_0)}{1+\phi} U_1 + \frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1+\phi} U_1^\top + \frac{(c_0+s_0)}{1-\phi} U_2 - \frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1-\phi} U_2^\top \\ &\quad + \frac{1}{(1+\phi)^2} U_1^2 + \frac{\phi^2}{(1+\phi)^2} \left(U_1^\top\right)^2 + \frac{1}{(1-\phi)^2} U_2^2 + \frac{\phi^2}{(1-\phi)^2} \left(U_2^\top\right)^2 \\ &\quad + \frac{\phi}{(1+\phi)^2} \left(U_1 U_1^\top + U_1^\top U_1\right) + \frac{1}{1-\phi^2} \left(U_1 U_2 + U_2 U_1\right) \\ &\quad - \frac{\phi}{1-\phi^2} \left(U_1 U_2^\top + U_2^\top U_1\right) + \frac{\phi}{1-\phi^2} \left(U_1^\top U_2 + U_2 U_1^\top\right) \\ &\quad - \frac{\phi^2}{1-\phi^2} \left(U_1^\top U_2^\top + U_2^\top U_1^\top\right) - \frac{\phi}{(1-\phi)^2} \left(U_2 U_2^\top + U_2^\top U_2\right) = \frac{1}{\mu^2} I_n. \end{aligned}$$

Используя равенства (54), получаем

$$\frac{(c_0+s_0)}{1+\phi}U_1+\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1+\phi}U_1^\top+\frac{(c_0+s_0)}{1-\phi}U_2-\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1-\phi}U_2^\top$$
$$+\frac{1}{(1+\phi)^2}U_1^2+\frac{\phi^2}{(1+\phi)^2}\left(U_1^\top\right)^2+\frac{1}{(1-\phi)^2}U_2^2+\frac{\phi^2}{(1-\phi)^2}\left(U_2^\top\right)^2$$
$$-\frac{\phi}{(1+\phi)^2}\left[2c_0U_1+2c_0U_1^\top+U_1^2+\left(U_1^\top\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{1-\phi^2}\left(U_1U_2+U_2U_1\right)-\frac{\phi}{1-\phi^2}\left(U_1U_2^\top+U_2^\top U_1\right)$$
$$+\frac{\phi}{1-\phi^2}\left(U_1^\top U_2+U_2U_1^\top\right)-\frac{\phi^2}{1-\phi^2}\left(U_1^\top U_2^\top+U_2^\top U_1^\top\right)$$
$$+\frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left[2s_0U_2+2s_0U_2^\top+U_2^2+\left(U_2^\top\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{\mu^2}I_n-\frac{\left(c_0+s_0\right)^2}{4}I_n-\frac{\phi}{(1+\phi)^2}\left(1-c_0^2\right)I_n+\frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left(1-s_0^2\right)I_n.$$

После приведения подобных членов имеем

$$\left[\frac{(c_0+s_0)}{1+\phi}-\frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right]U_1+\left[\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1+\phi}-\frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right]U_1^\top$$
$$+\frac{1-\phi}{(1+\phi)^2}U_1^2+\frac{\phi^2-\phi}{(1+\phi)^2}\left(U_1^\top\right)^2$$
$$+\left[\frac{(c_0+s_0)}{1-\phi}+\frac{2s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right]U_2-\left[\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1-\phi}-\frac{2s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right]U_2^\top$$
$$+\frac{1+\phi}{(1-\phi)^2}U_2^2+\frac{\phi^2+\phi}{(1-\phi)^2}\left(U_2^\top\right)^2+\frac{1}{1-\phi^2}\left(U_1U_2+U_2U_1\right)$$
$$-\frac{\phi^2}{1-\phi^2}\left(U_1^\top U_2^\top+U_2^\top U_1^\top\right)+\frac{\phi}{1-\phi^2}\left(U_1^\top U_2+U_2U_1^\top-U_1U_2^\top-U_2^\top U_1\right)$$
$$=\frac{1}{\mu^2}I_n-\frac{\left(c_0+s_0\right)^2}{4}I_n-\frac{\phi}{(1+\phi)^2}\left(1-c_0^2\right)I_n+\frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left(1-s_0^2\right)I_n.$$

