Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

А. Э. Гутерман, О. В. Маркова

ГРАФЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МАТРИЦ НАД ТЕЛАМИ

§1. Введение

Бинарные отношения на ассоциативных кольцах, в частности, на матричном кольце, являются важным предметом исследований современной математики, активно используемым в многочисленных приложениях. На сегодняшний день эффективным способом исследовать данное отношение является изучение так называемого *графа отношения*, вершинами которого являются элементы некоторого множества, при этом две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда рассматриваемые элементы состоят в заданном отношении.

Изучение алгебраических структур, базирующееся на исследовании соответствующих им графов отношений, находится в центре внимания математиков в течение последних двадцати лет. Так, активно изучаются граф отношения коммутирования и графы делителей нуля, см. работы [1–5] и их библиографию. Эти отношения тесно связаны с отношением ортогональности, исследуемым в данной работе. Напомним, что элементы r, s кольца R называются *ортогональными*, если $rs = sr = 0$. Отношение ортогональности используется в работах [12–14], в которых изучаются некоторые частичные порядки на матричной алгебре и отображения матриц, монотонные относительно этих порядков. В теории колец важную роль играет основанное на отношении ортогональности понятие ортогональной полноты [8,9]. Условие ортогональности также встречается в линейной алгебре и функциональном анализе при изучении проекторов (операторов проектирования).

В работе [7] авторами было введено понятие графа отношения ортогональности, получено описание возможных значений диаметров графов ортогональности коммутативных артиновых колец, исследован граф ортогональности полной матричной алгебры над произвольным

Ключевые слова: графы матричных отношений, граф ортогональности, матрицы над телом.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ номер 17-11-01124.

полем, доказана связность и вычислены диаметры графов ортогональности некоторых классических семейств матриц.

Напомним некоторые определения из теории графов. Понятия теории графов, использованные в статье, можно найти, например, в [10, глава 2].

Граф Γ – это совокупность непустого множества вершин $\mathrm{V}(\Gamma)$ и набора пар вершин $\mathrm{E}(\Gamma)$ (связей между вершинами или рёбер).

Если v_1, v_2 – вершины, а $e = (v_1, v_2)$ – соединяющее их ребро, то вершина v_1 и ребро e называются *инцидентными*, вершина v_2 и ребро e тоже *инцидентны*.

Петля – ребро, инцидентное одной и той же вершине. Сразу оговорим, что в данной статье граф – граф без кратных рёбер, но, возможно, с петлями. Граф без петель – *простой граф*.

В графе Γ *путём* (*маршрутом*) называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны. *Длина маршрута* – количество рёбер в маршруте, причём каждое ребро учитывается столько раз, сколько оно встречается в маршруте, обозначается буквой d. *Цепь* – маршрут, все рёбра которого различны.

Связный граф – это граф, в котором для любой пары вершин существует соединяющая их цепь.

Компонента связности графа Γ – максимальный (по включению) связный подграф графа Γ.

Расстоянием $d(u, v)$ между двумя различными вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Если такой цепи не существует, то говорят, что $d(u, v) = \infty$; считается, что $d(u, u) = 0$ для любой вершины u.

Диаметр $\operatorname{diam}(\Gamma)$ графа Γ – это максимум расстояний между вершинами для всех пар вершин.

Полный граф – простой граф, в котором каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной.

Граф Γ назовём *полным графом с петлями*, если любые две его вершины (в частности совпадающие) соединены ребром.

Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части $V = V_1 \cup V_2$ таким образом, что никакие вершины из V_1 не соединены ребром и никакие вершины из V_2 не соединены ребром. Подмножества вершин V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа Γ.

Двудольный граф называется *полным двудольным*, если для каждой пары вершин $u \in V_1, v \in V_2$ существует ребро $(u, v) \in E$.

В данной статье все рассматриваемые кольца – ассоциативные кольца. Напомним, что элемент a кольца R называется *левым (правым) делителем нуля*, если существует ненулевой элемент $b \in R$ такой, что $ab = 0$ (соответственно, $ba = 0$). Элемент, являющийся одновременно и левым, и правым делителем нуля, называется двусторонним делителем нуля. Под *кольцом без делителей нуля* понимаем кольцо, в котором нет делителей нуля кроме 0, т.е. из равенства $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$.

