Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Х. Д. Икрамов

CMV-МАТРИЦА И ОБОБЩЕННЫЙ ПРОЦЕСС ЛАНЦОША

§1. Введение

Хорошо известно, что многочлены, ортогональные на отрезке вещественной оси, можно реализовать как характеристические многочлены *ведущих главных подматриц* (в.г.п.) вещественной симметричной трехдиагональной матрицы (так называемой матрицы Якоби). Известно также, что многочлены, ортогональные на единичной окружности, можно интерпретировать как характеристические многочлены в.г.п. унитарной хессенберговой матрицы, имеющей квазисепарабельную структуру. Однако число членов рекурсии, связывающей эти последние многочлены, растет вместе с порядком главной подматрицы в отличие от трехчленных соотношений, которым подчиняются соседние характеристические многочлены якобиевой матрицы. Этот факт объясняет большой резонанс, сопровождавший статью Кантеро, Морала и Веласкеса (Cantero, Moral, Velázquez; см. [1]). В ней показано, что многочлены, ортогональные на единичной окружности, можно рассматривать и как характеристические многочлены в.г.п. некоторой пятидиагональной унитарной матрицы специального вида. Тем самым эти многочлены связаны рекурсией постоянной ширины 5. В честь авторов найденная ими матрица называется с тех пор CMV-матрицей.

По всей видимости, Кантеро, Морал и Веласкес не знали, что их открытие по существу содержится в гораздо более ранней статье [2], опубликованной в том же журнале "Linear Algebra and Its Applications". Видимо, не знали этого и авторы многочисленных публикаций, откликнувшихся на [1] (см., например, [3], где ссылка на [2] отсутствует).

Ключевые слова: ортогональные многочлены, матрица Хессенберга, многочлены Лорана, CMV-матрица, ведущая главная подматрица, обобщенный процесс Ланцоша.

Настоящее сообщение мотивировано желанием в какой-то мере восстановить справедливость. В §2 (с некоторыми упрощениями) рассказано о соображениях, приведших Кантеро, Морала и Веласкеса к их матрице. Этот раздел можно рассматривать как краткое изложение статьи [1]. Статья [2] и ее связь с CMV-матрицей обсуждаются в §3. В заключительном §4 мы сочли уместным сказать о том, что CMV-форма унитарных матриц есть весьма частный случай компактной формы, достижимой для любой нормальной матрицы со спектром, сосредоточенным на алгебраической кривой невысокого порядка. Средством вычисления такой формы служит описываемый в этом разделе обобщенный процесс Ланцоша (см. [4]).

§2. CMV-матрица

Многочленом Лорана (или, короче говоря, L-многочленом) будем называть произвольную конечную линейную комбинацию целых степеней комплексной переменной z. Следуя [1], обозначим линейное пространство всех таких многочленов символом Λ:

$$\Lambda = \mathbf{C}[z, z^{-1}].$$

Его подпространство $P = \mathbf{C}[z]$ есть множество обычных комплексных многочленов от z. Линейную оболочку многочленов $1, z, z^2, \ldots, z^n$ обозначаем через P_n. В отличие от P, это конечномерное подпространство размерности $n+1$.

Скалярное произведение в пространствах Λ и P вводится в [1] следующим образом. Линейный функционал $\mathcal{L}$, определенный на Λ, будем называть эрмитовым, если

$$\mathcal{L}(z^{-n}) = \overline{\mathcal{L}(z^n)} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Фиксируя эрмитов функционал $\mathcal{L}$, можем определить полуторалинейный функционал $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{L}} : \Lambda \times \Lambda \to \mathbf{C}$ формулой

$$(f, g)_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(f(z) \cdot \overline{g}(z^{-1})), \qquad f, g \in \Lambda. \tag{1}$$

Функционал (1) рассматривается как скалярное произведение в пространстве Λ и его подпространстве P. Это скалярное произведение называют квазиопределенным, если существует последовательность многочленов p_n степеней $0, 1, 2, \ldots,$ ортогональных относительно $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathcal{L}}$. При этом предполагается, что

$$(p_n, p_n)_{\mathcal{L}} = l_n \neq 0 \quad \forall n.$$

Если $l_n > 0$ $\forall n$, то эрмитов функционал $\mathcal{L}$ называется положительно определенным. Известно, что всякий положительно определенный функционал может быть представлен в виде интеграла Стильтьеса, взятого по комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Умножая многочлены p_n на подходящие нормирующие множители, можем получить из них последовательность $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ многочленов с положительными старшими коэффициентами, для которых

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \pm 1 \quad \forall n.$$

Такую последовательность будем называть ортонормированной. Она однозначно определяется выбранным квазиопределенным функционалом $\mathcal{L}$.

