Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Ю. К. Демьянович, В. Г. Дегтярев, Н. А. Лебединская

АДАПТИВНОЕ ВСПЛЕСКОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЧНОГО ПОТОКА

§1. Введение

Исследованию числовых потоков (сигналов) посвящено много работ: разработана теория фильтрации, теория классических вэйвлетов, теория сплайн-всплесков (см., например, монографии [1–4] и библиографию в них). Для классического вэйвлетного разложения (см. [2, 3, 5]) требуется трансляционная инвариантность рассматриваемых пространств, кратно-масштабный анализ и преобразование Фурье, что затрудняет построение адаптивных алгоритмов обработки числовых потоков. Адаптивные сплайн-всплесковые разложения используют аппроксимационные соотношения для построения вложенных пространств сплайнов на неравномерных сетках (см. [4,8]). В работах [6,7] предложены алгоритмы адаптивного сплайн-всплескового разложения числового потока. Построение сплайн-всплескового разложения потоков более общего характера, чем числовые потоки, наталкивается на трудности реализации соответствующих обобщений сплайнов.

В данной работе указанные трудности преодолены специальной конструкцией, позволяющей использовать калибровочные соотношения сплайнов для всплескового (вэйвлетного) разложения потоков матриц с элементами из метризованного поля (экономная передача таких потоков от двумерных объектов весьма актуальна). Здесь предложены адаптивные алгоритмы построения сплайн-всплескового разложения упомянутых потоков, обеспечивающие априори заданную оценку уклонения основного потока от исходного. В результате получены характеристики объемов используемых данных в основном потоке при различной нерегулярности исходного матричного потока, а также оценена степень эффективности адаптивных алгоритмов по сравнению с (более простыми) неадаптивными алгоритмами.

Ключевые слова: обработка сигналов, потоки матриц, калибровочные соотношения, адаптивные сплайн-всплески.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-01-08847.

§2. Некоторые вспомогательные утверждения

Здесь будут введены некоторые обозначения и понятия, необходимые для дальнейшего.

2.1. Адаптивная сетка. Пусть на интервале (α,β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассматривается сетка с рациональными узлами ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$,

$$\Xi: \quad \ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots, \tag{2.1}$$

$$\lim_{i\to-\infty} \xi_i = \alpha, \quad \lim_{i\to+\infty} \xi_i = \beta.$$

Пусть $d \in \Xi$, так что $d = \xi_i$ при некотором $i \in \mathbb{Z}$; введем обозначения $d^- \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i-1}$, $d^+ \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i+1}$.

Далее считаем, что $a, b \in \Xi$, $a^+ < b^-$. Обозначим $[\![a,b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid s = 0,1,\ldots,M\}$; множество $[\![a,b]\!]$ называется сеточным отрезком. Через $C[\![a,b]\!]$ обозначается линейное конечномерное пространство функций $u(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$ с нормой $\|u\|_{C[\![a,\,b]\!]} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t\in[\![a,\,b]\!]} |u(t)|$.

Символом f обозначим функцию, заданную на сетке Ξ и удовлетворяющую неравенству

$$f(t) \geqslant c, \quad t \in [\![a,b]\!], \quad c = \text{const} > 0. \tag{2.2}$$

Положим

$$\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi\in[\![a,\,b^-]\!]} \max_{t\in\{\xi,\xi^+\}} f(t)(\xi^+ - \xi), \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Если выполнены условия* (2.2)–(2.4) *и* $\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**})$, *то существуют и единственны такое натуральное число* $K = K(f,\varepsilon,\Xi)$ *и такая сетка* $\widetilde{X} \subset [\![a,b]\!]$,

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(f,\varepsilon,\Xi): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \cdots < \widetilde{x}_K \leqslant \widetilde{x}_{K+1} = b, \tag{2.5}$$

что

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \leqslant \varepsilon < \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s), \tag{2.6}$$
$$s \in \{0,1,\ldots,K-1\},$$

$$\max_{t\in[\![\widetilde{x}_K\,,\,b]\!]} f(t)(b-\widetilde{x}_K) \leqslant \varepsilon, \quad \widetilde{X}\subset\Xi. \tag{2.7}$$

Применяя индукцию по параметру s, получаем доказательство леммы 1; оно же служит источником для алгоритма реализации сетки (2.5) со свойствами (2.6)–(2.7) (см. [6]; там же дан иллюстративный пример); эту сетку называем *адаптивной*.

Суммирование соотношений (2.6) приводит к неравенству

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{K-1}\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s\,,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s) &\leqslant K\varepsilon \\ &< \sum_{s=0}^{K-1}\max_{t\in[\![\widetilde{x}_s\,,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1}-\widetilde{x}_s).\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2. Псевдоравномерная сетка. Пусть

$$\overline{\varepsilon}^* \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \max_{\xi\in[\![a,\,b^-]\!]}(\xi^+-\xi)\|f\|_{C[\![a,\,b]\!]} \tag{2.9}$$

и

$$\varepsilon\in(\overline{\varepsilon}^*,\varepsilon^{**}); \tag{2.10}$$

найдем числа[1]

$$N=N(f,\varepsilon,\Xi)\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}\lfloor\varepsilon^{**}/\varepsilon\rfloor-1 \tag{2.11}$$

и

$$h=h(f,\varepsilon,\Xi)\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{b-a}{N+1}. \tag{2.12}$$

На сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$ рассмотрим сетку

$$\overline{X}=\overline{X}(f,\varepsilon,\Xi):\ a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\ldots<\overline{x}_N=b, \quad \overline{X}\subset\Xi, \tag{2.13}$$

где

$$\overline{x}_{s+1}-\overline{x}_s\leqslant h<\overline{x}^+_{s+1}-\overline{x}_s, \quad s\in\{0,1,\ldots,N-1\}; \tag{2.14}$$

сетку $\overline{X}$ дополним узлом $\overline{x}_{N+1}\in\Xi$, $\overline{x}_{N+1}>\overline{x}_N$,

$$\overline{x}_{N+1}-\overline{x}_N\leqslant h. \tag{2.15}$$

[1] Для числа r выражение $\lfloor r\rfloor$ означает целое число k со свойством $0\leqslant r-k<1$.