Для данного кольца R напомним основные определения, связанные с графом отношения ортогональности (подробнее см. [7]).

Определение 1.1. *Два элемента $r_1 \in R$ и $r_2 \in R$ называются* ортогональными, *если $r_1 r_2 = r_2 r_1 = 0$.*

Через $O_R(X)$, где X – подмножество R, обозначим множество элементов из R ортогональных каждому элементу из X; также положим $O_R^0(X) = O_R(X) \setminus \{0\}$.

Замечание 1.2. Нулевой элемент кольца $0 \in R$ ортогонален любому элементу кольца. Наоборот, если элемент $r \in R$ не является делителем нуля хотя бы с одной стороны, то не существует такого ненулевого элемента $x \in R$, что $xr = rx = 0$, а значит, не существует ненулевых ортогональных r элементов кольца R. Поэтому, изучая граф ортогональности, мы будем заранее исключать из множества вершин 0 и элементы, не являющиеся делителями нуля хотя бы с одной из сторон.

Определение 1.3 ([7, определение 2.15]). *С каждым кольцом R можно связать* граф ортогональности $O(R)$, *множеством вершин которого являются все ненулевые двусторонние делители нуля кольца R, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны.*

Лемма 1.4 ([7, лемма 2.17]). *Множество вершин $O(R)$ пусто тогда и только тогда, когда R является кольцом без делителей нуля.*

Цель данной статьи – исследование графа ортогональности кольца матриц над телом. Методы, используемые в данной работе, в некоторых случаях существенно отличаются от тех, которые применялись для изучения колец матриц над полями в [7], хотя итоговые результаты получаются аналогичными. Будет доказано, что при $n \geqslant 3$ граф ортогональности кольца $n \times n$ матриц $M_n(\mathbb{D})$ над телом $\mathbb{D}$ связен и имеет диаметр 4 для произвольного тела $\mathbb{D}$. При $n = 2$ граф $M_n(\mathbb{D})$ разбивается на несколько компонент связности, каждая из которых имеет диаметр 1 или 2. Как следствие, изучены связность и диаметры связных компонент графов ортогональности простых артиновых колец.

§2. Граф ортогональности матричного кольца $O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right)$

Покажем, что результаты о графе ортогональности полного матричного кольца над полем [7, лемма 4.1, теорема 4.5] обобщаются на случай кольца матриц над телом.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbb{D}$ – произвольное тело. Тогда при $n \geqslant 3$ граф ортогональности $O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right)$ связен и* $\operatorname{diam} O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right) = 4$.

Доказательство. I. Для доказательства связности графа $O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right)$ докажем, что произвольные A и B из $O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right)$ соединены путём длины не большей 4. По определению, A, B – двусторонние делители нуля в $M_n\left(\mathbb{D}\right)$, т.е. существуют ненулевые матрицы $X, Y, U, V \in M_n(\mathbb{D})$ такие, что

$$XA = 0,\ AY = 0,\ UB = 0,\ BV = 0.$$

Возьмём $\mathbf{y}_c$, $\mathbf{v}_c$ – произвольные ненулевые столбцы матриц Y и V соответственно, $\mathbf{x}_r$ $\mathbf{u}_r$ – произвольные ненулевые строки матриц X и U. Тогда положим

$$R_1 = \mathbf{y}_c\mathbf{x}_r,\ R_3 = \mathbf{v}_c\mathbf{u}_r.$$

В силу ассоциативности умножения матриц имеем

$$AR_1 = A(\mathbf{y}_c\mathbf{x}_r) = (A\mathbf{y}_c)\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_c\mathbf{x}_r = 0,$$

$$R_1A = (\mathbf{y}_c\mathbf{x}_r)A = \mathbf{y}_c(\mathbf{x}_rA) = \mathbf{y}_c\mathbf{0}_r = 0$$

и, аналогично,

$$R_3B = BR_3 = 0.$$

Рассмотрим систему из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{x}_r\mathbf{z}_c = 0 \\ \mathbf{u}_r\mathbf{z}_c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