Матрица $U_1^\top U_2+U_2U_1^\top-U_1U_2^\top-U_2^\top U_1$ кососимметрична, а потому имеет нулевую диагональ. Это же верно для всей матрицы в левой части. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\mu^2}I_n-\frac{\left(c_0+s_0\right)^2}{4}I_n-\frac{\phi}{(1+\phi)^2}\left(1-c_0^2\right)I_n+\frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left(1-s_0^2\right)I_n=0,$$

или

$$\mu^2 = \frac{1}{\frac{(c_0+s_0)^2}{4} + \frac{\phi}{(1+\phi)^2}\,(1-c_0^2) - \frac{\phi}{(1-\phi)^2}\,(1-s_0^2)}.$$

Приходим к соотношению

$$\left[\frac{(c_0+s_0)}{1+\phi} - \frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right] U_1 + \left[\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1+\phi} - \frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right] U_1^\top$$
$$+\frac{1-\phi}{(1+\phi)^2}U_1^2 + \frac{\phi^2-\phi}{(1+\phi)^2}\left(U_1^\top\right)^2$$
$$+\left[\frac{(c_0+s_0)}{1-\phi} + \frac{2s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right] U_2 - \left[\frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1-\phi} - \frac{s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right] U_2^\top$$
$$+\frac{1+\phi}{(1-\phi)^2}U_2^2 + \frac{\phi^2+\phi}{(1-\phi)^2}\left(U_2^\top\right)^2$$
$$+\frac{1}{1-\phi^2}\left(U_1U_2+U_2U_1\right) - \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\left(U_1^\top U_2^\top + U_2^\top U_1^\top\right)$$
$$= \frac{\phi}{1-\phi^2}\left(U_1U_2^\top + U_2^\top U_1 - U_1^\top U_2 - U_2U_1^\top\right).$$

Матрица в правой части кососимметрична, значит, и матрица в левой части должна быть кососимметричной. Заметим, что если некоторая матрица M вида $M = R_1 + R_2^\top$, где R_1 и R_2 – строго верхнетреугольные матрицы, является кососимметричной, то условие косой симметрии $R_1+R_2^\top = -(R_1+R_2^\top)^\top$ эквивалентно равенству $R_1+R_2 = -(R_1+R_2)^\top$, которое, в силу строгой верхнетреугольности R_1 и R_2, означает, что $R_1+R_2=0$. Это замечание позволяет получить соотношение

$$\left[\frac{(c_0+s_0)}{1+\phi} - \frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2} + \frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1+\phi} - \frac{2c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right] U_1$$
$$+\left[\frac{1-\phi}{(1+\phi)^2} + \frac{\phi^2-\phi}{(1+\phi)^2}\right] U_1^2$$
$$+\left[\frac{(c_0+s_0)}{1-\phi} + \frac{2s_0\phi}{(1-\phi)^2} - \frac{\phi\,(c_0+s_0)}{1-\phi} + \frac{2s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right] U_2$$
$$+\left[\frac{1+\phi}{(1-\phi)^2} + \frac{\phi^2+\phi}{(1-\phi)^2}\right] U_2^2 + 2U_1U_2 = 0,$$

эквивалентное равенству

$$\left[(c_0+s_0)-\tfrac{4c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right]U_1+\tfrac{(1-\phi)^2}{(1+\phi)^2}U_1^2+\left[(c_0+s_0)+\tfrac{4s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right]U_2 \\ +\tfrac{(1+\phi)^2}{(1-\phi)^2}U_2^2+2U_1U_2=0. \qquad (56)$$

Введем вспомогательные матрицы

$$\widehat{U}_1=\frac{1-\phi}{1+\phi}U_1,\quad \widehat{U}_2=\frac{1+\phi}{1-\phi}U_2,$$

тогда

$$U_1=\frac{1+\phi}{1-\phi}\widehat{U}_1,\quad U_2=\frac{1-\phi}{1+\phi}\widehat{U}_2.$$