Сетка (2.13) со свойствами (2.14)–(2.15) называется *псевдоравномерной сеткой шага* h (см. [6]). Из (2.4), (2.9)–(2.11) имеем

$$N+1 \leqslant \frac{b-a}{\varepsilon}\|f\|_{C[\![a,b]\!]} < N+2, \tag{2.16}$$

так что

$$(b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]} - 2\varepsilon < N\varepsilon \leqslant (b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]} - \varepsilon. \tag{2.17}$$

Из (2.16) видно, что для рассматриваемой сетки заведомо выполнено соотношение $\frac{b-a}{N+1}\|f\|_{C[\![a,b]\!]} < \varepsilon$, так что из (2.12) получаем

$$h\|f\|_{C[\![a,b]\!]} < \varepsilon.$$

В силу левого неравенства в (2.14) и неравенства (2.15), имеем

$$\max_{t\in[\![\overline{x}_s,\,\overline{x}_{s+1}]\!]} f(t)\,(\overline{x}_{s+1}-\overline{x}_s) \leqslant \varepsilon, \quad s\in\{0,1,\ldots,N\}. \tag{2.18}$$

Отсюда следует

Лемма 2.2. *Если* $\varepsilon \in (\overline{\varepsilon}^*, \varepsilon^{**})$, *то однозначно определяется сетка* (2.13) *со свойствами* (2.14)–(2.15); *при этом выполнены соотношения* (2.17)–(2.18).

2.3. Относительное количество узлов. Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *В условиях лемм* 2.1 *и* 2.2 *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]} - 2\varepsilon}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1}-\widetilde{x}_s)} &< \frac{N}{K} \\ &\leqslant \frac{(b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]}}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Предположим, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и обладает свойством

$$f(t) \geqslant c > 0, \quad t\in[a,b]. \tag{2.20}$$

Рассмотрим последовательность сеток $\Xi(\lambda)$ вида (2.1):

$$\Xi(\lambda): \quad \ldots < \xi_{-2}(\lambda) < \xi_{-1}(\lambda) < \xi_0(\lambda) < \xi_1(\lambda) < \xi_2(\lambda)\ldots, \tag{2.21}$$

зависящих от параметра $\lambda > 0$ и таких, что $a, b \in \Xi(\lambda)$.

Введем обозначения:

$$[\![a,b]\!]_\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Xi(\lambda)\cap[a,b], \quad h_\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{\xi\in[\![a,\,b^-\,]\!]_\lambda}(\xi^+-\xi).$$

Теорема 2.2. *Если непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию* (2.20), *а последовательность сеток* (2.21) *такова, что*

$$\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0, \tag{2.22}$$

то верно соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{\lambda\to+0}\frac{N}{K} = \frac{\|f\|_{C[a,b]}}{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt}. \tag{2.23}$$

Доказательство соотношения (2.23) легко получается из (2.21)–(2.22) и (2.19).

§3. Аппроксимация матричного потока

Обозначим через $\mathcal{F}$ метризованное поле[2]; соответствующая метрика обозначается $|\cdot|$ и обладает следующими свойствами: a) для $\forall f\in\mathcal{F}$ имеем $|f|\geqslant 0$, $|f|=0 \iff f=0$, b) для $\forall f,g\in\mathcal{F}$ верно неравенство треугольника $|f+g|\leqslant|f|+|g|$, c) для $\forall f,g\in\mathcal{F}$ верно равенство $|fg|=|f||g|$.

Рассмотрим линейное нормированное пространство $\mathcal{M}$ матриц $A=(a_{ij})$ фиксированнных размеров $n\times l$ над полем $\mathcal{F}$ с нормой $\|\cdot\|$.

Пусть $\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,b]\!]$ — линейное конечномерное пространство абстрактных функций $U(t)$ аргумента $t\in[\![a,b]\!]$ со значениями в упомянутом пространстве матриц[3]; введем норму

$$\|U\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,\,b]\!]} = \max_{t\in[\![a,\,b]\!]}\|U(t)\|.$$

[2]К метризованным полям относятся поля вещественных, комплексных и p-адических чисел.

[3]Слова "абстрактная функция" в дальнейшем часто заменяем словом "функция"; это не ведет к путанице, т.к. во всех случаях, когда речь идет об абстрактной функции аргумента t со значениями в пространстве $\mathcal{M}$ используются заглавные буквы или полужирный шрифт.

Элементы $U(t)$ пространства $\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,b]\!]$ называются матричными потоками. В дальнейшем понадобятся также абстракные функции, заданные на некотором отрезке $[c,d]$ вещественной оси и имеющие область значений в $\mathcal{M}$; для этих функций можно обычным образом ввести дифференцирование. Поэтому рассмотрим также линейные пространства $\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[c,d]$, $\mathbb{C}^1_{\mathcal{M}}[c,d]$, $\mathbb{C}^2_{\mathcal{M}}[c,d]$ непрерывных, непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых абстрактных функций соответственно.