над $\mathbb{D}$ с n неизвестными (с вектором-столбцом неизвестных $\mathbf{z}_c$). Решение системы (1) над телом можно найти методом Гаусса [6, глава I, §5] (выполнением элементарных преобразований над строками матрицы коэффициентов), и поскольку $n \geqslant 3$, т.е. неизвестных в системе больше, чем уравнений, то система (1) имеет ненулевое решение $\widetilde{\mathbf{z}}_c$. Откуда

$$R_1\widetilde{\mathbf{z}}_c = (\mathbf{y}_c\mathbf{x}_r)\widetilde{\mathbf{z}}_c = \mathbf{y}_c(\mathbf{x}_r\widetilde{\mathbf{z}}_c) = 0,$$

$$R_2\widetilde{\mathbf{z}}_c = (\mathbf{v}_c\mathbf{u}_r)\widetilde{\mathbf{z}}_c = \mathbf{v}_c(\mathbf{u}_r\widetilde{\mathbf{z}}_c) = 0.$$

Аналогично, для системы

$$\begin{cases} \mathbf{w}_r\mathbf{y}_c = 0 \\ \mathbf{w}_r\mathbf{v}_c = 0 \end{cases} \tag{2}$$

над $\mathbb{D}$ с n неизвестными (с вектором-строкой неизвестных $\mathbf{w}_r$) решение можно найти методом Гаусса (выполнением элементарных преобразований над столбцами матрицы коэффициентов), и поскольку $n \geqslant 3$, т.е. неизвестных в системе больше, чем уравнений, то система (2) имеет ненулевое решение $\widetilde{\mathbf{w}}_r$. Откуда

$$\widetilde{\mathbf{w}}_r R_1 = \widetilde{\mathbf{w}}_r(\mathbf{y}_c\mathbf{x}_r) = (\widetilde{\mathbf{w}}_r\mathbf{y}_c)\mathbf{x}_r = 0,$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_r R_2 = \widetilde{\mathbf{w}}_r(\mathbf{v}_c\mathbf{u}_r) = (\widetilde{\mathbf{w}}_r\mathbf{v}_c)\mathbf{u}_r = 0.$$

Тогда матрица $R_2 = \widetilde{\mathbf{z}}_c\widetilde{\mathbf{w}}_r$ отлична от нуля и удовлетворяет условиям $R_1R_2 = R_2R_1 = R_3R_2 = R_2R_3 = 0$. Таким образом, мы получаем искомый путь

$$A - R_1 - R_2 - R_3 - B$$

длины 4.

II. Для того, чтобы доказать, что диаметр графа $O\left(M_n\left(\mathbb{D}\right)\right)$ равен 4, осталось предъявить путь длины 4. Покажем, что, как и в случае поля коэффициентов, искомым является путь между J и J^t, где $J = \sum\limits_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ (жорданова клетка), J^t – транспонированная к J матрица.

1. Убедимся, что $d(J, J^t) > 3$. Пусть $0 \neq A \in O_{M_n(\mathbb{D})}(J)$. Это означает, что $JA = AJ = 0$. Из равенства $JA = 0$ следует, что строки матрицы A с номерами $2, \ldots, n$ нулевые, так как умножение слева на J смещает строки матрицы A на одну позицию вверх, а из равенства $AJ = 0$ получаем, что столбцы матрицы A с номерами $1, \ldots, n-1$ нулевые, так как умножение справа на J смещает столбцы матрицы A на одну позицию вправо. Значит, остаётся единственная ненулевая позиция в 1-ой строке, n-ом столбце. Следовательно, $O_{M_n(\mathbb{D})}(J) = \{\alpha E_{1n} \mid \alpha \in \mathbb{D}\}$.

Аналогично получаем, что $O_{M_n(\mathbb{D})}(J^t) = \{\alpha E_{n1} \mid \alpha \in \mathbb{D}\}$. Учитывая то, что $E_{1n}E_{n1} \neq 0$, получаем, что $d(J, J^t) \geqslant 4$.

2. Предъявим путь длины 4. Действительно, непосредственная проверка показывает, что $J - E_{1n} - E_{22} - E_{n1} - J^t$ – путь в $O(M_n(\mathbb{D}))$.

