Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

А. Гутерман, Г. Соареш

ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ОБРАЗ ПРОИЗВЕДЕНИЙ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть M_n обозначает алгебру $n \times n$ комплексных матриц и U_n обозначает группу унитарных матриц размера $n \times n$. Рассмотрим матрицы $A, C \in M_n$ и обозначим их собственные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответственно.

Определение 1.1. *Пусть S_n обозначает симметрическую группу порядка n. Определим σ-точки следующим образом:*

$$z_\sigma = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_{\sigma(i)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Маркус [20] и, независимо, де Оливейра [23] предположили, что если $A, C \in M_n$ являются нормальными матрицами с собственными числами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответственно, то $\det(A - C)$ всегда содержится в выпуклой оболочке множества σ-точек, т.е.

$$\det(A - C) \in \mathrm{Co}\, \{z_\sigma : \sigma \in S_n\}. \tag{1}$$

Эта гипотеза, известная как гипотеза Маркуса–Оливейры, была проверена только для ряда специальных случаев, см. работы [4, 8, 16, 19, 22] и их библиографию. Отдельно отметим, что вопрос справедливости этой гипотезы остается открытым даже в случае $n = 4$. В связи с данной гипотезой рассматривается также и более общий вопрос описания C-детерминантного образа матрицы. Более конкретно, исследуется следующее множество.

Ключевые слова: C-детерминантный образ, числовой образ, матричные произведения.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ номер 17-11-01124. Работа второго автора выполнена при поддержке португальского научного фонда развития науки и технологии в рамках проекта UID/MAT/00013/2013.

Определение 1.2. *Для матриц $A, C \in M_n$, C-детерминантный образ матрицы A определяется как подмножество комплексной плоскости, заданное следующим образом:*

$$D_C(A) = \{\det(A - UCU^*) : U \in U_n\}. \tag{2}$$

Непосредственная проверка показывает, что все σ-точки z_σ принадлежат C-детерминантному образу матрицы A. Значит гипотеза Маркуса–Оливейры может рассматриваться как частный случай более общей проблемы: пусть $A, C \in M_n$ – нормальные матрицы с собственными числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ соответственно; верно ли, что

$$D_C(A) \subseteq \mathrm{Co}\ \{z_\sigma : \sigma \in S_n\}? \tag{3}$$

Характеризация C-детерминантного образа для $n \times n$ эрмитовых матриц A и C была получена Фидлером [9], который доказал, что в этом случае $D_C(A)$ является вещественным отрезком, конечные точки которого – минимальные и максимальные σ-точки $D_C(A)$, и в (3) справедливо равенство.

Вариация понятия C-детерминантного образа получается, если заменить $\det(\cdot)$ на $\mathrm{Tr}\,(\cdot)$ и разность $A - UCU^*$ – на произведение $AUCU^*$. Таким образом получается понятие C-числового образа, который был введен Гольдбергом и Штраусом в [11] и является очень важным инвариантом при изучении матриц и операторов (см. работу [18] и ее библиографию).

Определение 1.3. *Пусть $C \in M_n$ – заданная ненулевая матрица, тогда C-числовой образ матрицы $A \in M_n$ определяется следующим образом:*

$$W_C(A) = \{\mathrm{Tr}\,(AUCU^*) : U \in U_n\}\,. \tag{4}$$

Множество $W_C(A)$ является компактным и связным подмножеством $\mathbb{C}$. Очевидно, что $W_A(C) = W_C(A)$ и числовой образ инвариантен при применении преобразования унитарного подобия к матрицам A и C, т.е. $W_C(A) = W_{VCV^*}(UAU^*)$ для всех $U, V \in U_n$.

Для произвольных матриц $A, C \in M_n$, спектры которых – $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ соответственно, большую роль играет следующее понятие.

Определение 1.4. *Пусть S_n обозначает симметрическую группу на n элементах. Точки*

$$z_\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{\eta(i)}, \quad \eta \in S_n,$$

называются η-точками множества $W_C(A)$.

Несмотря на сложность гипотезы Маркуса–Оливейры, аналогичный вопрос для $W_C(A)$ является полностью решенным. Для нормальных матриц A и $C \in M_n$ включение $W_C(A)$ в выпуклую оболочку своих η-точек z_η, $\eta \in S_n$ установлено в [23]. Однако как исходная гипотеза Маркуса–Оливейры, так и вопрос о справедливости включения (3) являются открытыми.

Если матрица C эрмитова и является одновременно ортогональным проектором ранга 1, то множество $W_C(A)$ вырождается в классический числовой образ матрицы, определяемый следующим образом.

Определение 1.5. *Пусть $A \in M_n$. Числовой образ матрицы A – это следующее подмножество комплексной плоскости:*

$$W(A) = \{x^* A x : \ x \in \mathbb{C}^n, \ x^* x = 1\}.$$

Это множество иногда еще называют *областью значений* матрицы A, см. [15, Глава 1], где можно найти базовые свойства $W(A)$. Множество $W(A)$ компактно, и по теореме Теплица-Хаусдорфа [13, 24] оно выпуклое. Данное множество обладает свойством унитарной инвариантности, т.е. $W(U^*AU) = W(A)$ для каждой матрицы $U \in U_n$. Непосредственная проверка показывает, что $W(A)$ содержит спектр матрицы A, а если матрица является нормальной, то $W(A)$ совпадает с выпуклой оболочкой собственных значений этой матрицы. Множество $W(A)$ целиком содержится во множестве вещественных чисел тогда и только тогда, когда матрица A является эрмитовой.