Пусть функция $U(t)$ задана на сеточном отрезке $[\![y,z]\!]$,

$$[\![y,z]\!]: \quad y=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{M-1}<\xi_M=z. \tag{3.1}$$

Положим

$$\widetilde{U}(t)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}U(y)+\frac{U(z)-U(y)}{z-y}(t-y), \quad t\in[\![y,z]\!]. \tag{3.2}$$

$$D_{\Xi}W(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{W(\xi^+)-W(\xi)}{\xi^+-\xi}.$$

Легко получается следующее утверждение (см. также [6]).

Теорема 3.1. *Для функций $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$, связанных соотношением* (3.1)–(3.2), *справедливы оценки*

$$\|U(t)-\widetilde{U}(t)\|\leqslant 2\min\{t-y,z-t\}\max_{\xi\in[\![y,z^-]\!]}\|D_{\Xi}U(\xi)\|, \tag{3.3}$$

$$\|U(t)-\widetilde{U}(t)\|\leqslant (z-y)\max_{\xi\in[\![y,z^-]\!]}\|D_{\Xi}U(\xi)\|, \quad t\in[\![y,z]\!]. \tag{3.4}$$

Если исходный поток меняется относительно медленно, так что равномерно ограничены вторые разностные отношения,

$$D^2_{\Xi}U(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{D_{\Xi}U(\xi)-D_{\Xi}U(\xi^-)}{\xi-\xi^-}, \quad \xi\in[\![y^+,z^-]\!],$$

то полезно следующее утверждение.

Теорема 3.2. *В условиях* (3.1)–(3.2) *справедлива оценка*

$$\|U(t)-\widetilde{U}(t)\|\leqslant (z-y)^2\max_{\xi\in[\![y^+,z^-]\!]}\|D^2_{\Xi}U(\xi)\|, \quad t\in[\![y,z]\!]. \tag{3.5}$$

Рассмотрим сетку $\widehat{X}$, являющуюся подмножеством сетки Ξ:

$$\widehat{X}: \quad a=\widehat{x}_0<\widehat{x}_1<\widehat{x}_2<\ldots<\widehat{x}_{\widehat{K}}<\widehat{x}_{\widehat{K}+1}=b, \quad \widehat{X}\subset\Xi. \tag{3.6}$$

Для функции $U(t)$, заданной на $[\![a,b]\!]$, построим кусочно-линейную интерполяцию

$$\widetilde{U}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} U(\widehat{x}_j) + \frac{U(\widehat{x}_{j+1}) - U(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j}(t - \widehat{x}_j), \tag{3.7}$$

$$t \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}),\ j \in \{0, 1, \dots, \widehat{K}\}.$$

Теорема 3.3. *Для кусочно-линейной интерполяции* (3.7) *на сетке* (3.6) *при* $t \in [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]\!]$ *справедливы неравенства*

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j) \max_{\xi \in [\![\widehat{x}_j, \widehat{x}^{\,-}_{j+1}]\!]} \|D_\Xi U(\xi)\|, \tag{3.8}$$

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2 \max_{\xi \in [\![\widehat{x}^{+}_j, \widehat{x}^{\,-}_{j+1}]\!]} \|D^2_\Xi U(\xi)\|. \tag{3.9}$$

Если $U \in \mathbb{C}^1_{\mathcal{M}}[a,b]$, *то*

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant \max_{\xi \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]} \|U'(\xi)\| (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j), \tag{3.10}$$

а если $U \in \mathbb{C}^2_{\mathcal{M}}[a,b]$, *то*

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant \max_{\zeta \in [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}]} \|U''(\zeta)\| (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2, \quad t \in (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}). \tag{3.11}$$

Доказательство. Оценки (3.8)–(3.9) непосредственно вытекают из неравенств (3.3)–(3.4) и (3.5), а соотношения (3.10)–(3.11) получаются предельным переходом из (3.8)–(3.9) при

$$\max_{\xi \in [\![y, z^-]\!]} (\xi^+ - \xi) \to +0. \qquad \square$$

§4. О числе сеточных узлов

4.1. Сетка адаптивного типа.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие*

$$\|D_\Xi U(t)\| \geqslant c > 0, \quad t \in [\![y, z]\!]. \tag{4.1}$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}(\|D_\Xi U(t)\|, \eta, \Xi)$, *то*

(1) *число узлов* $K'_{U,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} K(\|D_\Xi U(t)\|, \eta, \Xi)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \|D_\Xi U(t)\|(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)/\eta \leqslant K'_{U,\Xi}(\eta) < \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \|D_\Xi U(t)\|(\widetilde{x}^+_{s+1}-\widetilde{x}_s)/\eta; \tag{4.2}$$

(2) *верно неравенство*

$$\|U(t)-\widetilde{U}(t)\| \leqslant \eta, \quad t\in[\![a,b]\!]; \tag{4.3}$$

(3) *если* $U \in \mathbb{C}^1_{\mathcal{M}}[a,b]$ *со свойством* $\|U'(t)\| \geqslant c > 0$, $t \in [a,b]$, *и рассматривается последовательность сеток вида* (2.21) *с условием* (2.22), *то*

$$\lim_{\eta'\to+0}\lim_{\lambda\to+0} K'_{U,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b \|U'(t)\|dt. \tag{4.4}$$

Доказательство. Формула (4.2) следует из формулы (2.8), в которой нужно взять $f(t) = \|D_\Xi U(t)\|$. При условии (4.1) неравенство (4.3) следует из (2.6) при $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|D_\Xi U(t)\|$, $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \eta$ и из (3.4). Наконец, формула (4.4) получается из (4.2) переходом к пределу. □