Следовательно, $d(J, J^t) = 4$. $\square$

Далее отдельно рассмотрим оставшиеся малые значения n.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbb{D}$ – некоммутативное тело. Граф ортогональности $O(M_n(\mathbb{D}))$ при $n = 1$ пуст. При $n = 2$ граф $O(M_n(\mathbb{D}))$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

1. *множество $V_1 = V_{1a} \cup V_{1b}$, где*

$$V_{1a} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{1b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{D}^* \right\};$$

2. *множество*

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{D}^* \right\};$$

3. *множество*

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{D}^* \right\};$$

4. *для каждого $\alpha \in \mathbb{D}^*$ множество $V_{4,\alpha} = V_{4,\alpha,a} \cup V_{4,\alpha,b}$, где*

$$V_{4,\alpha,a} = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{4,\alpha,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha d \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{D}^* \right\};$$

5. *для каждого $\alpha \in \mathbb{D}^*$ множество $V_{5,\alpha} = V_{5,\alpha,a} \cup V_{5,\alpha,b}$, где*

$$V_{5,\alpha,a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c\alpha \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{5,\alpha,b} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha d & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{D}^* \right\};$$

6. *для каждой неупорядоченной пары* $\{\alpha, \beta\}, \alpha, \beta \in \mathbb{D}^*$, *множество* $V_{6,\alpha,\beta} = V_{6,\alpha,\beta,a} \cup V_{6,\alpha,\beta,b}$, *где*

$$V_{6,\alpha,\beta,a} = \left\{ \begin{pmatrix} -a\alpha & a \\ -\beta a\alpha & \beta a \end{pmatrix} \Big| \, a \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{6,\alpha,\beta,b} = \left\{ \begin{pmatrix} -b\beta & b \\ -\alpha b\beta & \alpha b \end{pmatrix} \Big| \, b \in \mathbb{D}^* \right\}.$$

При $\alpha = \beta$ *имеем* $V_{6,\alpha,\alpha} = V_{6,\alpha,\alpha,a} = V_{6,\alpha,\alpha,b}$.

Каждая компонента связности Y, *соответствующая множествам вершин* V_1, $V_{4,\alpha}$, $V_{5,\alpha}$, $V_{6,\alpha,\beta}$ *с условием* $\beta \neq \alpha$, *является полным двудольным графом с долями* Y_a *и* Y_b, *заданными указанным выше разбиением* $Y = Y_a \cup Y_b$, *и имеет диаметр* 2.

Каждая компонента связности, отвечающая множествам вершин V_2, V_3 *и* $V_{6,\alpha,\alpha}$, *является полным графом с петлями и имеет диаметр* 1.

Доказательство. Первое утверждение при $n = 1$ очевидно, так как в теле $\mathbb{D}$ нет делителей нуля.

Пусть теперь $n = 2$.

(1) Сначала заметим, что любая пара перечисленных в лемме множеств не пересекается. Действительно, множества V_1, V_2, V_3 состоят из матриц ровно с 3 нулевыми элементами, множества $V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}$ – из матриц ровно с 2 нулевыми элементами, а множества $V_{6,\alpha,\beta}$ – из матриц, в которых нет нулевых элементов. Исходя из количества нулей в матрице и их расположения, можно видеть, что

(a) $V_1, V_2, V_3, V_{4,\alpha_1}, V_{5,\alpha_2}$ и $V_{6,\alpha,\beta}$ попарно не пересекаются при любых фиксированных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta \in \mathbb{D}^*$.

(b) V_{4,α_1} и V_{4,α_2} попарно не пересекаются для всех $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

(c) V_{5,α_1} и V_{5,α_2} попарно не пересекаются для всех $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

(d) V_{6,α_1,β_1} и V_{6,α_2,β_2} попарно не пересекаются для всех $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{D}^*$, кроме случая $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{\alpha_2, \beta_2\}$. Действительно, если пересекаются $V_{6,\alpha_1,\beta_1,a}$ и $V_{6,\alpha_2,\beta_2,a}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} -a_1\alpha_1 & a_1 \\ -\beta_1 a_1\alpha_1 & \beta_1 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2\alpha_2 & a_2 \\ -\beta_2 a_2\alpha_2 & \beta_2 a_2 \end{pmatrix}$$

для некоторых $a_1, a_2 \in \mathbb{D}^*$, то $a_1 = a_2$ из совпадения элементов на позиции $(1,2)$, откуда $\beta_1 = \beta_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$. Для пересечения $V_{6,\alpha_1,\beta_1,b}$ и $V_{6,\alpha_2,\beta_2,b}$ аналогично.