Наряду с $\{\varphi_n\}$, вводится последовательность $\{\phi_n\}$ ортогональных многочленов с единичными старшими коэффициентами (т.н. унитарных многочленов). Эта последовательность также однозначно определена функционалом $\mathcal{L}$. Многочлены φ_n и ϕ_n связаны соотношениями

$$\varphi_n = k_n \phi_n, \quad k_n = |(\phi_n, \phi_n)_{\mathcal{L}}|^{-1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если нормировать сам функционал $\mathcal{L}$ условием $\mathcal{L}(1) = 1$ (что в дальнейшем предполагается), то $\phi_0(z) \equiv 1$, а потому $k_0 = 1$ и $\varphi_0(z) \equiv 1$.

Переход от ортогональных многочленов к (бесконечным) матрицам осуществляется в [1] таким образом. Фиксируем в предгильбертовом пространстве P ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ и запишем в этом базисе матрицу оператора Π умножения на независимую переменную z:

$$\Pi f(z) = z f(z), \quad f(z) \in P. \tag{2}$$

Учитывая условия ортогональности, получаем матрицу $\mathcal{H}$ хессенберговой формы. Действительно, k-й столбец этой матрицы составлен из координат многочлена $z\varphi_{k-1}(z)$ в базисе $\{\varphi_n\}$. Этот многочлен имеет степень k, а потому ортогонален ко всем многочленам φ_n с индексами $n > k$. Следовательно, лишь первые $k+1$ элементов k-го столбца могут быть ненулевыми. (Отметим, что матрица оператора составляется в [1] по строкам, а не по столбцам. Поэтому вместо верхнехессенберговой матрицы $\mathcal{H}$ нашего описания в [1] получается нижнехессенбергова матрица.)

Пятидиагональная форма для матрицы оператора Π достигается переходом к некоторому ортогональному базису всего пространства Λ. Сохраним прежний квазиопределенный функционал $\mathcal{L}$, порождающий последовательности ортогональных многочленов $\{\varphi_n\}$ и $\{\phi_n\}$.

Используем скалярное произведение (1) для того, чтобы с помощью процесса Грама–Шмидта ортонормировать последовательность

$$1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots, z^n, z^{-n}, \ldots$$

В результате получим последовательность ортонормированных L-многочленов $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$. Они связаны с многочленами φ_n соотношениями

$$\chi_{2n}(z) = z^{-n}\varphi_{2n}^*(z),$$

$$\chi_{2n+1}(z) = z^{-n}\varphi_{2n+1}^*(z).$$

Для многочлена $p_n(z)$ степени n символ $p_n^*(z)$ обозначает обращенный и сопряженный многочлен

$$p_n^*(z) = z^n\overline{p}(z^{-1}).$$

Оказывается, что в базисе $\{\chi_n\}_{n\geqslant 0}$ оператор Π имеет матрицу $\mathcal{F}$ блочно-трехдиагонального вида

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} -a_1 \\ \rho_1 \end{matrix} & \widehat{M}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & M_2^t & \widehat{M}_3 & \cdots \\ 0 & 0 & M_4^t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Блоки M_k и $\widehat{M}_k$ $(k \geqslant 1)$ – это одноранговые 2×2-матрицы следующего вида:

$$M_k = \begin{pmatrix} -\rho_k a_{k+1} & \rho_k\rho_{k+1} \\ -\overline{a_k}a_{k+1} & \overline{a_k}\rho_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \widehat{M}_k = \begin{pmatrix} -\widehat{\rho_k}a_{k+1} & \widehat{\rho_k}\widehat{\rho_{k+1}} \\ -\overline{a_k}a_{k+1} & \overline{a_k}\widehat{\rho_{k+1}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Числа a_k $(k \geqslant 1)$ – это так называемые параметры Шура ортогональных последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\phi_n\}$. Точный их смысл: $a_k = \varphi_k(0)$. Числа ρ_k и $\widehat{\rho_k}$ выражаются через параметры Шура формулами:

$$\rho_k = \left|1 - |a_k|^2\right|^{1/2}, \quad \widehat{\rho_k} = \operatorname{sgn}(1 - |a_k|^2)\rho_k. \tag{5}$$