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие*

$$\|D^2_\Xi U(t)\| \geqslant c > 0, \quad t \in [\![y,z]\!]. \tag{4.5}$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}(\sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}, \eta, \Xi)$, *то*

(1) *число узлов* $K''_{U,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} K(\sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}, \eta, \Xi)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}(\widetilde{x}_{s+1}-\widetilde{x}_s)/\eta \leqslant K''_{U,\Xi}(\eta) < \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}(\widetilde{x}^+_{s+1}-\widetilde{x}_s)/\eta; \tag{4.6}$$

(2) *верно неравенство*

$$\|U(t)-\widetilde{U}(t)\| \leqslant \eta^2, \quad t\in[\![a,b]\!]; \tag{4.7}$$

(3) *если* $U \in \mathbb{C}^2_{\mathcal{M}}[a,b]$ *со свойством* $\|U''(t)\| \geqslant c > 0$, $t \in [a,b]$, *и рассматривается последовательность сеток вида* (2.21) *с условием* (2.22), *то*

$$\lim_{\eta'\to+0}\lim_{\lambda\to+0} K''_{U,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b \sqrt{\|U''(t)\|}dt. \tag{4.8}$$

Доказательство. При условии (4.5) формула (4.6) следует из формулы (2.8) при $f(t) = \sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}$. Неравенство (4.7) получается из (2.6) при упомянутой функции $f(t)$ и при $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \eta$ с учетом соотношения (3.11). Наконец, формула (4.8) выводится из (4.6) переходом к пределу. □

4.2. Псевдоравномерная сетка.

Теорема 4.3. *Если сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\overline{X}(\|D_\Xi U\|, \eta, \Xi)$, *то*

(1) *число* $N'_{U,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N(\|D_\Xi U\|, \eta, \Xi)$ *внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned}(b-a)\|D_\Xi U\|_{\mathbb{C}_\mathcal{M}[\![a,b]\!]}/\eta - 2 &< N'_{U,\Xi}(\eta)\\ &\leqslant (b-a)\|D_\Xi U\|_{\mathbb{C}_\mathcal{M}[\![a,b]\!]}/\eta;\end{aligned} \tag{4.9}$$

(2) *верно неравенство*

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant \eta, \quad t \in [\![a,b]\!]. \tag{4.10}$$

Доказательство. Полагая $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(\|D_\Xi U\|, \eta, \Xi)$, применим формулу (2.17); в результате получим соотношение (4.9). Неравенство (4.10) получается применением соотношений (3.8) и (2.18) при $f(t) = \|D_\Xi U(t)\|$ и $\varepsilon = \eta$. □

Теорема 4.4. *Если сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\overline{X}(\sqrt{\|D^2_\Xi U\|}, \eta, \Xi)$, *то*

(1) *число* $N''_{U,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N(\sqrt{\|D^2_\Xi U\|}, \eta, \Xi)$ *внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned}(b-a)\|\,\|D^2_\Xi U(t)\|^{1/2}\|_{\mathbb{C}_\mathcal{M}[\![a,b]\!]}/\eta - 2 &< N''_{U,\Xi}(\eta)\\ &\leqslant (b-a)\|\,\|D^2_\Xi U(t)\|^{1/2}\|_{\mathbb{C}_\mathcal{M}[\![a,b]\!]}/\eta;\end{aligned} \tag{4.11}$$

(2) *верно неравенство*

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\| \leqslant \eta^2, \quad t \in [\![a,b]\!]. \tag{4.12}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы применим формулу (2.17) при $\widehat{X} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{X}(\sqrt{\|D^2_\Xi U\|}, \eta, \Xi)$; в результате получим соотношение (4.11). Неравенство (4.12) получается применением соотношения (2.18) и неравенства (3.9) при $f = \sqrt{\|D^2_\Xi U\|}$ и $\varepsilon = \eta$. □

4.3. Сравнительная характеристика числа узлов при одинаковой аппроксимации.

Теорема 4.5. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{U}(t)$ абстрактной функции $U(t)$ с оценкой $\|\widetilde{U}(t) - U(t)\| \leqslant \eta$ используются два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка $\widehat{X} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{X}(\|D_\Xi U\|, \eta, \Xi)$, а во втором варианте – $\widehat{X} \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{X}(\|D_\Xi U\|, \eta, \Xi)$. Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенством*

$$\frac{(b-a)\|D_\Xi U\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,\,b]\!]} - \eta}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \|D_\Xi U(t)\|(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N'_{U,\Xi}(\eta)}{K'_{U,\Xi}(\eta)} \leqslant \frac{(b-a)\|D_\Xi U\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,\,b]\!]}}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \|D_\Xi U(t)\|(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно в неравенстве (2.19) положить $f = \|D_\Xi U\|$ и $\varepsilon = \eta/2$. В результате получим требуемую оценку. □

Теорема 4.6. *Если рассматривается семейство сеток вида* (2.21) *со свойством* (2.22) *и непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a, b]$ *функция $U(t)$ с условием*

$$\|U'\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[a,b]} \neq 0, \tag{4.14}$$

то

$$\lim_{\eta\to+0} \lim_{\lambda\to+0} \frac{N'_{U,\Xi}(\eta)}{K'_{U,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \|U'(t)\|dt}{\|U'\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[a,b]}}. \tag{4.15}$$

Доказательство. В условиях (4.14) переход к пределу в соотношении (4.13) дает формулу (4.15). □

