Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Х. Д. Икрамов

МИНИМАЛЬНЫЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

1. Полианалитической функцией порядка m называется функция комплексных переменных z и $\overline{z}$ вида

$$w = f(z, \overline{z}) = \sum_{k=0}^{m} (\overline{z})^k f_k(z), \tag{1}$$

где $f_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ – аналитические функции от z (см. [1]). Если эти функции $f_k(z)$ являются многочленами, то $f(z, \overline{z})$ называется полианалитическим многочленом. Для этого случая примем такое уточнение: степень многочлена $f_k(z)$ не превышает числа $m - k$. Если хотя бы для одного значения k имеет место равенство

$$\deg f_k(z) = m - k,$$

то m есть степень полианалитического многочлена (1).

Понятие минимального полианалитического многочлена нормальной матрицы A было введено М. Хутаненом в связи с обобщенным процессом Ланцоша (см. [2]). Краткое описание этого процесса дано во втором разделе настоящей статьи, а определение минимального полианалитического многочлена вводится в третьем разделе.

Целью данной публикации является постановка вопроса о том, как можно было бы разумно определить понятие характеристического полианалитического многочлена матрицы A. Наше предложение по этому поводу обсуждается в разделе 4.

2. Предполагая матрицу A нормальной, рассмотрим так называемую обобщенную степенную последовательность

$$v, Av, A^*v, A^2v, AA^*v, (A^*)^2v, A^3v, A^2A^*v, A(A^*)^2v, (A^*)^3v, \ldots. \tag{2}$$

Ключевые слова: полианалитические многочлены, аннулирующий многочлен, минимальный многочлен, характеристический многочлен, обобщенный процесс Ланцоша.

Устройство этой последовательности можно описать в терминах одночленов (мономов) от двух коммутирующих переменных, скажем, s и t. Каждый член последовательности (2) имеет вид

$$u_k = W_k(A, A^*)v,$$

где $W_k(s,t)$ – некоторый одночлен от s и t. Так, второй и третий члены соответствуют одночленам s и t, следующие три члена – одночленам второй степени s^2, st и t^2, и т.д. Степени одночленов в последовательности (2) монотонно не убывают, и совокупность векторов, отвечающих одночленам степени m, называется m-м слоем этой последовательности. Он состоит из $m+1$ векторов вида

$$A^\alpha (A^*)^\beta v, \qquad \alpha + \beta = m. \tag{3}$$

Подпространство

$$\mathcal{L}_m(A, v) = \operatorname{span}\{W(A, A^*)v \mid \text{степень } W \leqslant m\}$$

будем называть m-м обобщенным подпространством Крылова. Разность размерностей подпространств $\mathcal{L}_m$ и $\mathcal{L}_{m-1}$ обозначается через w_m и называется шириной m-го слоя.

Обобщенный процесс Ланцоша состоит в ортонормализации последовательности (2). Опишем его в геометрических терминах.

Пусть задан нормированный вектор $v = v_1$. Предположим, что на предыдущих шагах процесса уже построена система векторов v_1, $v_2, \ldots, v_k$, являющаяся ортонормированным базисом линейной оболочки $\mathcal{M}_k$ первых p_k векторов $u_1, \ldots, u_{p_k}$ последовательности (2). Если очередной вектор u_{p_k+1} не принадлежит этой оболочке, то опущенный из него на $\mathcal{M}_k$ перпендикуляр после нормирования становится вектором v_{k+1}. В противном случае мы пытаемся найти v_{k+1}, нормируя перпендикуляр, опущенный из следующего вектора u_{p_k+2}, и т.д.

Может случиться, что все векторы m-го слоя принадлежат предыдущему крыловскому подпространству $\mathcal{L}_{m-1}$, причем $\dim \mathcal{L}_{m-1} < n$. В этом случае $\mathcal{L}_{m-1}$ является общим инвариантным подпространством матриц A и A^*. Мы будем игнорировать эту маловероятную возможность. Тогда за конечное число шагов будет получен ортонормированный базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ всего пространства $\mathbf{C}^n$. Эти векторы v_i будем называть векторами Ланцоша.