Теперь соотношение (56) принимает вид

$$\left[(c_0+s_0)-\frac{4c_0\phi}{(1+\phi)^2}\right]\frac{1+\phi}{1-\phi}\widehat{U}_1+\widehat{U}_1^2 \\ +\left[(c_0+s_0)+\frac{4s_0\phi}{(1-\phi)^2}\right]\frac{1-\phi}{1+\phi}\widehat{U}_2+\widehat{U}_2^2+2\widehat{U}_1\widehat{U}_2=0.$$

После несложных преобразований получаем равенство

$$\left[s_0\frac{1+\phi}{1-\phi}+c_0\frac{(1+\phi)^2}{1-\phi^2}-\frac{4c_0\phi}{1-\phi^2}\right]\widehat{U}_1+\widehat{U}_1^2+ \\ +\left[c_0\frac{1-\phi}{1+\phi}+s_0\frac{(1-\phi)^2}{1-\phi^2}+\frac{4s_0\phi}{1-\phi^2}\right]\widehat{U}_2+\widehat{U}_2^2+2\widehat{U}_1\widehat{U}_2=0,$$

эквивалентное соотношению

$$\left[\frac{s_0(1+\phi)^2+c_0(1-\phi)^2}{1-\phi^2}\right]\widehat{U}_1+\widehat{U}_1^2 \\ +\left[\frac{s_0(1+\phi)^2+c_0(1-\phi)^2}{1-\phi^2}\right]\widehat{U}_2+\widehat{U}_2^2+2\widehat{U}_1\widehat{U}_2=0.$$

Если ввести параметр

$$\alpha=\frac{s_0(1+\phi)^2+c_0(1-\phi)^2}{1-\phi^2},$$

то рассматриваемое условие запишется в виде

$$\alpha\left(\widehat{U}_1+\widehat{U}_2\right)+\left(\widehat{U}_1+\widehat{U}_2\right)^2=0,$$

или

$$\left(\alpha I_n + \widehat{U}_1 + \widehat{U}_2\right)\left(\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2\right) = 0. \tag{57}$$

Предположим сначала, что $\alpha \neq 0$. В этом случае матрица $\alpha I_n + \widehat{U}_1 + \widehat{U}_2$ невырожденна, а потому

$$\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2 = 0. \tag{58}$$

Отсюда выводим

$$\widehat{U}_1^c + \widehat{U}_2^c = 0,$$

что, в силу (53), дает

$$\widehat{U}_1 - \widehat{U}_2 = 0.$$

Вместе с (58) это означает, что $U_1 = U_2 = 0$, т.е. C и S – скалярные матрицы, а тогда (см. (55)) Z – скалярная матрица, что противоречит нашему предположению. Значит, $\alpha = 0$, т.е.

$$s_0 = -\frac{(1-\phi)^2}{(1+\phi)^2} c_0, \tag{59}$$

и соотношение (57) принимает вид

$$\left(\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2\right)^2 = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\{\widehat{U}_1\}_{1j} + \{\widehat{U}_2\}_{1j} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, r_1 + 1,$$

или

$$\frac{1-\phi}{1+\phi} c_j + \frac{1+\phi}{1-\phi} s_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r_1.$$

Отсюда

$$s_j = -\frac{(1-\phi)^2}{(1+\phi)^2} c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r_1.$$

Введем параметр

$$\gamma = -\frac{(1-\phi)^2}{(1+\phi)^2},$$

тогда

$$s_j = \gamma c_j, \quad j = 0, 1, \ldots, r_1. \tag{60}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от четности числа n.