Известно, что для квазиопределенного функционала $\mathcal{L}$ параметры Шура удовлетворяют условию $|a_k| \neq 1$ (а в положительно определенном случае даже условию $|a_k| < 1$). Исключением является лишь параметр $a_0 = \varphi_0(0) = 1$.

Учитывая формулы (4), $\mathcal{F}$ можно записать как скалярную пятидиагональную матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -a_1 & -\widehat{\rho_1} a_2 & \widehat{\rho_1}\widehat{\rho_2} & 0 & \cdots & & \\ \rho_1 & -\overline{a_1} a_2 & \overline{a_1}\widehat{\rho_2} & 0 & \cdots & & \\ 0 & -\rho_2 a_3 & -\overline{a_2} a_3 & -\widehat{\rho_3} a_4 & \widehat{\rho_3}\widehat{\rho_4} & 0 & \cdots \\ 0 & \rho_2\rho_3 & \overline{a_2}\rho_3 & -\overline{a_3} a_4 & \overline{a_3}\widehat{\rho_4} & 0 & \cdots \\ & \cdots & 0 & -\rho_4 a_5 & -\overline{a_4} a_5 & \cdots & \\ & \cdots & 0 & \rho_4\rho_5 & \overline{a_4}\rho_5 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$, хотя и соответствуют одному и тому же оператору умножения на z, записывают этот оператор в базисах разных пространств. Действительно, $\{\chi_n\}$ – это базис всего пространства Λ, тогда как $\{\varphi_n\}$ – всего лишь базис подпространства P. Естественно спросить: какую информацию об исходных последовательностях $\{\varphi_n\}$ и $\{\phi_n\}$ может дать матрица $\mathcal{F}$?

Ответ на этот вопрос дает теорема 3.1 из [1]. Обозначим через $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{F}_n$ ведущие главные подматрицы порядка n соответственно в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$. Понятно, что унитарный многочлен φ_n может рассматриваться как характеристический многочлен матрицы $\mathcal{H}_n$. Упомянутая теорема устанавливает, что φ_n есть в то же время характеристический многочлен матрицы $\mathcal{F}_n$. Заодно она показывает, что все собственные значения этой матрицы имеют геометрическую кратность 1. Аналогичное свойство неразложимой хессенберговой матрицы $\mathcal{H}_n$ очевидно. Поэтому $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{H}_n$ не только имеют один и тот же характеристический многочлен, но и являются подобными матрицами.

Итак, корни многочленов φ_n (или ϕ_n), ортогональных на единичной окружности, можно вычислить как собственные значения в.г.п. пятидиагональной матрицы $\mathcal{F}$. В этом выводе и состоит главный результат статьи [1].

Отметим еще один примечательный факт, найденный в [1]: матрица $\mathcal{F}$ может быть представлена как произведение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(2)}\mathcal{F}^{(1)}, \tag{7}$$

где $\mathcal{F}^{(1)}$ и $\mathcal{F}^{(2)}$ суть блочно-диагональные матрицы:

$$\mathcal{F}^{(1)} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Theta_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \Theta_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathcal{F}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Theta_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \Theta_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Блоки Θ_k – это 2×2-матрицы вида

$$\begin{pmatrix} -a_k & \rho_k \\ \widehat{\rho_k} & \overline{a_k} \end{pmatrix}, \qquad k \geqslant 1. \tag{10}$$

Из формул (5) следует, что эти матрицы Θ_k унитарны.

§3. О приведении унитарных пучков

Стандартный метод решения спектральных задач для линейного матричного пучка $A - \lambda B$ заключается в приведении этого пучка к форме Шура:

$$A - \lambda B \longrightarrow Q^* A P - \lambda Q^* B P. \tag{11}$$

Матрицы $R = Q^*AP$ и $S = Q^*BP$ – треугольные одного типа (например, верхнетреугольные), а матрицы Q и P, осуществляющие приведение, – унитарные.