Теорема 4.7. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{U}(t)$ дискретной функции $U(t)$ с оценкой $\|\widetilde{U}(t) - U(t)\| \leqslant \eta^2$ используются два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка вида $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(\sqrt{\|D^2_\Xi U\|}, \eta, \Xi)$, а во втором варианте – $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}(\sqrt{\|D^2_\Xi U\|}, \eta, \Xi)$. Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенством*

$$\frac{(b-a)\| \, \|D^2_\Xi U(t)\|^{1/2}\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,b]\!]} - \eta}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N''_{U,\Xi}(\eta)}{K''_{U,\Xi}(\eta)} \leqslant \frac{(b-a)\| \, \|D^2_\Xi U\|^{1/2}\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,b]\!]}}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{\|D^2_\Xi U(t)\|}(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Требуемая оценка получается, если в неравенстве (2.19) положить $f = \sqrt{\|D^2_\Xi U\|}$ и $\varepsilon = \eta/2$. □

Теорема 4.8. *Если рассматривается семейство сеток вида* (2.21) *со свойством* (2.22) *и дважды непрерывно дифференциуемая на отрезке* $[a,b]$ *абстрактная функция* $U(t)$ *со свойством*

$$\|U''\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[a,b]} \neq 0, \tag{4.17}$$

то

$$\lim_{\eta\to+0} \lim_{\lambda\to+0} \frac{N''_{U,\Xi}(\eta)}{K''_{U,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \sqrt{\|U''(t)\|}dt}{\|\sqrt{\|U''(t)\|}\|_{\mathbb{C}_{\mathcal{M}}[a,b]}}. \tag{4.18}$$

Доказательство. При условии (4.17) соотношение (4.18) получается предельным переходом из (4.16). □

§5. Калибровочные соотношения и их представления

Построение вложенных сеток и оценки аппроксимации рассмотрены в предыдущих параграфах. Здесь считаем, что вложенная сетка построена и требуется найти явное представление калибровочных соотношений.

5.1. Вложенная сетка. Пусть m — натуральное число; введем обозначения:

$$J_m \stackrel{\rm def}{=} \{0,1,\ldots,m\}, \quad J'_m \stackrel{\rm def}{=} \{-1,0,1,\ldots,m\}.$$

На сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$ рассмотрим функции $\{\omega_j(t)\}_{j\in J'_{M-1}}$ из пространства $C[\![a,b]\!]$:

$$\omega_j(\xi_s)=\delta_{s,j+1}, \qquad s\in J_M,$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i\in J'_{M-1}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)},u\rangle \stackrel{\rm def}{=} u(\xi_{i+1}), \quad u\in C[\![a,b]\!]. \tag{5.1}$$

Система $\{\omega_j\}_{j\in J'_{M-1}}$ является базисом в пространстве $C\ [\![a,b]\!]$; при этом

$$\langle g^{(i)},\omega_j\rangle=\delta_{i,j}, \quad i,j\in J'_{M-1}.$$

В дальнейшем условимся считать, что при $c>d$ множество $[\![c,d]\!]$ пусто.

Пусть $5\leqslant K<M$. Рассмотрим инъективное отображение $\varkappa$ множества J_K в множество J_M, при котором

$$\varkappa(0)=0, \quad \varkappa(i)<\varkappa(i+1), \quad \varkappa(K)=M. \tag{5.2}$$

Введем множество $J^*\subset J_M$, задавая его формулой

$$J^* \stackrel{\rm def}{=} \varkappa J_K. \tag{5.3}$$

На множестве J^* определено однозначное отображение $\varkappa^{-1}$, так что $\forall r\in J^*\ \varkappa^{-1}:\ r\longrightarrow s$, $s\in J_K$, $J_K=\varkappa^{-1}J^*$. Рассмотрим новую сетку

$$\widehat{X}\colon a=\widehat{x}_0<\widehat{x}_1<\ldots<\widehat{x}_K=b, \tag{5.4}$$

где $\widehat{x}_i \stackrel{\rm def}{=} \xi_{\varkappa(i)}$, $i\in J_K$.

В дальнейшем иногда рассматриваются дополнительные узлы ξ_{-1} и $\widehat{x}_{-1}$ со свойством $\xi_{-1}=\widehat{x}_{-1}<a$.

5.2. Калибровочные соотношения. Введем функции

$$\widehat{\omega}_j(t), \quad j\in J'_{K-1},$$

согласно следующим формулам:

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \xi_{\varkappa(i)})(\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi_{\varkappa(i+1)}]\!], \quad i \in J_{K-1}; \tag{5.5}$$
$$\widehat{\omega}_i(t) = (\xi_{\varkappa(i+2)} - t)(\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1}$$
$$\text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(i+1)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J'_{K-2}; \tag{5.6}$$
$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a, b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!]. \tag{5.7}$$

Ясно, что

$$\widehat{\omega}_i(\xi_{\varkappa(i+1)}) = 1, \quad i \in J'_{K-1}. \tag{5.8}$$

В дальнейшем используется обозначение

$$\operatorname{supp} \widehat{\omega}_i = [\![\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+2}]\!].$$

Сплайны $\widehat{\omega}_i$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций сплайнов ω_j

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \omega_j(t), \quad t \in [\![a, b]\!], \quad i \in J'_{K-1}, \tag{5.9}$$

называемых *калибровочными соотношениями*.

Применяя функционалы $g^{(j)}$ в (5.9) и учитывая соотношения (5.1), имеем:

$$\mathfrak{p}_{-1,j} = \widehat{\omega}_{-1}(\xi_{j+1}), \quad j \in \{\varkappa(0) - 1, \varkappa(0), \dots, \varkappa(1) - 2\}; \tag{5.10}$$
$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widehat{\omega}_i(\xi_{j+1}),$$
$$j \in \{\varkappa(i), \varkappa(i) + 1, \dots, \varkappa(i + 2) - 2\}, \quad i \in J_{K-2}; \tag{5.11}$$
$$\mathfrak{p}_{K-1,j} = \widehat{\omega}_{K-1}(\xi_{j+1}),$$
$$j \in \{\varkappa(K - 1), \varkappa(K - 1) + 1, \dots, \varkappa(K) - 1\}; \tag{5.12}$$

числа $\mathfrak{p}_{r,s}$, $r \in J'_{K-1}$, $s \in J'_{M-1}$, не упомянутые в этих формулах, равны нулю.