Описанный процесс обладает следующими свойствами, роднящими его с классическим алгоритмом Ланцоша:

1. Для всякого вектора $x \in \mathcal{L}_m$ справедливы включения

$$Ax \in \mathcal{L}_{m+1}, \quad A^*x \in \mathcal{L}_{m+1}.$$

2. Если $v_l \in \mathcal{L}_m \setminus \mathcal{L}_{m-1}$ $(m \geqslant 2)$, то

$$Av_l \perp \mathcal{L}_i, \ A^*v_l \perp \mathcal{L}_i \quad (i \leqslant m-2).$$

3. Сопоставим каждому одночлену $\alpha s^i t^j$ $(\alpha \neq 0)$ полианалитический одночлен

$$\alpha z^i \overline{z}^j. \tag{4}$$

Установим лексикографический порядок между такими одночленами, рассматривая z как первую переменную. Таким образом, если $\alpha_1 z^{i_1}\overline{z}^{j_1}$ и $\alpha_2 z^{i_2}\overline{z}^{j_2}$ – два полианалитических одночлена $(\alpha_1, \alpha_2 \neq 0)$, то при $i_1 + j_1 > i_2 + j_2$ считаем, что

$$\alpha_1 z^{i_1}\overline{z}^{j_1} > \alpha_2 z^{i_2}\overline{z}^{j_2}. \tag{5}$$

Если же $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ и $i_1 > i_2$, то опять-таки принимаем (5). Степенью одночлена (4) называется число $i + j$.

Установленное нами отношение порядка между одночленами позволяет определить понятие старшего члена для любого полианалитического многочлена.

Пусть A – нормальная $n \times n$-матрица. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$I_n, A, A^*, A^2, AA^*, (A^*)^2, A^3, \ldots .$$

Найдется такой начальный отрезок этой последовательности, в котором матрицы линейно зависимы, т.е.

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \alpha_{ij} A^i (A^*)^j = 0 \tag{6}$$

и не все коэффициенты α_{ij} равны нулю. Мы интерпретируем соотношение (6) следующим образом: полианалитический многочлен

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \alpha_{ij} z^i \overline{z}^j$$

аннулирует матрицу A. Минимальным полианалитическим многочленом матрицы A можно назвать ее аннулирующий многочлен минимальной степени. Однако такое определение допускает существование многих минимальных многочленов. Потребуем поэтому, чтобы старший член минимального многочлена был не старше старшего члена любого аннулирующего многочлена минимальной степени и чтобы коэффициент при старшем члене был равен единице (унитарный полианалитический многочлен). Эти требования определяют минимальный полианалитический многочлен уже единственным образом. Очевидно, что унитарно подобные матрицы A_1 и A_2 имеют один и тот же минимальный полианалитический многочлен.

4. Сопоставим нормальной матрице A линейный матричный пучок

$$sA - tA^*. \tag{7}$$

Чтобы этот пучок не был сингулярным, потребуем невырожденности от матрицы A. Такое ограничение оправдано по следующим причинам. Основное назначение обобщенного процесса Ланцоша – быть средством решения больших систем линейных уравнений $Ax = b$. Для однозначной разрешимости этой системы матрица A должна быть невырожденной. Если же A вырождена, то свести дело к невырожденному случаю можно так: сначала построить ортонормированный базис ядра $\mathcal{N}$ матрицы A (которое является заодно ядром сопряженной матрицы A^*), а затем сузить A на ортогональное дополнение $\mathcal{N}^{\perp}$. Оба этих действия можно осуществить с помощью процедур, хорошо известных из элементарного курса линейной алгебры (построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений, процесс Грама–Шмидта, и т.д.). Заметим, что все эти процедуры используют конечное число арифметических операций и извлечений квадратных корней.