Для матриц A и B не слишком высокого порядка практическим средством реализации перехода (11) является QZ-алгоритм. Напомним, что этот метод состоит из двух основных этапов. Первый этап использует конечную последовательность хаусхолдеровых отражений для того, чтобы привести матрицу B к треугольному виду, а матрицу A – к форме Хессенберга. Второй этап итерационный; цель итераций состоит в том, чтобы, сохраняя треугольную форму для B, сделать треугольной и матрицу A.

В статье [2] рассматриваются унитарные пучки $U - \lambda V$, т.е. пучки, в которых обе матрицы U и V унитарные. В частном случае $V = I$ получаем стандартную проблему собственных значений для унитарной матрицы U.

Вместо того чтобы приводить пучок $U - \lambda V$ к форме Шура, авторы [2] показывают, что с помощью хаусхолдеровых отражений U и V можно преобразовать в блочно-диагональные матрицы $G_0 = Q^*UP$ и $G_e = Q^*VP$. Если n – порядок исходного пучка, то G_0 и G_e – не что иное, как ведущие главные подматрицы порядка n соответственно в матрицах $\mathcal{F}^{(1)}$ и $\mathcal{F}^{(2)}$ предыдущего раздела (см. формулы (8) и (9)). Отметим, что процесс приведения пучка $U - \lambda V$ к виду $G_0 - \lambda G_e$ конечен и его сложность составляет $O(n^3)$ арифметических операций (плюс небольшое число извлечений квадратных корней).

Обобщенная проблема собственных значений

$$Ux = \lambda Vx$$

посредством замены

$$y = Vx$$

может быть сведена к обычной спектральной задаче

$$UV^*y = \lambda y$$

для унитарной матрицы $W = UV^*$. Переходу

$$U - \lambda V \longrightarrow G_0 - \lambda G_e$$

соответствует преобразование W в матрицу $G_0G_e^*$. Эта матрица, выписанная в замечании 2.21 статьи [2], есть в точности матрица $\mathcal{F}_n$ предыдущего раздела.

В частном случае $V = I$ приходим к следующему выводу: всякая унитарная матрица U конечным процессом может быть приведена к пятидиагональному виду.

Хотя CMV-матрица появляется в [2], в этой статье ничего не говорится об ортогональных многочленах. Основное различие между [1] и [2] состоит в следующем. По произвольной ортонормированной последовательности многочленов φ_n возрастающих степеней можно составить неразложимую хессенбергову матрицу $\mathcal{H}$, как это было сделано в разделе 2. Нетрудно показать, что для каждого n корни многочлена $\varphi_n(z)$ совпадают с собственными значениями ведущей главной подматрицы $\mathcal{H}_n$ в $\mathcal{H}$. Однако в [2] отсутствует аналог теоремы 3.1 из [1], согласно которой то же самое справедливо для собственных значений подматрицы $\mathcal{F}_n$ в $\mathcal{F}$.

Упомянем еще, что в разделе 3 статьи [2] отмечено следующее обстоятельство: всякую унитарную матрицу U можно преобразовать в

CMV-матрицу с помощью процесса типа Ланцоша, который по заданному (нормированному) вектору q_1 ортонормирует члены последовательности

$$q_1, Uq_1, U^*q_1, U^2q_1, (U^2)^*q_1, \ldots, U^kq_1, (U^k)^*q_1, \ldots$$

Это наблюдение можно существенно обобщить, что будет сделано в §4.

§4. Обобщенный процесс Ланцоша

Всякую $n \times n$-матрицу A можно привести к форме Хессенберга с помощью метода Арнольди. Этот метод состоит в том, что по заданному вектору v ортонормируется степенная последовательность

$$v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v, \ldots \tag{12}$$

Линейная оболочка первых m членов этой последовательности называется m-м подпространством Крылова. Ее обычное обозначение – $\mathcal{K}_m(A, v)$.