Мурнаган [21] охарактеризовал это множество для произвольных комплексных 2×2-матриц.

Теорема 1.6 (Теорема об эллиптическом образе для $W(A)$)**.** *Пусть $A \in M_2$. Тогда множество $W(A)$ является эллиптическим диском, возможно вырожденным, с фокусами α_1 и α_2 и наименьшей осью длины $\sqrt{\|A\|_2^2 - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}$, где $\|A\|_2$ обозначает норму Фробениуса матрицы $A \in M_n$, определяемую как $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A)}$.*

Числовой образ матрицы и различные его обобщения имеют приложения в целом ряде направлений, важных для абстрактных и прикладных наук, например, в различных вопросах квантовой теории, см. [10].

Пусть $A, B \in M_n$. Известен результат о коммутативности спектра, а именно, $\mathrm{spec}\,(AB) = \mathrm{spec}\,(BA)$ [14, теорема 1.3.20]; здесь $\mathrm{spec}\,(A)$

обозначает спектр, иными словами, множество собственных чисел матрицы $A \in M_n$. Шень, Ко и Наказато [7] исследовали ситуацию, когда коммутативность спектра заменяется на коммутативность C-числового образа, т.е. изучали классы матриц, для которых $W_C(AB) = W_C(BA)$. В настоящей работе мы изучаем этот вопрос для C-детерминантного образа матриц.

Данная статья организована следующим образом. В §2 собраны некоторые известные результаты об обобщениях числового образа. §3 посвящен исследованию условий, при которых $D_C(RS) = D_C(SR)$, где R и S – некоторые обратимые матрицы. В §4 мы отдельно исследуем 2×2 случай. В §5 исследуются теплицевы или континуантные матрицы R и S, удовлетворяющие условию $D_C(RS) = D_C(SR)$ для любой нормальной матрицы $C \in M_n$.

§2. Некоторые известные результаты об обобщениях числового образа

В дальнейшем $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ обозначает диагональную матрицу размера $n \times n$ с элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ на главной диагонали. Имеет место определенный параллелизм между свойствами множеств $D_C(A)$ и $W_C(A)$, тем не менее, C-детерминантный образ устроен существенно сложнее. В следующей теореме мы приводим некоторые основные свойства C-детерминантного образа.

Теорема 2.1 ([4]). *Пусть матрицы A и $C \in M_n$ имеют собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ соответственнно. Тогда*

(i) *$D_C(A)$ является компактным и связным множеством;*
(ii) *$D_C(A) = (-1)^n D_A(C)$;*
(iii) *$D_{V^* C V}(U^* A U) = D_C(A)$ для произвольных матриц $U, V \in U_n$;*
(iv) *если матрицы A и C являются нормальными, то $D_C(A) = D_{\operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}(\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$;*
(v) *$z_\sigma \in D_C(A)$.*

Доказательство. (i) Так как унитарная группа U_n является связной и компактной и функция из U_n в $\mathbb{C}$, определенная по правилу $U \mapsto \det(A - UCU^*)$, непрерывна, то (i) справедливо.

(ii) и (iii) легко следуют из определения, см. формулу (2).

(iv) Нормальные матрицы A и C, в силу спектральной теоремы [14, теорема 2.5.4], являются унитарно-диагонализуемыми матрицами, а значит, $A = U^*\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)U$ и $C = V^*\mathrm{diag}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)V$ для некоторых матриц $U, V \in U_n$. Тогда, в силу (iii),

$$D_C(A) = D_{V\,\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\,V^*}(U\,\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,U^*) \\ = D_{\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}(\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

(v) В силу теоремы Шура о триангулизуемости [14, теорема 2.3.1], матрицы A и C унитарно подобны верхне-треугольным матрицам T_A и T_C соответственно, чьи диагональные элементы являются собственными числами матриц A и C, значит, $A = U^*\,T_A\,U$ и $C = V^*\,T_C\,V$ для некоторых матриц $U, V \in U_n$. Тогда, в силу (iv), без потери общности можно считать, что $A = T_A$ и $C = T_C$. Пусть $\sigma \in S_n$. Обозначим через P_σ матрицу перестановки, ассоциированную с σ. Тогда легко видеть, что $P_\sigma^T P_\sigma = I_n$ и

$$z_\sigma = \det(A - P_\sigma\,C\,P_\sigma^T),$$

то есть (v) доказано. □

Следующий результат, называемый обычно теоремой об эллиптическом образе для C-числового образа, дает полное геометрическое описание этого множества для произвольной комплексной 2×2 матрицы A в том случае, когда $C \in M_2$ является нормальной матрицей. Этот результат доказан Гольдбергом и Штраусом в [11], и он формулируется следующим образом.

Теорема 2.2 (Теорема об эллиптическом образе для $W_C(A)$ ([11, лемма 2])). *Для $A \in M_2$ и нормальной матрицы $C \in M_2$ множество $W_C(A)$ является эллиптическим диском, возможно вырожденным, с фокусами $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$ и $\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1$ и малой осью длины*

$$|\gamma_1 - \gamma_2|\sqrt{\|A\|_2^2 - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}.$$

Несмотря на то, что геометрия множества $D_C(A)$ очень нетривиальна, в 2×2 случае справедлив следующий результат.

