Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Х. Д. Икрамов

БИНОРМАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

§1. Об обобщениях свойства нормальности

Существует ряд обобщений понятия “нормальный оператор” на случай бесконечных матриц и линейных операторов, действующих в бесконечномерных пространствах. Многие из этих обобщений бессодержательны для конечных матриц. Например, оператор или матрица A называются гипонормальными, если

$$A^*A - AA^* \geqslant 0.$$

В конечномерном случае положительно полуопределенная матрица $B = A^*A - AA^*$, не будучи нулевой, должна была бы иметь хотя бы одно положительное собственное значение. Между тем след $\mathrm{tr}B$ равен нулю, что исключает наличие таких значений.

Более сложный случай представляет собой понятие паранормальности. Назовем $n \times n$-матрицу A паранормальной, если

$$\|A^2x\| \cdot \|x\| \geqslant \|Ax\|^2 \qquad \forall x \in \mathbf{C}^n. \tag{1}$$

Всюду в статье символ $\|\cdot\|$ обозначает (евклидову) длину вектора или подчиненную ей норму матриц (спектральную норму).

Покажем вначале, что неравенство (1) выполняется для всякой нормальной матрицы A. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов этой матрицы и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Записывая вектор x разложением в этом базисе, имеем

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i,$$

$$\|Ax\|^2 = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |\xi_i|^2,$$

$$\|A^2x\|^2 = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \xi_i u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^4 |\xi_i|^2$$

Ключевые слова: бинормальные матрицы, гипонормальные матрицы, паранормальные матрицы, числовая область, диагональный сдвиг.

и

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 |\xi_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^4 |\xi_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{1/2} = \|A^2 x\| \cdot \|x\|.$$

В этом последнем соотношении использовано неравенство Коши–Шварца–Буняковского.

Пусть теперь известно, что неравенство (1) выполнено для матрицы A и любого вектора $x \in \mathbf{C}^n$. Для простоты предположим, что все сингулярные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ матрицы A простые:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_n.$$

(Это допущение можно снять путем некоторого усложнения рассуждений). Возьмем в качестве x нормированный правый сингулярный вектор u_1, отвечающий числу σ_1. Тогда

$$\sigma_1^2 = \|Ax\|^2 \leqslant \|A^2 x\| \leqslant \|A^2\| \leqslant \|A\|^2 = \sigma_1^2.$$

Итак, для A справедливо равенство

$$\|A^2\| = \|A\|^2. \tag{2}$$

Если

$$A = V \Sigma U^*$$

– сингулярное разложение A (где, как обычно, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$), то

$$\|A^2\| = \|V \Sigma U^* V \Sigma U^*\| = \|\Sigma (U^* V) \Sigma\|.$$

Положим $W = U^* V$. Равенство (2) означает существование (нормированного) вектора x такого, что

$$\|\Sigma W \Sigma x\| = \sigma_1^2. \tag{3}$$

Из (3) необходимо вытекает соотношение

$$\|\Sigma x\| = \sigma_1,$$

означающее, что x есть кратное координатного вектора e_1:

$$x = \alpha e_1, \qquad |\alpha| = 1.$$

Пусть w_1 – первый столбец унитарной матрицы W. Равенство (3) теперь принимает вид

$$\|\Sigma(\alpha w_1)\| = \sigma_1.$$

Таким образом, и вектор w_1 лишь скалярным множителем модуля 1 отличается от вектора e_1. Иначе говоря,

$$U^*Ve_1 = \beta e_1, \qquad |\beta| = 1,$$

или

$$Ve_1 = \beta U e_1. \tag{4}$$

Вектор $v_1 = Ve_1$ – это левый сингулярный вектор, отвечающий числу σ_1. Он связан с правым сингулярным вектором $u_1 = Ue_1$ соотношением

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A u_1.$$

Поэтому равенство (4), переписанное в виде

$$Au_1 = \beta\sigma_1 u_1,$$

означает, что вектор u_1 является для A собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = \beta\sigma_1$. Поскольку $|\lambda_1| = \sigma_1$, число λ_1 лежит на границе числовой области (хаусдорфова множества) матрицы A. Собственное значение с таким расположением (т.н. нормальное собственное значение; см. [1, п. 1.6.5–1.6.6]) обладает следующим свойством: всякий относящийся к нему собственный вектор ортогонален к любому собственному вектору для прочих собственных значений.