Если мы хотим получить для A компактную форму, более симметричную по отношению к главной диагонали, то следует использовать не только A, но и сопряженную с ней матрицу A^*. Рассмотрим вместо (12) так называемую обобщенную степенную последовательность

$$v, Av, A^*v, A^2v, AA^*v, A^*Av, (A^2)^*v, A^3v, \ldots \tag{13}$$

Устройство этой последовательности удобно описывать в терминах слов (или мономов) от двух переменных, скажем, s и t. Если речь идет о матрице A общего вида, то переменные s и t следует считать некоммутирующими, и тогда словом называется всякое выражение вида

$$W(s,t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\cdots s^{m_k}t^{n_k}, \tag{14}$$

где все показатели – неотрицательные целые числа. Степенью слова (14) называется сумма $m_1 + n_1 + \cdots + m_k + n_k$. С этим словом мы связываем матрицу

$$W(A, A^*) = A^{m_1}(A^*)^{n_1}A^{m_2}(A^*)^{n_2}\cdots A^{m_k}(A^*)^{n_k}.$$

Каждый член последовательности (13) имеет вид

$$u_k = W_k(A, A^*)v,$$

причем вектор $u_1 = v$ соответствует единственному (пустому) слову W_1 степени 0, векторы $u_2 = Av$ и $u_3 = A^*v$ соответствуют словам

$W_2 = s$ и $W_3 = t$ степени 1, и т.д. Степени слов в последовательности (13) монотонно не убывают, и совокупность векторов, отвечающих словам степени m, называется m-м слоем этой последовательности.

Здесь нас интересует только случай нормальной матрицы A, поэтому переменные s и t будем считать коммутирующими. В этом случае m-й слой состоит из $m+1$ векторов вида

$$A^{\alpha}(A^*)^{\beta}, \qquad \alpha + \beta = m. \tag{15}$$

Подпространство

$$\mathcal{L}_m(A, v) = \mathrm{span}\{W(A, A^*)v | \text{степень} W \leqslant m\}$$

будем называть m-м обобщенным подпространством Крылова. Разность размерностей подпространств $\mathcal{L}_m$ и $\mathcal{L}_{m-1}$ обозначается через w_m и называется шириной m-го слоя.

Очевидно (см. (15)), что для нормальной матрицы A справедливо неравенство

$$w_m \leqslant m + 1.$$

Однако возможно и строгое неравенство. Так, в случае унитарной матрицы A вектор 2-го слоя AA^*v совпадает с начальным вектором v последовательности (13), а потому $w_2 < 3$.

Обобщенный процесс Ланцоша состоит в ортонормализации этой последовательности. Опишем его в геометрических терминах.

Пусть задан нормированный вектор $v = v_1$. Предположим, что на предыдущих шагах процесса уже построена система векторов v_1, $v_2, \ldots, v_k$, являющаяся ортонормированным базисом линейной оболочки $\mathcal{M}_k$ первых p_k векторов $u_1, \ldots, u_{p_k}$ последовательности (13). Если очередной вектор u_{p_k+1} не принадлежит этой оболочке, то опущенный из него на $\mathcal{M}_k$ перпендикуляр после нормирования становится вектором v_{k+1}. В противном случае мы пытаемся найти v_{k+1}, нормируя перпендикуляр, опущенный из следующего вектора u_{p_k+2}, и т.д.

Может случиться, что все векторы m-го слоя принадлежат предыдущему крыловскому подпространству $\mathcal{L}_{m-1}$, причем $\dim \mathcal{L}_{m-1} < n$. В этом случае $\mathcal{L}_{m-1}$ является общим инвариантным подпространством матриц A и A^*. Мы будем игнорировать эту маловероятную возможность. Тогда за конечное число шагов будет получен ортонормированный базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ всего пространства $\mathbf{C}^n$. Эти векторы v_i будем называть векторами Ланцоша.

Проведение описанного процесса ортогонализации облегчается следующими свойствами, роднящими этот процесс с классическим алгоритмом Ланцоша:

1. Для всякого вектора $x \in \mathcal{L}_m$ справедливы включения

$$Ax \in \mathcal{L}_{m+1}, \quad A^*x \in \mathcal{L}_{m+1}.$$

2. Если $v_l \in \mathcal{L}_m \setminus \mathcal{L}_{m-1}$ $(m \geqslant 2)$, то

$$Av_l \perp \mathcal{L}_i,\ A^*v_l \perp \mathcal{L}_i \quad (i \leqslant m-2).$$

Есть и еще одно важное свойство, которому уже нет соответствия в методе Ланцоша.