1) Пусть сначала n – нечетное число: $n = 2r + 1$. Введем n-мерные векторы x и y такие, что: а) первые $r+1$ компонент вектора x совпадают с первыми $r+1$ элементами первого столбца в C, а остальные компоненты нулевые; б) последние r компонент вектора y совпадают с

последними r элементами первого столбца в C, а прочие компоненты нулевые. Определим A и B как симметричные теплицевы матрицы, первые столбцы которых совпадают соответственно с x и y. Тогда можем записать

$$C = A + B, \quad S = \gamma(A - B).$$

Наглядно матрицы A и B можно представить так:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} * & * & * & * & & & \\ * & * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \\ \hline * & & & & & & \\ * & * & & & & & \\ * & * & * & & & & \end{array}\right).$$

Запишем условие инволютивности C и S в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} (A+B)(x+y) = e_1, \\ (A-B)(x-y) = \frac{1}{\gamma^2} e_1, \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Ay + Bx = e_1, \\ Ax + By - Ay - Bx = \frac{1}{\gamma^2} e_1. \end{array} \right.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$Ay + Bx = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\gamma^2}\right] e_1.$$

Приравняем в этом соотношении компоненты векторов для всех индексов, кроме $j = 1$. Тогда по аналогии с анализом пересечения с классом 3 выводим, что $y = 0$ и $B = 0$. Отсюда следует, что A – скалярная матрица, а, значит, скалярны матрицы C, S и Z. Этот случай мы уже разобрали.

2) Пусть теперь n – четное число: $n = 2r$. Тогда $r_1 = r - 1$, $r_2 = r$. В этом случае имеем

$$s_j = \gamma c_j, \quad j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

В силу симметричности S, $s_r = 0$. Если $c_r = 0$, то проходят все рассуждения предыдущего случая.

Далее считаем, что $c_r \neq 0$ и $s_r = 0$. Введем вспомогательный косой циркулянт $\widehat{S}$ формулой

$$\widehat{S} = \frac{1}{\gamma} S.$$

Обозначим элементы первой строки матрицы $\widehat{S}$ через $\widehat{s}_0, \widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_{n-1}$, а элементы первого столбца – через $\widehat{s}_0, \widehat{s}_{-1}, \ldots, \widehat{s}_{-(n-1)}$. Тогда из формул (60) выводим, что

$$\widehat{s}_j = c_j, \quad j = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{61}$$

В силу симметричности косого циркулянта $\widehat{S}$, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{s}_{-j} &= \widehat{s}_j, \quad j = 1, \ldots, r-1, \\ \widehat{s}_{n-j} &= -\widehat{s}_j, \quad j = 1, \ldots, r-1. \end{aligned} \tag{62}$$

Матрица C инволютивна, а $\widehat{S}$ является скалярным кратным инволютивной матрицы:

$$C^2 = I_n, \quad \widehat{S}^2 = \frac{1}{\gamma^2} I_n.$$

Запишем последние два условия в позициях $(j, 1)$, $j = 2, \ldots, r$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k-j} c_{-(k-1)} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{-(k-1)} = 0, \end{cases}$$

или, в силу симметричности C и $\widehat{S}$,

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k-j} c_{k-1} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{k-1} = 0, \end{cases} \qquad j = 2, \ldots, r.$$

Разбивая суммы, получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{k-j} c_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} c_{k-j} c_{k-1} + c_{r-j+1} c_r \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j} c_{k-1} + c_r c_{r+j-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} c_{k-j} c_{k-1} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{j-1} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{k-1} + \widehat{s}_{r-j+1} \widehat{s}_r \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{k-1} + \widehat{s}_r \widehat{s}_{r+j-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} \widehat{s}_{k-j} \widehat{s}_{k-1} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Будем считать, что если в сумме верхнее значение индекса суммирования меньше нижнего, то такая сумма равна нулю. Снова применяя условия симметричности C и $\widehat{S}$, приходим к системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} + c_{r-j+1}c_r \\ \qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1} + c_r c_{r+j-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} c_{k-j}c_{k-1} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{j-1} \widehat{s}_{j-k}\widehat{s}_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} + \widehat{s}_{r-j+1}\widehat{s}_r \\ \qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} + \widehat{s}_r\widehat{s}_{r+j-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} = 0, \\ \qquad j = 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Условия (61) позволяют преобразовать второе соотношение системы к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} + \widehat{s}_{r-j+1}\widehat{s}_r \\ &\qquad + \sum_{k=r+2}^{r+j-1} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} + \widehat{s}_r\widehat{s}_{r+j-1} \\ &\qquad + \sum_{k=r+j+1}^{n} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} = 0, \qquad j = 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{s}_r = 0$, имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} + c_{r-j+1}c_r \\ \qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1} + c_r c_{r+j-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} c_{k-j}c_{k-1} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum\limits_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} \\ \qquad + \sum\limits_{k=r+2}^{r+j-1} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} + \sum\limits_{k=r+j+1}^{n} \widehat{s}_{k-j}\widehat{s}_{k-1} = 0, \\ \qquad j = 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Учитывая (48), (61) и (62), заметим, что если $m > r$, то