Теорема 2.3 (Теорема об эллиптическом образе для $D_C(A)$, случай нормальной матрицы ([1, следствие 1])). *Пусть $A \in M_2$ имеет собственные значения α_1, α_2 и нормальная матрица $C \in M_2$ имеет собственные значения γ_1, γ_2. Тогда множество $D_C(A)$ является эллиптическим диском, возможно вырожденным, с фокусами $(\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \gamma_2)$ и $(\alpha_1 - \gamma_2)(\alpha_2 - \gamma_1)$ и малой осью длины*

$$|\gamma_1 - \gamma_2|\sqrt{\|A\|_2^2 - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}.$$

Следующие два следствия последней теоремы очень важны для наших дальнейших рассуждений.

Следствие 2.4 ([1, следствие 1]). *Пусть $A, C \in M_2$ и C является нормальной матрицей. Тогда множество $D_C(A)$ является одноточечным в том и только том случае, когда хотя бы одна из матриц A или C является скалярной.*

Следствие 2.5 ([1, следствие 1]). *Пусть $A, C \in M_2$ и C является нормальной матрицей. Тогда множество $D_C(A)$ является невырожденным отрезком в том и только том случае, когда A и C являются нескалярными нормальными матрицами.*

Заметим, что теорема 2.3 была обобщена Бебиано и Соареш [5] на произвольные матрицы $A, C \in M_2$.

Теорема 2.6 (Теорема об эллиптическом образе для $D_C(A)$, случай произвольной матрицы [5, теорема 2.1], [19, теорема 3.1]). *Пусть матрицы $A, C \in M_2$ имеют собственные числа α_1, α_2 и γ_1, γ_2 соответственно. Тогда множество $D_C(A)$ является эллиптическим диском с фокусами $(\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \gamma_2)$ и $(\alpha_1 - \gamma_2)(\alpha_2 - \gamma_1)$ и малой осью длины $ac - bd$, где $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$ являются собственными числами матриц $A - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A)\, I_2$ и $C - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(C)\, I_2$ соответственно. В частности,*

- **(a)** *$D_C(A)$ является одноточечным множеством тогда и только тогда, когда матрицы A или C являются скалярными;*
- **(b)** *$D_C(A)$ является невырожденным отрезком тогда и только тогда, когда матрицы A и C являются нескалярными и нормальными.*

Для произвольных матриц A и C размера $n \times n$ известны критерии того, что множества $W_C(A)$ и $D_C(A)$ являются одноточечными.

Теорема 2.7 ([17, теорема 2.5]). *Пусть $A, C \in M_n$. Тогда множество $W_C(A)$ является одноточечным в том и только том случае, когда хотя бы одна из матриц A или C является скалярной. При этом*

$$W_C(A) = \left\{ \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(C) \right\}.$$

Теорема 2.8 ([19, теорема 3.2]). *Пусть $n \geqslant 3$ и $A, C \in M_n$. Тогда C-детерминантный образ матрицы A является одноточечным в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

(a) $\operatorname{rank}(A-\mu I_n)+\operatorname{rank}(C-\mu I_n)<n$ *для некоторого* $\mu\in\mathbb{C}$; *в этом случае,* $\triangle_C(A)=\{0\}$;

(b) *матрица* A *или матрица* C *является скалярной, при этом* $\triangle_C(A)=\{\det(A-C)\}$.

Что касается выпуклости множеств $W_C(A)$ и $D_C(A)$, то, в силу теоремы об эллиптическом образе для $W_C(A)$ и $D_C(A)$, эти множества являются выпуклыми при $n=2$. Для $n\geqslant 3$ Вествик [25] установил, что для произвольной матрицы $A\in M_n$ множество $W_C(A)$ является выпуклым, если $C\in M_n$ – вещественная диагональная матрица. В то же время, $D_C(A)$ не всегда является выпуклым множеством при $n\geqslant 3$ [3]. Важно отметить, что $D_C(A)$ может не быть сильно связным (см. [1]).

Определение 2.9. *Непустое подмножество* X *векторного пространства называется звездным относительно звездного центра* s *(или относительно множества* S *звездных центров), если* $\alpha x+(1-\alpha)s\in X$, *где* $x\in X$ *и* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ *(или, соответственно,* $\alpha x+(1-\alpha)s\in X$ *для* $x\in X$, $s\in S$ *и* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$*).*

Пусть $A,C\in M_n$ – произвольные матрицы. Ченг и Тзинг [6] доказали, что C-числовой образ матрицы A всегда имеет звездный вид относительно звездного центра $(\mathrm{Tr}\,A)(\mathrm{Tr}\,C)/n$. Относительно C-детерминантного образа матрицы A известно только, что в том случае, когда $n=3$ и, дополнительно, обе матрицы A и C являются нормальными, множество $D_C(A)$ является звездным относительно некоторой специальной точки.

Несмотря на все попытки изучать множество $D_C(A)$, соответствующее направление исследований является по-прежнему открытым при $n\geqslant 3$. Более того, для некоторых семейств 3×3 матриц полная характеризация множества $D_C(A)$ – также открытый вопрос. Дальнейшее исследование геометрии множества $D_C(A)$ и его границы может дать новые подходы для доказательства гипотезы Маркуса–Оливейры.