3. Если для некоторого индекса m_0 справедливо

$$0 < w_{m_0} < m_0 + 1$$

и при этом построение базиса из ланцошевых векторов еще не закончено, то

$$w_m \leqslant w_{m_0}, \qquad m > m_0.$$

Например, как отмечено выше, для унитарной матрицы A ширина 2-го слоя не превосходит 2. Поэтому

$$w_m \leqslant 2, \qquad m \geqslant 2.$$

Этот феномен невозрастания чисел w_m будем называть их стабилизацией. Оказывается, что стабилизация происходит для всякой нормальной матрицы A, спектр которой локализован на вещественной алгебраической кривой Γ, задаваемой уравнением

$$g(x, y) = 0 \tag{16}$$

невысокого порядка m. Действительно, заменив x и y в уравнении (16) выражениями

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

получим комплексную форму этого уравнения

$$h(z, \overline{z}) = 0.$$

Поскольку все собственные значения нормальной матрицы $h(A, A^*)$ равны нулю, то верно равенство

$$h(A, A^*) = 0.$$

Умножая обе части на v, заключаем, что векторы m-го слоя линейно зависимы над подпространством $\mathcal{L}_{m-1}$. Таким образом, $w_m < m + 1$, что влечет за собой стабилизацию.

Рассмотрим эту ситуацию подробней. Перейдем от исходного базиса, в котором задана матрица A, к базису из векторов Ланцоша. Из свойств 1 и 2 следует, что полученную матрицу A_v естественно рассматривать как блочно-трехдиагональную. При этом диагональные блоки суть квадратные матрицы, порядки которых возрастают от 1 до m и затем стабилизируются на этом значении (а, может быть, и уменьшаются в дальнейшем). Матрицу A_v можно рассматривать и как ленточную. Нетрудно показать, что в этом случае ширина ленты не превосходит $4m - 1$.

Матрица A_v есть в известном смысле аналог CMV-матрицы для системы многочленов $\{\varphi_n\}$, ортогональных (и нормированных) относительно кривой Γ (см. (16)). В самом деле, действуя, как в §2, можем получить матрицу Хессенберга $\mathcal{H}$ с ведущими главными подматрицами, характеристические многочлены которых совпадают с многочленами φ_n. Эту матрицу $\mathcal{H}$ мы можем затем перевести в матрицу $\mathcal{H}_v$ описанного выше вида. Для полной аналогии не хватает только ответа на следующий вопрос: будут ли многочлены $\{\varphi_n\}$ характеристическими многочленами ведущих главных подматриц матрицы $\mathcal{H}_v$?

Литература

1. M. J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle.* — Linear Algebra Appl. **362** (2003), 29–56.
2. A. Bunse-Gerstner, L. Elsner, *Schur parameter pencils for the solution of the unitary eigenproblem.* — Linear Algebra Appl. **154–156** (1991), 741–778.
3. T. Bella, V. Olshevsky, P. Zhlobich, *A quasi-separable approach to five-diagonal CMV and Fiedler matrices.* — Linear Algebra Appl. **434** (2011), 957–976.
4. L. Elsner, Kh. D. Ikramov, *On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities.* — Linear Algebra Appl. **254** (1997), 79–98.

Ikramov Kh. D. The CMV-matrix and the generalized Lanczos process.

The CMV-matrix is the five-diagonal matrix that represents the operator of multiplication by an independent variable in a special basis formed of Laurent polynomials orthogonal on the unit circle C. The article by Cantero, Moral, and Velázquez, which was published in 2003 and described this matrix, has attracted much attention because it implied that the conventional orthogonal polynomials on C can be interpreted as the characteristic polynomials of the leading principal submatrices of a certain five-diagonal matrix. In this publication, we remind about the fact that finite-dimensional sections of the CMV-matrix emerged in papers on the unitary eigenvalue problem long before the article by Cantero et al. Moreover, band forms were also found for a number of other situations in the normal eigenvalue problem.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 31 января 2017 г.