Рассмотрим функционалы

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\widehat{x}_{i+1}), \quad u \in C[\![a, b]\!], \quad i \in J'_{K-1}. \tag{5.13}$$

Из (5.5)–(5.8) и (5.13) получаем

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j \in J'_{K-1}. \tag{5.14}$$

Используя соотношения (5.1)–(5.4) и (5.13), для $u \in C[\![a,b]\!]$ и $i \in J'_{K-1}$ имеем

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle = u(\widehat{x}_{i+1}) = u(\xi_{\varkappa(i+1)}) = \langle g^{\varkappa(i+1)-1}, u\rangle;$$

отсюда получаем равенства

$$\widehat{g}^{(i)} = g^{(\varkappa(i+1)-1)} \text{ при } i \in J'_{K-1}. \tag{5.15}$$

Из (5.15) выводим

$$\widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)} = g^{(j)}, \qquad j+1 \in J^*. \tag{5.16}$$

5.3. Матрица сужения. Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j}), \quad i \in J'_{K-1}, \quad j \in J'_{M-1},$$

называемую матрицей сужения; здесь $\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_i\rangle$. Введем упорядоченные (по возрастанию) подмножества множества целых чисел, обозначая

$$J^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, \ldots, \varkappa(1)-2\},$$

$$J^1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r), \ldots, \varkappa(r+1)-1\}, \quad r \in J_{K-1},$$

$$J^2(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r+1), \ldots, \varkappa(r+2)-2\}, \quad r \in J_{K-2},$$

$$J(r) \stackrel{\text{def}}{=} J^1(r) \bigcup J^2(r), \quad r \in J_{K-2},$$

$$J(K-1) \stackrel{\text{def}}{=} J^1(K-1).$$

Множество, упорядоченное по возрастанию, будем считать пустым, если первый его элемент больше последнего.

Теорема 5.1. *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\widehat{\omega}_r(t) = \sum_{q \in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{r,q}\omega_q(t), \quad t \in [\![a,b]\!], \qquad r \in J'_{K-1}, \tag{5.17}$$

где

$$\mathfrak{p}_{-1,q} = \frac{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)}}, \quad q \in J^0, \tag{5.18}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{q+1} - \xi_{\varkappa(r)}}{\xi_{\varkappa(r+1)} - \xi_{\varkappa(r)}}, \quad q \in J^1(r), \quad r \in J_{K-1}, \tag{5.19}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{\varkappa(r+1)}}, \quad q \in J^2(r), \quad r \in J_{K-2}, \tag{5.20}$$

а неупомянутые в формулах (5.18)–(5.20) *элементы* $\mathfrak{p}_{r,q}$ *матрицы* $\mathfrak{P}$ *равны нулю.*

Доказательство. Заметим, что соотношения (5.19) и (5.20) непротиворечивы, ибо при заданном r множества $J^1(r)$ и $J^2(r)$ не пересекаются. Нетрудно видеть, что формулы (5.17)–(5.20) получаются из формул (5.10)–(5.12) в силу соотношений (5.5)–(5.8). □

Следствие 5.1. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,\varkappa(i+1)-1} = 1, \quad i \in J'_{K-1}. \tag{5.21}$$

Если при фиксированном $i \in J_{K-2}$

$$\varkappa(i+1) = \varkappa(i) + 1, \quad \varkappa(i+2) = \varkappa(i+1) + 1, \tag{5.22}$$

то (*кроме единичного элемента, указанного формулой* (5.21)) *все остальные элементы i-й строки равны нулю, так что*

$$\mathfrak{p}_{i,s} = \delta_{\varkappa(i+1)-1,\, s}, \quad s \in J'_{M-1}. \tag{5.23}$$

Если выполнено условие $\varkappa(1) = 1$, *то формула* (5.23) *верна для* $i = -1$, *а если* $\varkappa(K-1) = M-1$, *то упомянутая формула верна при* $i = K-1$.

Доказательство. При $i = -1$ формулу (5.21) получаем из (5.18), полагая там $q = -1$. Если $i \in J_{K-1}$, то (5.21) вытекает из (5.19) при $q = \varkappa(i+1) - 1$. Если $i \in J_{K-2}$, то при условии (5.22) множество индексов $J^1(i)$ состоит из одного элемента, $J^1(i) = \{\varkappa(i)\}$, а множество индексов $J^2(i)$ пусто. Это означает, что для $q \neq \varkappa(i+1) - 1$ элементы $\mathfrak{p}_{i,q}$ матрицы $\mathfrak{P}$ равны нулю и, следовательно, верно соотношение (5.23). Если $\varkappa(1) = 1$, то $J^0 = \{-1\}$, и поэтому верна формула (5.23) при $i = -1$, а если $\varkappa(K-1) = M-1$, то $J^1(K-1) = \{M-1\}$, откуда выводим формулу (5.23) при $i = K-1$. □

Следствие 5.2. *Если* $j+1 \in J^*$, *то в j-м столбце матрицы* $\mathfrak{P}$ *на i-м месте,* $i = \varkappa^{-1}(j+1) - 1$, *находится единица; остальные элементы этого стобца — нули, так что*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,\varkappa^{-1}(j+1)-1}, \quad i \in J'_{K-1}, \quad j+1 \in J^*. \tag{5.24}$$

Доказательство. Для доказательства используем соотношения $\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_i \rangle$, формулу (5.16) и свойство (5.14). При любом $i \in J'_{K-1}$ имеем

$$p_{i,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_i \rangle = \langle \widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)}, \widehat{\omega}_i \rangle,$$

откуда вытекает соотношение (5.24). □

5.4. Матрица продолжения. Рассмотрим *матрицу продолжения* $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathfrak{q}_{s,j})_{s\in J'_{K-1},\, j\in J'_{M-1}}$ с элементами

$$\mathfrak{q}_{s,j} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j\rangle. \tag{5.25}$$

Использование формул (5.15)–(5.16) приводит к следующим утверждениям (см. также [7]).