$$\widehat{s}_m = -\widehat{s}_{n-m} = -c_{n-m} = -c_m,$$

$$c_{r+j-1} = c_{n-(r+j-1)} = \{n = 2r\} = c_{r-j+1},$$

а при $m < r$ справедливо соответствие $\widehat{s}_m = c_m$. Получаем

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} + 2c_{r-j+1}c_r \\ &\qquad + \sum_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1} + \sum_{k=r+j+1}^{n} c_{k-j}c_{k-1} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{j-1} c_{j-k}c_{k-1} + \sum_{k=j}^{r} c_{k-j}c_{k-1} \\ &\qquad - \sum_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1} + \sum_{k=r+j+1}^{n} c_{k-j}c_{k-1} = 0, \\ &\qquad\qquad j = 2, \dots, r. \end{aligned}\right.$$

Вычитая второе равенство из первого, имеем

$$c_{r-j+1}c_r = -\sum_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1}, \quad j = 2, \dots, r,$$

или, так как $c_r \neq 0$,

$$c_{r-j+1} = -\frac{1}{c_r}\sum_{k=r+2}^{r+j-1} c_{k-j}c_{k-1}, \quad j = 2, \dots, r. \tag{63}$$

Используя индукцию, покажем, что $c_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, r-1$. Для обоснования базиса индукции рассмотрим последнее равенство при $j = 2$:

$$c_{r-1} = -\frac{1}{c_r}\sum_{k=r+2}^{r+1} c_{k-2}c_{k-1} = 0,$$

так как $r + 1 < r + 2$. Предположим, что $c_m = 0$ для индексов $m = m_0, m_0 + 1, \dots, r-1$, где $m_0 > 1$ и $m_0 < r$. Распишем условие (63) для $j = r - m_0 + 2$:

$$c_{m_0-1} = -\frac{1}{c_r}\sum_{k=r+2}^{r+r-m_0+1} c_{k-r+m_0-2}c_{k-1}$$

$$= \{\text{замена } k = r + p + 2\} = -\frac{1}{c_r}\sum_{p=0}^{r-m_0-1} c_{m_0+p}c_{r+p+1}.$$

Заметим, что c_{m_0-1} является линейной комбинацией чисел c_{m_0}, $c_{m_0+1}, \dots, c_{r-1}$, равных нулю, поэтому $c_{m_0-1} = 0$. Итак, все числа c_m,

$m = 1, 2, \ldots, r-1$, нулевые. В силу (61), матрицы $\widehat{S}$ и S скалярные. Так как S – инволютивная матрица, то $s_0 \neq 0$. Из (59) заключаем, что $c_0 \neq 0$. При рассматриваемых условиях матрицу C можно представить в виде

$$C = \begin{pmatrix} c_0 I_r & c_r I_r \\ c_r I_r & c_0 I_r \end{pmatrix},$$

где $c_0 \neq 0$ и $c_r \neq 0$. Покажем, что такая матрица C не может быть инволютивной. Действительно,

$$C^2 = \begin{pmatrix} c_0 I_r & c_r I_r \\ c_r I_r & c_0 I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 I_r & c_r I_r \\ c_r I_r & c_0 I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_0^2 + c_r^2) I_r & 2c_0 c_r I_r \\ 2c_0 c_r I_r & (c_0^2 + c_r^2) I_r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все возможные случаи разобраны, и в пересечении классов 3 и 7 нет нескалярных матриц. Теорема 4 доказана. □

§7. Обоснование главного результата

Вернемся теперь к задаче об антикоммутировании теплицевой и ганкелевой матриц.