§3. Коммутативность C-детерминантного образа

Будем обозначать границу $D_C(A)$ через $\partial D_C(A)$. Нам потребуется следующее определение *угловой точки*, а именно: если пересечение некоторой окрестности точки z с $D_C(A)$ содержится внутри угла с вершиной в z и величины меньшей π, то z называется *угловой точкой*. Ниже мы приводим также и формальное определение, взятое из [2].

Определение 3.1. *Будем называть точку $z \in \partial D_C(A)$ угловой, если существует шар $B(z, \epsilon)$ с центром в точке z и радиуса ϵ такой, что для достаточно малого $\epsilon > 0$ $B(z, \epsilon) \cap D_C(A)$ содержит в секторе, ограниченном двумя прямыми, пересекающимися в точке z и образующими угол строго меньший π.*

Следующий важный факт об угловых точках понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 3.2 ([19, теорема 3.10])**.** *Пусть $A, C \in M_n$, тогда каждая угловая точка множества $D_C(A)$ является σ-точкой.*

Пусть собственные числа матриц $A, C \in M_2$ – это α_1, α_2 и γ_1, γ_2 соответственно. Рассмотрим $z_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \gamma_2)$ и $z_2 = (\alpha_1 - \gamma_2)(\alpha_2 - \gamma_1)$. Согласно теореме 2.6, множество $D_C(A)$ является невырожденным отрезком тогда и только тогда, когда матрицы A и C являются нескалярными и нормальными. В этом случае,

$$D_C(A) = \mathrm{Co}\,\{z_1, z_2\}$$

В следующей теореме мы исследуем равенство

$$D_C(A) = \mathrm{Co}\,\{z_\sigma\ : \sigma \in S_n\}$$

для $n \times n$ матриц, $n \geqslant 3$, установленное в [12]. Приведем доказательство данного факта для полноты изложения.

Теорема 3.3 ([12, теорема 3.4])**.** *Пусть $A, C \in M_n$, $n \geqslant 3$. Тогда $D_C(A) = \mathrm{Co}\,\{z_\sigma\ : \sigma \in S_n\}$ тогда и только тогда, когда $\partial D_C(A)$ является выпуклым многоугольником в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) следует из определения множества $\mathrm{Co}\ \{z_\sigma : \sigma \in S_n\}$ как выпуклой оболочки.

($\Leftarrow$) Включение $\mathrm{Co}\ \{z_\sigma : \sigma \in S_n\} \subseteq D_C(A)$ следует напрямую из предположения. С другой стороны, каждая вершина $D_C(A)$ является угловой точкой. Тогда по лемме 3.2 она является σ-точкой. Следовательно, каждая вершина $D_C(A)$ принадлежит $\mathrm{Co}\ \{z_\sigma : \sigma \in S_n\}$. Откуда следует, что $D_C(A) \subseteq \mathrm{Co}\ \{z_\sigma\ :\ \sigma \in S_n\}$, и мы получаем требуемый результат. □

Далее мы изучаем условия равенства $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$. Начнем с изучения ситуации, когда известно, что одно из множеств $D_C(R\,S)$ или $D_C(S\,R)$ выпуклое, а граница другого является выпуклым многоугольником.

Теорема 3.4. *Пусть $C, S, R \in M_n$, $n \geqslant 3$, и по крайней мере одна из матриц S и R является невырожденной. Предположим также, что $\partial D_C(S\,R)$ – выпуклый многоугольник в $\mathbb{C}$ и множество $D_C(R\,S)$ является выпуклым. Тогда $D_C(S\,R) \subset D_C(R\,S)$.*

Доказательство. По теореме 3.3, множество $\partial D_C(S\,R)$ – выпуклый многоугольник в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда

$$D_C(S\,R) = \mathrm{Co}\,\{z_\sigma\ : \sigma \in S_n\}. \tag{5}$$

Предполагая, без ограничения общности, что S невырожденная, получим: $\mathrm{spec}\,(SR) = \mathrm{spec}\,(S^{-1}SRS) = \mathrm{spec}\,(RS)$. Следовательно, множество σ-точек $R\,S$ совпадает с множеством σ-точек $S\,R$. Так как $z_\sigma \in D_C(R\,S)$ для всех $\sigma \in S_n$, а $D_C(R\,S)$ является выпуклым, имеем

$$D_C(S\,R) = \mathrm{Co}\,\{z_\sigma\ : \sigma \in S_n\} \subset D_C(R\,S). \qquad \square$$

Следствие 3.5. *Пусть $C \in M_n$, $n \geqslant 3$, $S, R \in M_n$ – невырожденные матрицы, для которых обе границы $\partial D_C(S\,R)$ и $\partial D_C(R\,S)$ являются выпуклыми многоугольниками. Тогда $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$.*

Далее мы планируем доказать коммутативность C-детерминантного образа произведений симметричных матриц для нормальной матрицы C даже без предположения выпуклости C-детерминантного образа. Для доказательства данного факта нам потребуется следующая лемма про операцию транспонирования.