Теорема 5.2. *В матрице* $\mathfrak{Q}$

(1) *нулевыми являются те столбцы* $\mathfrak{q}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathfrak{q}_{sj})_{s\in J'_{K-1}}$ *матрицы* $\mathfrak{Q}$, *номер* j *которых удовлетворяет условию* $j+1\notin J^*$;

(2) *остальные столбцы, т.е. столбцы, номер* j *которых удовлетворяет условию* $j+1\in J^*$, *содержат единицу на месте* s_0, *где* $\varkappa(s_0+1) = j+1$; *остальные элементы* j*-го столбца равны нулю.*

Теорема 5.3. *Матрица* $\mathfrak{Q}$ *является левой обратной к матрице* $\mathfrak{P}^T$, *т.е.*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I,$$

где I *– единичная матрица размеров* $(K+1)\times(K+1)$.

Теорема 5.4. *Элементы* $[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j}$, $i,j\in J'_{M-1}$, *матричного произведения* $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ *определяются форулами*:

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = 0 \quad \text{при } i\in J'_{M-1},\ j+1\in J_M\backslash J^*,$$
$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} \quad \text{при } i\in J'_{M-1},\ j+1\in J^*.$$

Следствие 5.3. *Если* $i+1,\ j+1\in J^*$, *то*

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

§6. Потоки матриц. Формулы реконструкции

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(X,\varphi,\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Big\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}(t) = \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_j\omega_j(t), \quad \mathbf{C}_s\in\mathcal{M}, \quad s\in J'_{M-1},\ t\in [\![a,b]\!]\Big\},$$

$$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\widehat{X},\varphi,\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Big\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}(t) = \sum_{i\in J'_{K-1}} \mathbf{A}_i\widehat{\omega}_i(t), \quad \mathbf{A}_s\in\mathcal{M}, \quad s\in J'_{K-1},\ t\in [\![a,b]\!]\Big\}.$$

Принимая во внимание калибровочные соотношения (5.17), имеем $\widehat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S} \subset \mathbb{C}_{\mathcal{M}}[\![a,b]\!]$.

Рассмотрим операцию $\mathcal{P}$ проектирования пространства $\mathcal{S}$ на подпространство $\widehat{\mathcal{S}}$, определяемую формулой

$$\mathcal{P}\mathbf{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{s\in J'_{K-1}} \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_j \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j\rangle \widehat{\omega}_s, \quad \mathbf{u} = \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_j\omega_j \in \mathcal{S}. \tag{6.1}$$

Полагая $\langle \widehat{g}^{(s)}, \mathbf{u}\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_j \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j\rangle$, из (6.1) получим

$$\mathcal{P}\mathbf{u}(t) = \langle \widehat{g}^{(k-1)}, \mathbf{u}\rangle \widehat{\omega}_{k-1}(t) + \langle \widehat{g}^{(k)}, \mathbf{u}\rangle \widehat{\omega}_k(t),$$

$$t \in t \in [\![\widehat{x}_k, \widehat{x}_{k+1}]\!], \quad k \in J_{K-1}.$$

Проектирующая операция $\mathcal{P}$ определяет всплесковое разложение

$$\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}} \dotplus \mathcal{W} \tag{6.2}$$

пространства $\mathcal{S}$, называемого исходным, на так называемое *основное* пространство $\widehat{\mathcal{S}}$ и *всплесковое* пространство $\mathcal{W}$.

Пусть $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{-1}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{M-1})^T$ – исходный поток матриц из пространства $\mathcal{M}$. Положим

$$\mathbf{u} = \sum_{s\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_s\omega_s. \tag{6.3}$$

Используя соотношение (6.2), получаем второе представлени элемента $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}, \tag{6.4}$$

где

$$\widehat{\mathbf{u}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i\in J'_{K-1}} \mathbf{A}_i\widehat{\omega}_i, \quad \mathbf{w} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{B}_j\omega_j,$$

$$\mathbf{B}_j,\ \mathbf{C}_s\ \in \mathcal{M}, \quad j, s \in J'_{M-1},$$

$$\mathbf{A}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(i)}, \mathbf{u}\rangle, \quad i \in J'_{K-1}. \tag{6.5}$$

Из (6.3)–(6.4) имеем

$$\sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_j\omega_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \mathbf{A}_i \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j + \sum_{j\in J'_{M-1}} \mathbf{B}_j\omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j\in J'_{M-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$\mathbf{C}_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_j, \quad j \in J'_{M-1}. \tag{6.6}$$

§7. Формулы декомпозиции

Используя представление (6.5), перепишем формулы (6.6) в виде

$$\mathbf{C}_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \langle \widehat{g}^{(i)}, \mathbf{u}\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + \mathbf{B}_j, \quad j \in J'_{M-1},$$