Перейдем от исходного базиса координатных векторов $e_1, \ldots, e_n$ к произвольному ортонормированному базису $\{u\}$, включающему в себя u_1 в качестве первого вектора. В этом базисе матрица A принимает вид

$$\lambda_1 \oplus A_{n-1}.$$

Подматрица A_{n-1} сохраняет свойство (1):

$$\|A_{n-1}^2 y\| \cdot \|y\| \geqslant \|A_{n-1} y\|^2 \qquad \forall y \in \mathbf{C}^{n-1}.$$

Это позволяет применить к ней те же рассуждения, какие выше проводились для матрицы A. Продолжая таким образом, мы в конечном счете найдем ортонормированный базис, в котором A приобретает диагональный вид. Тем самым всякая паранормальная матрица A является в действительности нормальной.

Несмотря на приведенные примеры, имеются и вполне содержательные конечномерные обобщения понятия нормальности. Настоящее сообщение посвящено одному из них. Назовем квадратную матрицу A

бинормальной, если ассоциированные с ней матрицы AA^* и A^*A коммутируют. Разумеется, все нормальные матрицы A (для которых AA^* и A^*A просто совпадают) бинормальны. Однако существуют и бинормальные матрицы, не являющиеся нормальными. Простейшим примером может служить жорданова клетка

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой матрицы $J_2 J_2^t$ и $J_2^t J_2$ диагональны и, следовательно, коммутируют.

(Отметим, что в литературе встречаются и другие определения бинормальности. Так, в [2] бинормальной называют матрицу четного порядка $2n$, составленную из четырех попарно коммутирующих нормальных $n \times n$-блоков. Такая матрица является бинормальной и в смысле принятого нами определения, которое, однако, не требует четности порядка и не связывает свойство бинормальности с блочным устройством матрицы.)

Ниже мы даем обзор свойств бинормальных матриц. Факты, включенные в этот обзор, не новы, но представляются прочно забытыми. Мы исходили в основном из работ [3–6], давая многим содержащимся там результатам свои собственные, более простые доказательства. Напоминание этих старых результатов представляется нам не лишним по следующей причине: бинормальные матрицы, не являющиеся нормальными, дают примеры матриц, собственные значения которых могут сильно различаться по своей индивидуальной обусловленности – от идеально обусловленных, каковыми являются все собственные значения нормальных матриц, до собственных значений со сколь угодно большими числами обусловленности. Такого рода матрицы весьма полезны при тестировании спектральных алгоритмов.

§2. Свойства бинормальных матриц

Следуя [5], будем обозначать множество бинормальных матриц порядка n символом $(BN)_n$ или просто (BN). Начнем с небольшого перечня свойств, которые роднят (BN) с множеством нормальных матриц.

Предложение 1. *Пусть $A \in (BN)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ и всякой унитарной матрицы U справедливы включения:*

(i) $\alpha A \in (BN)$;
(ii) $U^*AU \in (BN)$;
(iii) $A^*, A^t, \bar{A} \in (BN)$;
(iv) *если* A *– невырожденная матрица, то* $A^{-1} \in (BN)$.

Но есть и очевидные различия между двумя множествами. Так, всякая натуральная степень нормальной матрицы сама нормальна. Между тем матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

бинормальна, так как

$$AA^t = \operatorname{diag}(1,2,2), \qquad A^tA = \operatorname{diag}(2,2,1);$$

в то же время матрица $B = A^2 \notin (BN)$, поскольку

$$\{(BB^t)(B^tB)\}_{12} = 2, \qquad \{(B^tB)(BB^t)\}_{12} = 3.$$

Далее, сумма коммутирующих нормальных матриц сама нормальна. С другой стороны, рассмотрим сумму бинормальной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и нормальной матрицы I_2:

$$B = A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица B не является бинормальной; действительно,

$$(BB^t)(B^tB) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (B^tB)(BB^t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть A – произвольная матрица из (BN). Будет ли эта матрица нормальной? Ответ на этот вопрос в известной мере зависит от положения числовой области матрицы A относительно точки $z = 0$. Полный же ответ дает поведение A при диагональных сдвигах. Приведем результаты на эту тему, принадлежащие М. Эмбри и С. Кэмпбеллу (см. [3–6]). Начнем со следующей подготовительной теоремы [4].

Теорема 1. *Пусть H и K – коммутирующие нормальные матрицы. Предположим, что существует матрица A, для которой*

$$AH = KA, \tag{5}$$

причем точка $z = 0$ является внешней по отношению к числовой области $W(A)$ этой матрицы. Тогда $H = K$.