Лемма 3.6. *Пусть $S \in M_n$, $n \geqslant 3$. Тогда $D_C(S) = D_C(S^T)$ для произвольной нормальной матрицы C.*

Доказательство. Пусть $C \in M_n$ – нормальная матрица, собственные числа которой $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно спектральной теореме [14, теорема 2.5.4], матрица C является унитарно-диагонализуемой, т.е. $C = V^* \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\, V$ для некоторой матрицы $V \in U_n$. Используя унитарную инвариантность C-детерминантного образа, получаем, что $D_C(S) = D_\Gamma(S)$, где $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $\Gamma = \Gamma^T$. Пусть $z \in D_C(S)$, тогда существует унитарная матрица $U \in U_n$ такая, что

$$\begin{aligned} z &= \det(S - U\,\Gamma\,U^*) \\ &= \det((S - U\,\Gamma\,U^*)^T) \\ &= \det(S^T - \overline{U}\,\Gamma\,U^T) \in D_\Gamma(S^T) = D_C(S^T), \end{aligned}$$

так как $U^T\,\overline{U} = \overline{U}\,U^T = I_n$; здесь $\overline{U}$ обозначает комплексное сопряжение матрицы U. Следовательно, $D_C(S) \subset D_C(S^T)$. Другое включение доказывается аналогично. Таким образом, требуемое равенство выполнено. □

Теорема 3.7. *Пусть $C \in M_n$ – нормальная матрица, $S, R \in M_n$ – симметричные матрицы. Тогда справедливо равенство $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$.*

Доказательство. Поскольку матрицы S и R являются симметричными, имеем $D_C(S\,R) = D_C(S^T\,R^T)$. Так как матрица C является нормальной, то, по лемме 3.6, получаем:

$$D_C(S\,R) = D_C(S^T\,R^T) = D_C((R\,S)^T) = D_C(R\,S). \qquad \square$$

§4. 2 × 2 МАТРИЦЫ

В данном разделе мы исследуем случай, когда равенство $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ справедливо для матриц порядка 2.

Аналогично [7, теоремы 1 и 4], где соответствующие факты доказаны для числового и C-числового образов, получаем следующие условия коммутативности C-детерминантного образа.

Лемма 4.1. *Пусть $C \in M_2$ – нормальная матрица, $S, R \in M_2$ – произвольные невырожденные матрицы. Тогда справедливо одно из включений: $D_C(S\,R) \subseteq D_C(R\,S)$ или $D_C(R\,S) \subseteq D_C(S\,R)$. Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\|R\,S\|_2 = \|S\,R\|_2$.*

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 – собственные числа матрицы $C \in M_2$. Аналогично доказанному в теореме 3.4 получаем, что матрицы SR и RS имеют одинаковые собственные значения. Мы обозначим их через $\{\lambda, \mu\}$. В силу теоремы об эллиптическом образе, теорема 2.3, множества $D_C(S\,R)$ и $D_C(R\,S)$ являются эллиптическими дисками с фокусами $(\lambda-\gamma_1)(\mu-\gamma_2)$ и $(\mu-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)$ и малыми осями, имеющими длины $|\gamma_1-\gamma_2|\,\left(\|S\,R\|_2^2 - |\lambda|^2 - |\mu|^2\right)^{1/2}$ и $|\gamma_1-\gamma_2|\,\left(\|R\,S\|_2^2 - |\lambda|^2 - |\mu|^2\right)^{1/2}$ соответственно. Следовательно, или $D_C(S\,R) \subseteq D_C(R\,S)$, или $D_C(R\,S) \subseteq D_C(S\,R)$, и равенство $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\|S\,R\|_2 = \|R\,S\|_2$. □

В следующей теореме мы устанавливаем еще некоторые критерии выполнимости равенства в лемме 4.1 и, тем самым, обобщаем теорему 4 из [7].

Теорема 4.2. *Пусть матрицы $R, S \in M_2$ невырожденные. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ *для произвольной нормальной матрицы* $C \in M_2$*;*
(ii) $\|S\,R\|_2 = \|R\,S\|_2$*;*
(iii) *матрицы* $S\,R$ *и* $R\,S$ *унитарно подобны;*
(iv) $W_C(S\,R) = W_C(R\,S)$ *для произвольной матрицы* $C \in M_2$*;*
(v) $W(S\,R) = W(R\,S)$.

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 – набор собственных чисел матрицы $C \in M_2$. Аналогично доказанному в теореме 3.4 получаем, что матрицы SR и RS имеют одинаковые собственные значения; обозначим их через $\{\lambda, \mu\}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Лемма 4.1.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). В силу теоремы Шура о триангулизуемости, $S\,R$ и $R\,S$ унитарно-подобны верхне-треугольным матрицам

$$\begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

для некоторых неотрицательных чисел a, b. Если условие (ii) справедливо, а именно $\|S\,R\|_2 = \|R\,S\|_2$, то, как показывает непосредственная проверка,

$$\|S\,R\|_2^2 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + a^2 \quad \text{и} \quad \|R\,S\|_2^2 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + b^2,$$

а, значит, $a = b$, и, так как $a, b > 0$, получаем (iii). Если справедливо условие (iii), то $S\,R = U^* R\,S\,U$ для некоторой унитарной матрицы U размера $n \times n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|S\,R\|_2^2 &= \mathrm{Tr}\ ((S\,R)^*(S\,R)) \\
&= \mathrm{Tr}\ ((U^*R\,S\,U)^*(U^*R\,S\,U)) \\
&= \mathrm{Tr}\ (U^*(R\,S)^*\,U\,U^*R\,S\,U) \\
&= \mathrm{Tr}\ (U^*(R\,S)^*\,R\,S\,U) \\
&= \mathrm{Tr}\ ((R\,S)^*\,R\,S) \\
&= \|R\,S\|_2^2,
\end{aligned}$$

здесь используется равенство $U^*U = I_n$ и инвариантность функции след при циклических перестановках. Получаем равенство (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Если справедливо условие (iii), то $SR = U^*RSU$ для некоторых унитарных $n \times n$ матриц U. Следовательно,

$$W_C(SR) = W_C(U^*RSU) = W_C(RS),$$

так как C-числовой образ является унитарно-инвариантным.