и подставим сюда $\mathbf{u}$ из соотношения (6.3):

$$\mathbf{C}_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \sum_{s\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + \mathbf{B}_j, \quad j \in J'_{M-1};$$

отсюда находим

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{C}_j - \sum_{s\in J'_{M-1}} \Big(\sum_{i\in J'_{K-1}} \mathfrak{q}_{i,s}\mathfrak{p}_{i,j} \Big) \mathbf{C}_s, \quad j \in J'_{M-1}. \tag{7.1}$$

Подставляя (6.3) в (6.5), имеем

$$\mathbf{A}_i = \langle \widehat{g}^{(i)}, \sum_{s\in J'_{M-1}} \mathbf{C}_s \omega_s \rangle, \quad i \in J'_{K-1},$$

так что

$$\mathbf{A}_i = \sum_{s\in J'_{M-1}} \mathfrak{q}_{i,s}\mathbf{C}_s, \quad i \in J'_{K-1}. \tag{7.2}$$

Формулы (7.1)–(7.2) являются *формулами декомпозиции.*

Вводя векторы

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{-1}, \mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_{K-1})^T, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_{-1}, \mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{M-1})^T,$$

перепишем формулы (6.6) и (7.1)–(7.2) в матричном виде. Формулы декомпозиции (7.1)–(7.2) принимают вид

$$\mathbf{A} = \mathfrak{Q}\mathbf{C}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{C},$$

а формулы реконструкции (6.6) могут быть представлены в форме

$$\mathbf{C} = \mathfrak{P}^T\mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Используя полученные выше формулы (см. теоремы 5.1, 5.2 и 5.4) для элементов матриц $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, приходим к следующим утверждениям.

Теорема 7.1. *Для формул декомпозиции справедливы соотношения:*

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{C}_{\varkappa(i+1)-1}, \quad i \in {J'}_{K-1}, \tag{7.3}$$

$$\mathbf{B}_q = 0, \quad q+1 \in J^*, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{B}_q = \mathbf{C}_q - \sum_{j \in {J'}_{K-1}} \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_j \rangle \mathbf{C}_{\varkappa(j+1)-1}, \quad q+1 \in J_M \backslash J^*. \tag{7.5}$$

Теорема 7.2. *Для всплескового потока при* $q+1 \in J_M \backslash J^*$ *верны равенства*

$$\mathbf{B}_q = \mathbf{C}_q - (\widehat{x}_{i+1} - \widehat{x}_i)^{-1} \Big[(\widehat{x}_{i+1} - \xi_{q+1}) \mathbf{C}_{\varkappa(i)-1} + (\xi_{q+1} - \widehat{x}_i) \mathbf{C}_{\varkappa(i+1)-1} \Big],$$

где

$$\widehat{x}_i < \xi_{q+1} < \widehat{x}_{i+1}. \tag{7.6}$$

Следствие 7.1. *Формуле* (7.5) *можно придать вид*

$$\mathbf{B}_q = \mathbf{C}_q - \mathfrak{p}_{i-1,q} \mathbf{C}_{\varkappa(i)-1} - \mathfrak{p}_{i,q} \mathbf{C}_{\varkappa(i+1)-1},$$

где i *удовлетворяет соотношению* (7.6).

Следствие 7.2. *Из формул* (7.4)–(7.5) *видно, что пространство всплесковых потоков* $\mathcal{B}$ *имеет вид*

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{B} \mid \mathbf{B} = (\mathbf{B}_{-1}, \mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_{M-1}) \ \forall \mathbf{B}_{j-1} \in \mathcal{M},$$
$$j \in J_M \backslash J^*; \mathbf{B}_{i-1} = 0, \quad i \in J^*\}.$$

Соотношение (7.3) показывает, что для построения основного потока нужно лишь найти значения исходного потока на вложенной сетке. Если вложенная сетка адаптивная, то уклонение основного потока от исходного определяется теоремами 4.1–4.2, а если построеннная сетка псевдоравномерная, то упомянутое уклонение определяется теоремами 4.3–4.4.

Литература

1. Р. Блейхут, *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*, Мир, М., 1989.
2. S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999.
3. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
4. Ю. К. Демьянович, *Теория сплайн-всплесков*, Изд-во СПбГУ, СПб, 2013.
5. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-adic multiresolution analysis and wavelet frames*. — J. Fourier Anal. Appl. **16**, No. 5 (2010), 693–714.

6. Ю. К. Демьянович, А. Ю. Пономарева, *Адаптивная сплайн-всплесковая обработка дискретного потока.* — Ж. пробл. мат. анализа **81** (2015), 29–46.
7. Ю. К. Демьянович, А. С. Пономарев, *О реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 33–73.
8. Yu. K. Dem'yanovich, *On embedding and extended smoothness of spline spaces.* — Far East J. Math. Sci. (FJMS) **102**, No. 9 (2017), 2025–2052.

Dem'yanovich Yu. K., Degtyarev V. G., Lebedinskaya N. A. Adaptive wavelet decomposition of matrix flows.

Adaptive algorithms for constructing spline-wavelet decompositions of matrix flows from a linear space of matrices over a normed field are presented. The algorithms suggested provides for an a priori prescribed estimate of the deviation of the basic flow from the original one. Comparative bounds of the volumes of data in the basic flow for various irregularity characteristics of the original flow are obtained in the cases of pseudouniform and adaptive meshes. Limit characteristics of the above-mentioned volumes are given in the cases where the original flow is generated by differentiable functions.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: y.demjanovich@spbu.ru

Поступило 9 ноября 2017 г.

Петербургский государственный
университет путей сообщения
императора Александра I
E-mail: vdegt@list.ru

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: n.lebedinskaya@spbu.ru