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – общий ортонормированный базис из собственных векторов для коммутирующих матриц H и K. Преобразуем все три матрицы H, K и A к этому базису:

$$H \to \Lambda = U^*HU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$
$$K \to M = U^*KU = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$
$$A \to B = U^*AU.$$

Соотношение (5) принимает вид

$$B\Lambda = MB,$$

или, в поэлементной записи,

$$b_{ij}(\lambda_i - \mu_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Неравенство $\lambda_i \neq \mu_i$ невозможно ни для какого индекса i, поскольку в противном случае из (6) следует, что $b_{ii} = (Be_i, e_i) = 0$, т.е. $0 \in W(B) = W(A)$ вопреки условию теоремы. Таким образом, $\Lambda = M$, а потому $H = K$. □

Из теоремы 1 вытекает такое важное следствие [4].

Предложение 2. *Пусть $A \in (BN)$, причем $0 \notin W(A)$. Тогда A – нормальная матрица.*

Доказательство. Положим $H = A^*A$ и $K = AA^*$. Для матриц H, K и A выполняются все условия теоремы 1 и, следовательно, $A^*A = AA^*$. □

Предложение 2 уточняется в [3] следующим образом.

Предложение 3. *Пусть $A \in (BN)$, причем матрица*

$$\mathrm{Re}A = \frac{1}{2}(A + A^*) \tag{7}$$

положительно полуопределена. Тогда A – нормальная матрица.

Доказательство. Матрица (7) является частью т.н. эрмитова (или теплицева) разложения матрицы A:

$$A = B + iC,$$
$$B = \mathrm{Re}A, \qquad C = \mathrm{Im}A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Матрицы $H = A^*A$ и $K = AA^*$ связаны с B и C следующими соотношениями:

$$A^*A = B^2 + C^2 + i(BC - CB), \tag{8}$$

$$AA^* = B^2 + C^2 + i(CB - BC). \tag{9}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, перейдем к общему ортонормированному базису $\{u\}$ из собственных векторов для коммутирующих эрмитовых матриц H и K:

$$H \to \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \qquad K \to M = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Преобразованные матрицы A, B и C будем обозначать символами $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$. Тогда выполняются равенства

$$\widetilde{a}_{ij}(\lambda_i - \mu_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что для некоторого индекса i справедливо неравенство $\lambda_i \neq \mu_i$. Не ограничивая общности, можно считать, что $i = 1$. Тогда $\widetilde{a}_{11} = 0$ и, следовательно, $\widetilde{b}_{11} = \widetilde{c}_{11} = 0$. По условию, матрица $\widetilde{B}$ положительно полуопределена; поэтому из равенства $\widetilde{b}_{11} = 0$ вытекает, что равны нулю все элементы первой строки и первого столбца этой матрицы. В свою очередь, отсюда следует равенство нулю диагонального элемента (1,1) матрицы $\widetilde{B}\widetilde{C} - \widetilde{C}\widetilde{B}$. Теперь соотношения (8) и (9), записанные в базисе $\{u\}$, дают

$$\lambda_1 = \{\widetilde{C}^2\}_{11}, \qquad \mu_1 = \{\widetilde{C}^2\}_{11},$$

т.е. $\lambda_1 = \mu_1$ вопреки исходному предположению. Итак, для всех i справедливо равенство $\lambda_i = \mu_i$, означающее, что $A^*A = AA^*$. $\square$

Замечание. Используя пункт (i) предложения 1, можно заменить требование положительной полуопределенности матрицы $\mathrm{Re}A$ более общим условием $0 \in \partial W(A)$. В этой форме предложение 3 вместе с предыдущим предложением означают: матрица $A \in (BN)$ может не быть нормальной только в том случае, когда $z = 0$ является внутренней точкой числовой области $W(A)$.

Если A – нормальная матрица, то вместе с A нормальны и все матрицы вида $A + \lambda I$, получаемые из A сдвигами главной диагонали. Кэмпбелл обнаружил (см. [6]), что матрицы $A \in (BN)$, не являющиеся нормальными, реагируют на диагональные сдвиги совсем иначе.