Пусть, без ограничения общности, пересекаются $V_{6,\alpha_1,\beta_1,a}$ и $V_{6,\alpha_2,\beta_2,b}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} -a\alpha_1 & a \\ -\beta_1 a\alpha_1 & \beta_1 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\beta_2 & b \\ -\alpha_2 b\beta_2 & \alpha_2 b \end{pmatrix}$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{D}^*$. Тогда $a = b$ из совпадения элементов на позиции $(1,2)$, откуда $\alpha_1 = \beta_2$ (позиция $(1,1)$) и $\beta_1 = \alpha_2$ (позиция $(2,2)$).

(2) Для матриц над телом определено понятие ранга и, в силу справедливости теоремы о ранге матрицы, ранг, в частности, определяется как левый строчный ранг и правый столбцовый ранг (см., например, [6, глава I, §5]). Если ненулевая матрица $A \in M_2(\mathbb{D})$ является двусторонним делителем нуля, то она не может иметь полный ранг, поэтому $\operatorname{rank} A = 1$.

Видно, что перечисленные в формулировке леммы множества содержат всевозможные матрицы ранга 1 и только их. Докажем, что если W – любая из указанных компонент и $A \neq 0$ – произвольная матрица из W, то $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset W$, из чего будет следовать отсутствие ребер, связывающих между собой различные компоненты в графе $O(M_2(\mathbb{D}))$.

Разделим матрицы A ранга 1 на группы в зависимости от количества нулевых элементов в матрице и найдем $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A)$. Заметим, что по симметричности отношения ортогональности, если $B \in O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A)$, то $A \in O^0_{M_2(\mathbb{D})}(B)$. Поэтому $\operatorname{rank} B = 1$. Тогда, используя строчный ранг, получаем, что $\mathbf{r}_i = c_i\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}_i$ – i-ая строка матрицы B, $i = 1, 2$, $\mathbf{r} \neq 0$ – строка длины 2 над $\mathbb{D}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{D}$ не равны нулю одновременно. Откуда $B = \mathbf{cr}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$AB = 0 = A(\mathbf{cr}) = (A\mathbf{c})\mathbf{r},$$

и равенство нулю возможно для ненулевой строки $\mathbf{r}$, если и только если $A\mathbf{c} = 0$; аналогично из равенства $BA = 0$ заключаем, что $\mathbf{r}A = 0$.

(a) *Множество* V_1: Пусть сначала $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{D}^*$. Тогда $\mathbf{r} = (0, u)$, $u \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yu \end{pmatrix}$, $y, u \in \mathbb{D}^*$, произведение yu может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $b \in \mathbb{D}^*$. Аналогично, для $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{D}^*$ имеем $\mathbf{r} = (t, 0)$, $t \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} xt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, t \in \mathbb{D}^*$, произведение xt может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $a \in \mathbb{D}^*$. Таким образом, мы доказали, что для любой $A \in V_1$ имеем $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset V_1$.

(b) *Множество* V_2: Пусть $A = aE_{21}$, $a \in \mathbb{D}^*$. Тогда $\mathbf{r} = (t, 0)$, $t \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix}$, $y, t \in \mathbb{D}^*$, произведение yt может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $b \in \mathbb{D}^*$. Таким образом, для любой матрицы $A \in V_2$ имеем $O_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset V_2$.

(c) *Множество* V_3: Случай $A = aE_{12}$ аналогичен подпункту 2(b) и соответствует компоненте V_3.