От пары (T, H) перейдем к паре (T_1, T_2), где $T_1 = T$, а T_2 – теплицева матрица, соответствующая ганкелевой матрице H, т.е. $H = T_2 \mathcal{P}_n$. Нижний индекс этих теплицевых матриц показывает, какой из матриц исходной пары они соответствуют. Положим

$$\{T_1\}_{km} = t_{m-k}, \qquad \{T_2\}_{km} = h_{m-k}.$$

Основное соотношение антиперестановочности приобретает вид

$$T_1 T_2 \mathcal{P}_n + T_2 \mathcal{P}_n T_1 = 0.$$

После умножения справа на $\mathcal{P}_n$ получаем

$$T_1 T_2 + T_2 \mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = 0.$$

Матрица T_1, будучи персимметричной, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = T_1^\top.$$

Используя его, находим

$$T_1 T_2 + T_2 T_1^\top = 0. \tag{64}$$

Полное описание решений уравнения (64) даст нам все пары антикоммутирующих матриц.

7.1. Два особых случая. Прежде чем описывать решение уравнения (64) в общем случае, рассмотрим две специальные ситуации.

7.1.1. *T_1 и T_2 – циркулянты.* Пусть сначала матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами:

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n, \tag{65}$$

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n, \tag{66}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Известно, что

$$T_1^\top = F_n^* \widehat{D}_1 F_n, \tag{67}$$

где $\widehat{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_2^{(1)}\right)$ (см. [3]). Подстановка выражений (65), (66) и (67) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (64) приводит к соотношению

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* D_2 F_n + F_n^* D_2 F_n F_n^* \widehat{D}_1 F_n = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$D_2\left(D_1 + \widehat{D}_1\right) = 0.$$

Мы получили условие на спектры циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T, H) из класса 2.

7.1.2. *T_1 и T_2 – косые циркулянты.* Пусть теперь T_1 и T_2 являются косыми циркулянтами:

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \tag{68}$$

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \tag{69}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Известно, что

$$T_1^\top = G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^*, \tag{70}$$

где $\widetilde{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_3^{(1)}\right)$ (см. [3]).

Подстановка выражений (68), (69) и (70) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (64) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* \\ + G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^* = 0, \end{aligned}$$

или, после упрощения,

$$D_2\left(D_1+\widetilde{D}_1\right)=0.$$

Это равенство есть условие на спектры косых циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара косых циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T,H) из класса 3.

7.2. Основной подход. Опишем теперь общий случай в решении уравнения (64). Изучим вначале простейшие ситуации, когда одна или обе матрицы являются диагональными.

В случае скалярной матрицы T_1 имеем $T_2=0$. Если скалярна матрица T_2, то T_1 должна быть кососимметричной матрицей. Получаем пары из класса 1.

Пусть теперь ни одна из матриц T_1 и T_2 не является диагональной.

Всякую квадратную матрицу можно однозначно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц. Запишем такие представления

$$T_1=A_1+B_1 \tag{71}$$

и

$$T_2=A_2+B_2 \tag{72}$$

для наших матриц T_1 и T_2. Всюду в дальнейшем символ “A” указывает на симметрию матрицы, а “B” – на косую симметрию. Нижний индекс, равный единице или двойке, означает принадлежность к теплицевой компоненте решения или к теплицевой матрице, соответствующей ганкелевой компоненте.