С пучком (7) мы связываем определитель

$$f(s,t) = \det(sA - tA^*) = \sum_{i=o}^{n} a_i s^{n-i} t^i. \tag{8}$$

Это однородный многочлен от s и t степени n, где n – порядок матрицы A. Если A претерпевает унитарное подобие

$$A \to B = Q^*AQ, \qquad Q^*Q = I_n,$$

то

$$A^* \to Q^*A^*Q = B^*$$

и

$$\det(sB - tB^*) = \det Q^* \det(sA - tA^*) \det Q = \det(sA - tA^*),$$

т.е. многочлен $f(s,t)$ есть инвариант унитарных подобий, совершаемых с матрицей A (и пучком (7)).

Поделим среднюю и правую части в (8) на s^n и положим

$$\lambda = \frac{t}{s}.$$

Получим

$$\det(A - \lambda A^*) = \sum_{i=o}^{n} a_i \lambda^i.$$

Теперь обе части этого равенства разделим на число $\det A^* = \overline{\det A}$:

$$\det\left((A*)^{-1}A - \lambda I_n\right) = \sum_{i=o}^{n} \gamma_i \lambda^i. \qquad (9)$$

Здесь

$$\gamma_i = \frac{a_i}{\det A^*}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Матрицу

$$C = (A^*)^{-1}A$$

называют коквадратом матрицы A. Таким образом, многочлен $\sum\limits_{i=o}^{n} \gamma_i \lambda^i$ является характеристическим многочленом матрицы C. По теореме Гамильтона – Кэли,

$$\sum_{i=o}^{n} \gamma_i C^i = 0.$$

Подставляя сюда определение коквадрата и учитывая перестановочность матриц A и A^*, имеем

$$\sum_{i=o}^{n} \gamma_i A^i (A^*)^{-i} = 0.$$

После умножения обеих частей на $(A^*)^n$ окончательно получаем

$$\sum_{i=o}^{n} \gamma_i A^i (A^*)^{n-i} = 0. \qquad (10)$$

Это соотношение мы интерпретируем так: полианалитический многочлен

$$\sum_{i=o}^{n} \gamma_i z^i \overline{z}^{n-i} \qquad (11)$$

аннулирует матрицу A. Равенство (10) можно рассматривать как теорему Гамильтона–Кэли для полианалитических многочленов. Естественно было бы поэтому назвать (11) характеристическим полианалитическим многочленом.

К сожалению, при таком определении привычное свойство аннулирующих многочленов – минимальный многочлен делит характеристический, – утрачивается. В самом деле, полианалитический многочлен $g(z, \overline{z}) = \overline{z}z - 1 = |z|^2 - 1$ является минимальным для любой нескалярной унитарной матрицы. Если допустить, что характеристический полианалитический многочлен $f(z, \overline{z})$ нескалярной унитарной матрицы U делится на $g(z, \overline{z})$, то f должен обращаться в нуль во всех точках единичной окружности. Обозначим через $\lambda_1 = e^{i\phi_1}, \ldots, \lambda_n = e^{i\phi_n}$ собственные значения матрицы U (ввиду нескалярности матрицы, не все из этих чисел равны). В базисе из собственных векторов матрицы U многочлен $f(z, \overline{z})$ факторизуется как

$$f(z, \overline{z}) = (z\lambda_1 - \overline{z}\overline{\lambda_1}) \cdots (z\lambda_n - \overline{z}\overline{\lambda_n}).$$

Отсюда следует, что нули $f(z)$ могут лежать лишь на прямых, наклоненных к действительной оси под углами $-\phi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Литература

1. M. B. Balk, M. F. Zuev, *On polyanalytic functions.* — Russ. Math. Surveys **25** (1970), 201–223.
2. M. Huhtanen, *Orthogonal polyanalytic polynomials and normal matrices.* — Math. Comp. **72** (2002), 355–373.
3. L. Elsner, Kh. D. Ikramov, *On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities.* — Linear Algebra Appl. **254** (1997), 79–98.

Ikramov Kh. D. The minimal and characteristic polyanalytic polynomials of a normal matrix.

The concept of the minimal polyanalytic polynomial was introduced by M. Huhtanen in connection with the generalized Lanczos process as applied to a normal matrix. The paper discusses the possibility of finding an equivalent of the characteristic polynomial in the set of polyanalytic polynomials.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 15 февраля 2017 г.