(d) *Множество* $V_{4,\alpha}$: Пусть $A = a \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, \alpha \in \mathbb{D}^*$. Тогда $\mathbf{r} = (0, u)$, $u \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\alpha y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha yu \\ 0 & yu \end{pmatrix}$, $y, u \in \mathbb{D}^*$, произведение yu может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $b \in \mathbb{D}^*$.

Аналогично, для $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b$, $b \in \mathbb{D}^*$, имеем $\mathbf{r} = (t, t\alpha)$, $t \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} xt & xt\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, t \in$

$\mathbb{D}^*$, произведение xt может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $a \in \mathbb{D}^*$. Таким образом, для любой матрицы $A \in V_{4,\alpha}$ имеем $O_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset V_{4,\alpha}$.

(e) *Множество* $V_{5,\alpha}$: Пусть $A = a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $0 \neq a, \alpha \in \mathbb{D}^*$. Тогда $\mathbf{r} = (t, 0)$, $t \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\alpha y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} -\alpha yt & 0 \\ yt & 0 \end{pmatrix}$, $y, t \in \mathbb{D}^*$, произведение yt может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $b \in \mathbb{D}^*$.
Аналогично, для $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$, $b \in \mathbb{D}^*$, имеем $\mathbf{r} = (t, t\alpha)$, $t \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ yt & yt\alpha \end{pmatrix}$, $y, t \in \mathbb{D}^*$, произведение yt может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $a \in \mathbb{D}^*$. Таким образом, для любой матрицы $A \in V_{4,\alpha}$ имеем $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset V_{4,\alpha}$.

(f) *Множество* $V_{6,\alpha,\beta}$: Пусть $A = \begin{pmatrix} -a\alpha & a \\ -\beta a\alpha & \beta a \end{pmatrix}$ $a, \alpha, \beta \in \mathbb{D}^*$. Тогда $\mathbf{r} = (-u\beta, u)$, $u \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{D}^*$. Откуда $B = \begin{pmatrix} -xu\beta & xu \\ -\alpha xu\beta & \alpha xu \end{pmatrix}$, $x, u \in \mathbb{D}^*$, произведение xu может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром $b \in \mathbb{D}^*$.
Аналогично, для $A = \begin{pmatrix} -b\beta & b \\ -\alpha b\beta & \alpha b \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{D}^*$ имеем $\mathbf{r} = (-u\alpha, u)$, $u \in \mathbb{D}^*$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x \\ \beta x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{D}^*$. Откуда

$$B = \begin{pmatrix} -xu\alpha & xu \\ -\beta xu\alpha & \beta xu \end{pmatrix}, \quad x, u \in \mathbb{D}^*,$$

произведение xu может принимать произвольное значение из $\mathbb{D}^*$, поэтому его можно заменить одним параметром

$a \in \mathbb{D}^*$. Таким образом, для любой матрицы $A \in V_{6,\alpha,\beta}$ имеем $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(A) \subset V_{6,\alpha,\beta}$.

(3) Докажем связность компонент V_i и вычислим их диаметры.

(a) Из расположения нулей в матрицах видно, что $V_{1a} \cap V_{1b} = \varnothing$, $V_{i,\alpha,a} \cap V_{i,\alpha,b} = \varnothing$, $i = 4, 5$. Равенство

$$\begin{pmatrix} -a\alpha & a \\ -\beta a\alpha & \beta a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\beta & b \\ -\alpha b\beta & \alpha b \end{pmatrix}$$

выполнено, если и только если $\beta = \alpha$ и $b = a$, поэтому для всех $\beta \in \mathbb{D}^* \setminus \{\alpha\}$ имеем $V_{6,\alpha,\beta,a} \cap V_{6,\alpha,\beta,b} = \varnothing$, но $V_{6,\alpha,\alpha,a} = V_{6,\alpha,\alpha,b}$.