Подстановка представлений (71) и (72) в (64) дает

$$(A_1+B_1)(A_2+B_2)+(A_2+B_2)(A_1-B_1)=0. \tag{73}$$

После транспонирования имеем

$$(A_1+B_1)(A_2-B_2)+(A_2-B_2)(A_1-B_1)=0. \tag{74}$$

Складывая и вычитая (73) и (74), приходим к условиям

$$\begin{cases}(A_1+B_1)A_2+A_2(A_1-B_1)=0,\\(A_1+B_1)B_2+B_2(A_1-B_1)=0.\end{cases} \tag{75}$$

Умножая оба уравнения этой системы на $\mathcal{P}_n$ справа и слева, имеем

$$\begin{cases}(A_1-B_1)A_2+A_2(A_1+B_1)=0,\\(A_1-B_1)B_2+B_2(A_1+B_1)=0.\end{cases} \tag{76}$$

Складывая и вычитая первые уравнения систем (75) и (76) и делая то же самое со вторыми уравнениями, получаем

$$\begin{cases} A_1A_2 + A_2A_1 = 0, \\ A_2B_1 = B_1A_2, \\ A_1B_2 + B_2A_1 = 0, \\ B_1B_2 = B_2B_1. \end{cases} \tag{77}$$

Рассмотрим несколько случаев, определяемых равенством или неравенством нулю матрицы B_1.

Пусть сначала $B_1 \neq 0$. В этой ситуации снова выделим два подслучая: $A_2 \neq 0$ и $A_2 = 0$.

1. $A_2 \neq 0$. Второе уравнение системы (77) показывает, что матрицы B_1 и A_2 коммутируют. Так как матрица B_1 кососимметрична, то она не может быть ни верхнетреугольной, ни нижнетреугольной, ни линейным многочленом от симметричной матрицы A_2. Поэтому B_1 и A_2 суть ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ. В силу симметрии A_2, имеем условие $\phi = \pm 1$ (см. лемму 6), означающее, что B_1 и A_2 являются одновременно циркулянтами или косыми циркулянтами.

Если B_1 – циркулянт, то, в силу четвертого уравнения системы (77), B_2 – также циркулянт. Поскольку A_2 – циркулянт, то из первого уравнения системы (77) и теоремы 2 следует, что и матрица A_1 – циркулянт. Таким образом, T_1 и T_2 являются циркулянтами, и мы приходим к уже разобранному случаю.

Если B_1 – косой циркулянт, то, в силу четвертого уравнения системы (77), B_2 – также косой циркулянт. Поскольку A_2 – косой циркулянт, то из первого уравнения системы (77) и теоремы 2 следует, что и матрица A_1 – косой циркулянт. Тем самым T_1 и T_2 являются косыми циркулянтами, и мы опять приходим к уже разобранному случаю.

2. $A_2 = 0$. Так как $T_2 \neq 0$, то $B_2 \neq 0$. Четвертое уравнение системы (77) показывает, что матрицы B_1 и B_2 коммутируют. Напомним, что $B_1 \neq 0$. Поскольку матрица B_1 кососимметрична, она не может быть ни верхнетреугольной, ни нижнетреугольной. Но тогда либо B_1 и B_2 суть ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ, либо $B_2 = \gamma B_1$.

Пусть сначала B_1 и B_2 суть ϕ-циркулянты. Из того, что матрица B_1 кососимметрична, выводим условие $\phi = \pm 1$, означающее, что B_1 и B_2 являются одновременно либо циркулянтами, либо косыми циркулянтами.

Пусть обе матрицы B_1 и B_2 суть циркулянты. Если $A_1 = 0$, то T_1 и T_2 – циркулянты, и мы пришли к уже разобранному случаю.

В случае $A_1 \neq 0$ рассмотрим третье уравнение системы (77). Положим $B_2 = C_2$, $A_1 = \widetilde{C}+\widetilde{S}$, где $\widetilde{C}$ и $\widetilde{S}$ суть циркулянт и косой циркулянт соответственно. Тогда

$$\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right)C_2 + C_2\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right) = 0,$$

или

$$C_2\widetilde{S} - \widetilde{S}C_2^\top = -2\widetilde{C}C_2.$$

Из леммы 11 следует, что $\widetilde{S} = 0$ и, значит, обе матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами. Снова приходим к уже разобранному случаю.

Пусть теперь обе матрицы B_1 и B_2 суть косые циркулянты. Если $A_1 = 0$, то T_1 и T_2 – косые циркулянты, и мы опять пришли к уже разобранному случаю.