(iv) $\Rightarrow$ (v). В силу предположения, $W_C(SR) = W_C(RS)$ для произвольной матрицы $C \in M_2$. Рассмотрим частный случай $C = \operatorname{diag}(1,0)$. В этом случае, $W_C(SR) = W(SR)$ и $W_C(RS) = W(RS)$. Таким образом, мы получаем $W(SR) = W(RS)$.

(v) $\Leftrightarrow$ (ii) [7, теорема 4]. □

Пример 4.3. Заметим, что теорема 4.2 неверна при $n \geqslant 3$. Для этого рассмотрим две эрмитовы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\|AB\|^2 = \|BA\|^2 = 38$, однако числовые образы $W(AB)$ и $W(BA)$ различны.

В самом деле, предположим, что $W(AB) = W(BA)$. Так как матрицы A и B являются эрмитовыми, получаем, что $(AB)^* = B^*A^* = BA$. Следовательно,

$$W(AB) = W((AB)^*) = \overline{W(AB)},$$

последнее означает, что числовой образ AB симметричен относительно вещественной оси. С другой стороны, обозначим через $\operatorname{Im} C = (C - C^*)/2i$, $\lambda_{\max}(C)$ и $\lambda_{\min}(C)$ мнимую часть, наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы $C \in M_n$, соответственно. Тогда (см. [15, Глава 1])

$$\lambda_{\max}(\operatorname{Im}(AB)) = \max\{\operatorname{Im} \alpha : \alpha \in W(AB)\}$$

и

$$\lambda_{\min}(\operatorname{Im}(AB)) = \min\{\operatorname{Im} \alpha : \alpha \in W(AB)\}.$$

Непосредственные вычисления позволяют получить, что собственные значения матрицы $\operatorname{Im}(AB)$ равны -1 и $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$. Следовательно $\lambda_{\min}(\operatorname{Im}(AB)) = -1$, а $\lambda_{\max}(\operatorname{Im}(AB)) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, противоречие с тем фактом, что числовой образ AB симметричен относительно вещественной оси.

Рисунки 1 и 2, созданные при помощи программы “An Effective Algorithm for Calculating the Numerical Range”, Carl C. Cowen, Elad Harel, Purdue University, из пакета MatLab, иллюстрируют форму рассматриваемых числовых образов.

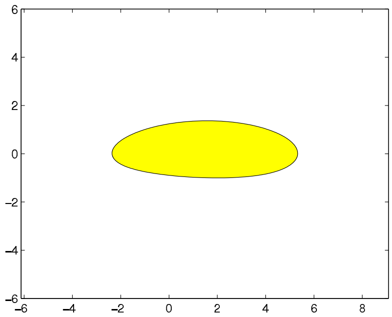

Рис. 1. $W(A\,B)$

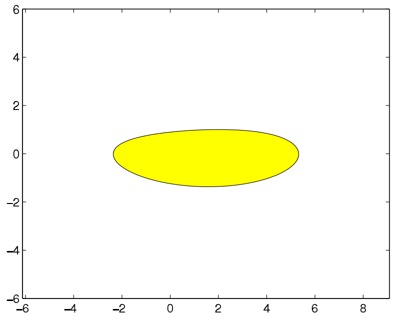

Рис. 2. $W(B\,A)$

Для доказательства следующей теоремы применяется подход, аналогичный доказательству теоремы 5 из [7].

Теорема 4.4. *Пусть* $C \in M_2$ *– нормальная матрица и* $S, R \in M_2$ *– невырожденные нормальные матрицы. Тогда* $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$.

Доказательство. По теореме 4.2, достаточно установить, что $\|SR\|_2 = \|R\,S\|_2$. Так как, по условию, матрица S является нормальной, то $U^*S\,U = \operatorname{diag}(\lambda, \mu) = \Lambda$ для некоторых $U \in U_2$. Тогда

$$\Lambda U^* R U = \begin{bmatrix} \lambda\, w_1^*\, R\, w_1 & \lambda\, w_1^*\, R\, w_2 \\ \mu\, w_2^*\, R\, w_1 & \mu\, w_2^*\, R\, w_2 \end{bmatrix}, \quad U^* R U \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda\, w_1^*\, R\, w_1 & \mu\, w_1^*\, R\, w_2 \\ \lambda\, w_2^*\, R\, w_1 & \mu\, w_2^*\, R\, w_2 \end{bmatrix},$$

где w_1 и w_2 являются первым и вторым столбцами матрицы U соответственно. Заметим, что произвольная $2{\times}2$ матрица $Q = (q_{ij})$ удовлетворяет условию $|q_{12}| = |q_{21}|$. Следовательно, так как R, по условию, является нормальной матрицей, то матрица $U^*\,R\,U$ также является нормальной и $|w_1^*\,R\,w_2| = |w_2^*\,R\,w_1|$.