Теорема 2. *Пусть* $A \in (BN)$. *Включение* $A + \lambda I \in (BN)$ *для ненулевого числа* λ *возможно тогда и только тогда, когда* A *– нормальная матрица.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна. При обосновании необходимости будем пользоваться стандартным обозначением коммутатора матриц B и C:

$$[B, C] = BC - CB.$$

Пусть $A + \lambda I \in (BN)$ для $\lambda \neq 0$. Заменяя A подходящей матрицей вида $e^{i\phi}A$, можем считать λ вещественным числом. Имеем

$$(A + \lambda I)^*(A + \lambda I) = A^*A + \lambda(A^* + A) + \lambda^2 I,$$

$$(A + \lambda I)(A + \lambda I)^* = AA^* + \lambda(A^* + A) + \lambda^2 I,$$

откуда выводим

$$\begin{aligned} &[(A + \lambda I)^*(A + \lambda I), (A + \lambda I)(A + \lambda I)^*] = 0 \\ &\sim [A^*A, AA^*] + \lambda[A^* + A, AA^* - A^*A] = 0 \\ &\sim [A^* + A, AA^* - A^*A] = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В последнем переходе использованы условия $A \in (BN)$ и $\lambda \neq 0$.

Итак, включение $A + \lambda I \in (BN)$ равносильно условию (10). Поскольку последнее не зависит от λ, получается, что бинормальность матрицы $A + \lambda I$ для *какого-либо* $\lambda \neq 0$ влечет за собой ее бинормальность для *любого* λ. Однако при достаточно больших λ числовая область $W(A + \lambda I)$ не содержит точки $z = 0$. Для таких λ матрица $A + \lambda I$ должна быть нормальной согласно предложению 2. Но тогда нормальна и матрица A. □

§3. Бинормальные матрицы малого порядка

В [6] дано описание возможных форм бинормальных матриц порядков 2 и 3, достижимых посредством унитарных подобий и умножений на ненулевые числа. Для $n = 2$ приведены следующие три формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{C};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b > 0;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{C}.$$

Нам кажется более логичным искать возможные формы бинормальных матриц A в ортонормированном базисе из общих собственных векторов матриц A^*A и AA^*, как это сделано в доказательстве теоремы 1. Пусть u_1, u_2 – такой базис и λ_1, λ_2 – соответствующие собственные значения матрицы A^*A. Если таков же порядок собственных значений для матрицы AA^*, то $A^*A = AA^*$ и A – нормальная матрица. Другая возможность состоит в том, что

$$AA^*u_1 = \lambda_2 u_1, \qquad AA^*u_2 = \lambda_1 u_2.$$

В этом случае матрица A, преобразованная к базису $\{u\}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где a и b – произвольные комплексные числа. В частности, при $a = 1$ и $b = 0$ получаем жорданову клетку J_2. Если же $ab \neq 0$, то собственными значениями матрицы A являются два квадратных корня $\sqrt{ab}$. Их числа обусловленности могут быть как угодно велики, если достаточно велико отношение b/a (или отношение a/b).

Применяя аналогичные рассуждения в случае $n = 3$, приходим к матрицам следующих типов:

(i) A – нормальная матрица;

(ii) $A_2 \oplus c$, где A_2 – матрица вида (11), а c – произвольное комплексное число;

(iii)

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbf{C}.$$

В матрице (ii) собственное значение c обусловлено идеально (его спектральное число обусловленности равно 1); собственные же значения подматрицы A_2 могут быть обусловлены как угодно плохо. В частных случаях эта подматрица может быть жордановой клеткой порядка 2.

Жорданову клетку порядка 3 можно получить из матрицы (iii), полагая $c = 0, ab \neq 0$. Отсюда ясно, что и жорданову клетку любого порядка n, а также любую прямую сумму таких клеток можно считать бинормальной матрицей.

Литература

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
2. R. Bhatia, R. A. Horn, F. Kittaneh, *Normal approximants to binormal operators.* — Linear Algebra Appl. **147** (1991), 167–179.
3. M. R. Embry, *Conditions implying normality in Hilbert space.* — Pacific J. Math. **18** (1966), 457–460.
4. M. R. Embry, *Similarities involving normal operators on Hilbert space.* — Pacific J. Math. **35** (1970), 331–336.
5. S. L. Campbell, *Linear operators for which T^*T and TT^* commute.* — Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 177–180.
6. S. L. Campbell, *Linear operators for which T^*T and TT^* commute* (II). — Pacific J. Math. **53** (1974), 355–361.

Ikramov Kh. D. Binormal matrices.

A square complex matrix A is said to be binormal if the associated matrices A^*A and AA^* commute. This matrix class yields a meaningful finite-dimensional extension for the concept of normality. The paper can be regarded as a survey of the properties of binormal matrices.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 31 января 2017 г.