В случае $A_1 \neq 0$ рассмотрим третье уравнение системы (77). Положим $B_2 = S_2$, $A_1 = \widetilde{C}+\widetilde{S}$, где $\widetilde{C}$ и $\widetilde{S}$ суть циркулянт и косой циркулянт соответственно. Тогда

$$\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right)S_2 + S_2\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right) = 0,$$

или

$$S_2\widetilde{C} - \widetilde{C}S_2^\top = -2\widetilde{S}S_2. \tag{78}$$

К этому уравнению применима лемма 12.

Первая возможность, предусматриваемая этой леммой, есть равенство $\widetilde{C} = 0$, означающее, что обе матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты. Снова приходим к уже разобранной ситуации.

Второй возможный случай состоит в том, что n – четное число, а матрица S_2 – это скалярное кратное инволютивного косого циркулянта. Поскольку матрицы T_1 и T_2 определены с точностью до ненулевых множителей, можно без ограничения общности считать, что S_2 есть просто инволютивный косой циркулянт. Из (78) выводим

$$\widetilde{S} = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S_2\widetilde{C}S_2.$$

Пусть $B_1 = S_1$ – кососимметричный косой циркулянт. Тогда

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1 + B_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S} + S_1 \\ &= \widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S_2\widetilde{C}S_2 + S_1 = \frac{1}{2}\left(\widetilde{C} - S_2\widetilde{C}S_2\right) + S_1, \\ H &= T_2\mathcal{P}_n = S_2\mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Получаем пару из класса 4, в которой $S = S_2$.

Если $B_2 = \gamma B_1$, то приходим к соотношению

$$A_1 B_1 + B_1 A_1 = 0.$$

Теперь классы 3–5 теоремы 3 дают классы 5, 6, 7. Из шестого класса теоремы 3 получаем подкласс класса 4. Наконец, последнему классу теоремы 3 соответствует класс 8.

Осталось рассмотреть случай $B_1 = 0$. Система (77) сводится здесь к соотношениям

$$\begin{cases} A_1 A_2 + A_2 A_1 = 0, \\ A_1 B_2 + B_2 A_1 = 0. \end{cases}$$

Если $B_2 \neq 0$, то снова исследуем различные ситуации. Если $A_2 = 0$, то получаем подклассы классов 2–8. В случае $A_2 \neq 0$ приходим к задаче о тройке (A_1, A_2, B_2). Согласно ее решению, возможны лишь два случая, и оба были уже рассмотрены: 1) матрицы A_1, A_2, B_2 – циркулянты, а тогда обе матрицы T_1 и T_2 суть циркулянты; 2) матрицы A_1, A_2, B_2 – косые циркулянты и, следовательно, T_1 и T_2 суть косые циркулянты.

Наконец, рассмотрим случай $B_1 = B_2 = 0$. Система (77) вырождается в задачу описания пар симметричных теплицевых антикоммутирующих матриц

$$A_1 A_2 + A_2 A_1 = 0.$$

Первые два класса этой задачи, а именно пары (A_1, A_2), составленные из циркулянтов или косых циркулянтов, соответствуют уже рассмотренным случаям. Третий класс представляет собой еще одно решение (класс 9) задачи об антикоммутировании теплицевой и ганкелевой матриц. Теорема 1 доказана полностью.

Литература

1. В. В. Воеводин , Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* М., Наука, 1987.
2. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Об одной характеризации теплицевых и ганкелевых циркулянтов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 71–81.
3. В. Н. Чугунов, *О частных решениях нормальной $T+H$-задачи.* — ЖВМ МФ **50**:4 (2010), 612–617.

Ikramov Kh. D., Chugunov V. N. Description of pairs of anti-commuting Toeplitz and Hankel matrices.

A complete description of the sets of pairs of anti-commuting Toeplitz and Hankel matrices is given.

Поступило 21 марта 2017 г.

Московский государственный университет
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Институт вычислительной математики РАН
119333 Москва, Россия
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com