Для унитарных 2×2 матриц U, используя цикличность следа, получаем

$$\|U^*\,S\,R\,U\|_2^2 = \operatorname{Tr}\,((U^*\,S\,R\,U)^*(U^*\,S\,R\,U)) = \operatorname{Tr}\,((S\,R)^*(S\,R)) = \|S\,R\|_2^2.$$

Следовательно, $\|U^*\,S\,R\,U\|_2^2 = \|U^*\,S\,U\,U^*\,R\,U\|_2^2 = \|\Lambda\,U^*\,R\,U\|_2^2$.

Непосредственные вычисления позволяют получить

$$\|\Lambda\, U^*\, R\, U\|_2^2 = |\lambda|^2 \left(|w_1^*\, R\, w_1|^2 + |w_1^*\, R\, w_2|^2\right) \\ + |\mu|^2 \left(|w_2^*\, R\, w_1|^2 + |w_2^*\, R\, w_2|^2\right)$$

и

$$\|U^*\, R\, U\, \Lambda\|_2^2 = |\lambda|^2 \left(|w_1^*\, R\, w_1|^2 + |w_2^*\, R\, w_1|^2\right) \\ + |\mu|^2 \left(|w_1^*\, R\, w_2|^2 + |w_2^*\, R\, w_2|^2\right).$$

Следовательно, можно заключить, что

$$\|S\, R\|_2^2 = \|\Lambda\, U^*\, R\, U\|_2^2 = \|U^*\, R\, U\, \Lambda\|_2^2 = \|R\, S\|_2^2,$$

и утверждение теоремы следует из леммы 4.1. □

§5. Теплицевы и континуантные матрицы

В данном разделе мы изучаем C-детерминантный образ произведений ганкелевых матриц для произвольной матрицы $C \in M_n$ и C-детерминантный образ произведений теплицевых и континуантных матриц в том случае, когда матрица C является нормальной $n \times n$ матрицей. Аналогичные исследования проводились ранее в [7] для C-числового образа, соответствующего нормальной матрице $C \in M_n$.

Определение 5.1. *Теплицева матрица имеет вид*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & \dots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Будем обозначать такую теплицеву матрицу A через

$$A(a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Определение 5.2. *Ганкелевой матрицей называется матрица вида*

$$H_A = \begin{bmatrix} a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 \\ a_{-n+2} & a_{-n+3} & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_{-n+3} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что ганкелевы матрицы являются симметричными, что позволяет сформулировать следующий результат, вытекающий напрямую из теоремы 3.7.

Следствие 5.3. *Пусть матрицы S и $R \in M_n$ являются ганкелевыми. Тогда $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ для всех нормальных $C \in M_n$.*

Определение 5.4. *Введем обозначение $P = E_{1n} + E_{2\,n-1} + \cdots + E_{n-1\,2} + E_{n1} \in M_n$.*

Замечание 5.5. Непосредственная проверка показывает, что если A – теплицева матрица, то $A = PH_A$, где H_A введена в определении 5.2.

Теорема 5.6. *Пусть S, $R \in M_n$ являются теплицевыми матрицами. Тогда для произвольной нормальной матрицы $C \in M_n$ справедливо равенство $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$.*

Доказательство. Разложим $S = P\,H_S$ и $R = P\,H_R$, где матрица $P = E_{1n}+E_{2\,n-1}+\cdots+E_{n-1\,2}+E_{n1} \in M_n$ задана определением 5.4; матрицы H_S и H_R являются ганкелевыми и ассоциированы с матрицами S и R соответственно. Так как ганкелевы матрицы H_S и H_R являются симметричными, получаем

$$\begin{aligned} D_C(S\,R) &= D_C(PH_SPH_R) \\ &= D_C((PH_SPH_R)^T) \\ &= D_C(H_RPH_SP) \\ &= D_C(P^TPH_RPH_SP) \\ &= D_C(PH_RPH_S) \\ &= D_C(R\,S). \end{aligned}$$

Здесь второе равенство является следствием леммы 3.6, четвертое справедливо, поскольку $P^TP = I_n$, а пятое равенство является следствием унитарной инвариантности C-детерминантного образа. $\square$

Теорема 5.7. *Пусть матрицы S, $R \in M_n$ симметричны относительно своих побочных диагоналей. Тогда $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ для произвольной нормальной матрицы $C \in M_n$.*

Доказательство. Так как матрицы S и R симметричны относительно своих побочных диагоналей, мы можем представить их в виде $R = PH_R$ и $S = PH_S$, где $P = E_{1n} + E_{2\,n-1} + \cdots + E_{n-1\,2} + E_{n1} \in M_n$ задана определением 5.4, а матрицы H_S и H_R являются симметричными. Тогда

$$\begin{aligned} D_C(S\,R) &= D_C(PH_SPH_R) \\ &= D_C((PH_SPH_R)^T) \\ &= D_C(H_RPH_SP) \\ &= D_C(P^TPH_RPH_SP) \\ &= D_C(PH_RPH_S) \\ &= D_C(R\,S). \end{aligned}$$

Заметим, что второе равенство получается из леммы 3.6, четвертое является следствием того факта, что $P^TP = I_n$, и пятое равенство справедливо благодаря унитарной инвариантности C-детерминантного образа. □

Определение 5.8. *Континуантная матрица $C_n = C_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ определяется как матрица вида*

$$C_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & a_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.9. *Пусть S, $R \in M_n$ – континуантные матрицы. Тогда $D_C(S\,R) = D_C(R\,S)$ для всех нормальных матриц $C \in M_n$.*

Доказательство. Рассмотрим унитарную матрицу

$$U = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$R\,S = (U^*\,S\,R\,U)^T,$$

откуда заключение теоремы следует по лемме 3.6 в силу унитарной инвариантности C-детерминантного образа. □

Литература

1. N. Bebiano, *Some analogies between the c-numerical range and a certain variation of this concept.* — Linear Algebra Appl. **81** (1986), 47–54.
2. N. Bebiano, Yiu-Tung Poon, J. da Providência, *On C-det spectral and C-det convex matrices.* — Linear Multilinear Algebra **23** (1988), 343–351.
3. N. Bebiano, J. K. Merikoski, J. da Providência, *On a conjecture of G.N. de Oliveira on determinants.* — Linear Multilinear Algebra **20** (1987), 167–170.
4. N. Bebiano, A. Kovačec, J. da Providência, *The validity of the Marcus–Oliveira conjecture for essentially Hermitian matrices.* — Linear Algebra Appl. **197, 198** (1994), 411–427.
5. N. Bebiano, G. Soares, *Three observations on the determinantal range.* — Linear Algebra Appl. **401** (2005), 211–220.
6. W.-S. Cheung, N.-K. Tsing, *The C-numerical range of matrices is star-shapped.* — Linear Multilinear Algebra **41** (1996), 245–250.
7. M.-T. Chien, C.-L. Ko, H. Nakazato, *On the numerical ranges of matrix products.* — Appl. Math. Letters **23** (2010), 732–737.
8. S. W. Drury, B. Cload, *On the determinantal conjecture of Marcus and de Oliveira.* — Linear Algebra Appl. **177** (1992), 105–109.
9. M. Fiedler, *Bounds for the determinant of the sum of hermitian matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1971), 27–31.
10. P. Gawron, Z. Puchala, J. A. Miszczak, L. Skowronek, K. Zyczkowski, *Restricted numerical range: a versatile tool in the theory of quantum information.* — J. Math. Physics **51** (2010), 102204 (24 pp.).
11. M. Goldberg, E. G. Straus, *Elementary inclusion relations of generalized numerical ranges.* — Linear Algebra Appl. **18** (1977), 1–24.
12. A. Guterman, R. Lemos, G. Soares, *Extremal case in Marcus–Oliveira conjecture and beyond.* — Linear Multilinear Algebra **61**, No. 9 (2013), 1206–1222.
13. F. Hausdorff, *Der Wertvorrat einer Bilinearform.* — Math. Z. **3** (1919), 314–316.
14. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
15. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.
16. A. Kovačec, *On a conjecture of Marcus and de Oliveira.* — Linear Algebra Appl. **201** (1994), 91–97.
17. Chi-Kwong Li, *The C-convex matrices.* — Linear Multilinear Algebra **21** (1987), 303–312.
18. Chi-Kwong Li, *C-numerical ranges and C-numerical radii.* — Linear Multilinear Algebra **37**, No. 1–3 (1994), 51–82.
19. C.-K. Li, Y.-T. Poon, N.-S. Sze, *Ranks and determinants of the sum of matrices from unitary orbits.* — Linear Multilinear Algebra **56**, No. 1–2 (2008), 105–130.
20. M. Marcus, *Derivations, Plücker relations and the numerical range.* — Indiana Univ. Math. J. **22** (1973), 1137–1149.

21. F. D. Murnaghan, *On the field of values of a square matrix.* — Proc. Nat. Acad. Sci. **18** (1932), 246–248.
22. J. K. Merikoski, A. Virtanen, *Some notes on de Oliveira's determinantal conjecture.* — Linear Algebra Appl. **121** (1989), 345–352.
23. G. N. de Oliveira, *Normal matrices (Research Problem).* — Linear Multilinear Algebra **12** (1982), 153–154.
24. O. Toeplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Satz von Fejer.* — Math. Z. **2** (1918), 187–197.
25. R. Westwick, *A theorem on numerical ranges.* — Linear Multilinear Algebra **2** (1975), 311–315.

Guterman A., Soares G. On the determinantal range of matrix products.

Let matrices $A, C \in M_n$ have eigenvalues $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ and $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, respectively. The set $D_C(A) = \{\det(A - UCU^*) : U \in M_n, U^*U = I_n\}$ of complex numbers is called the *C-determinantal range* of A. The paper studies various conditions under which the relation $D_C(R\,S) = D_C(S\,R)$ holds for some matrices R and S.

МГУ имени М.В. Ломоносова,
119991, ГСП-1, Москва, Россия
E-mail: `guterman@list.ru`

Поступило 1 ноября 2017 г.

Университет Трас-ос-Монте и Алто Доуро,
5000-801, Португалия
E-mail: `gsoares@utad.pt`