Из доказанного в пункте 2 следует, что для любой компоненты

$$Y \in \{V_1, V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}, V_{6,\alpha,\beta} |\ \alpha, \beta \in \mathbb{D}^*\}$$

с разбиением $Y = Y_a \cup Y_b$ и любых вершин $C \in Y_a$, $D \in Y_b$ выполнены равенства $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(C) = Y_b$ и $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(D) = Y_a$. Таким образом, каждая компонента

$$Y \in \{V_1, V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}, V_{6,\alpha,\beta} |\ \alpha \in \mathbb{D}^*,\ \beta \in \mathbb{D}^* \setminus \{\alpha\}\}$$

является полным двудольным графом с долями Y_a и Y_b. Отметим, что диаметр любого полного двудольного графа, в котором не менее трех вершин, равен 2. В нашем случае по построению $|Y_a| = |Y_b| = |\mathbb{D}^*|$, следовательно, множества Y_a и Y_b бесконечны по теореме Веддербёрна (см., например, [11, теорема 3.1.1]).

Осталось рассмотреть компоненты $Y \in \{V_{6,\alpha,\alpha}, \alpha \in \mathbb{D}^*\}$. Выше мы доказали, что для любой вершины $C \in Y_a$ выполнено равенство $O^0_{M_2(\mathbb{D})}(C) = Y_b$. С другой стороны, $Y_a = Y_b = Y$, поэтому при каждой вершине графа $O(Y)$ есть петля, и без учёта петель граф Y является полным графом, следовательно, имеет диаметр 1.

(b) Компонента V_2 связна и имеет диаметр 1, поскольку для $i = 1, 2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$, $a_1 \neq a_2$ и $A_1 = a_1 E_{2,1}, A_2 = a_2 E_{2,1} \in V_2$ выполнено $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$. Также $A^2 = 0$ для любой матрицы $A \in V_2$. Поэтому граф V_2 является полным графом с петлями. Рассуждение для компоненты V_3 аналогично.

□

В силу теоремы Молина–Веддербёрна–Артина (см., например, [11, теорема 2.1.6]), основной результат можно переформулировать для простых артиновых колец:

Следствие 2.3. *Пусть R – простое артиново кольцо, n – мощность максимального множества попарно ортогональных ненулевых идемпотентов в R (можно также определить n как $\dim_{\mathbb{D}} V$, где $\mathbb{D} = \mathrm{End}_R V$, V – простой левый R-модуль).*

Тогда

1. *при $n = 1$ кольцо R – кольцо без делителей нуля и граф $O(R)$ пуст;*
2. *при $n = 2$ граф $O(R)$ несвязен, компоненты связности графа $O(R)$ имеют диаметры 1 и 2, если $|\mathbb{D}| > 2$, либо 0 и 1, если $\mathbb{D} = \mathbb{Z}_2$;*
3. *при $n \geqslant 3$ граф $O(R)$ связен и имеет диаметр 4.*

Литература

1. S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings.* — Linear Algebra Appl. **390** (2004), 345–355.
2. S. Akbari, A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **274** (2004), 847–855.
3. S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings.* — J. Algebra **296** (2006), 462–479.
4. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418** (2006), 161–176.
5. D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **217** (1999), 434–447.
6. Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, Наука, М., 1969.
7. Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 49–80.
8. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, *Ортогональная полнота и алгебраические системы.* — УМН **40**, No. 6 (1985), 79–115.
9. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, *Ортогональная полнота в теории колец.* — Итоги науки и техн., Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **4** (1993), 1–44.
10. Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
11. И. Н. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972.
12. А. Э. Гутерман, М. А. Ефимов, *Монотонные отображения матриц индекса* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 67–96.
13. P. G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections.* — J. Funct. Analysis **115** (1993), 184–189.
14. P. Šemrl, *Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 481–490.

Guterman A. E., Markova O. V. Orthogonality graphs of matrices over skew fields.

The paper is devoted to studying the orthogonality graph of the matrix ring over a skew field. It is shown that for $n \geqslant 3$ the orthogonality graph of the $n \times n$ matrix ring $M_n(\mathbb{D})$ over a skew field $\mathbb{D}$ is connected and has diameter 4 for an arbitrary skew field $\mathbb{D}$. If $n = 2$, then the graph of the ring $M_n(\mathbb{D})$ is a disjoint union of connected components of diameters 1 and 2. As a corollary, we obtain related results on the orthogonality graphs of simple Artinian rings.

МГУ имени М.В. Ломоносова,
механико-математический
факультет,
кафедра высшей алгебры,
119991, Москва, ГСП-1, Россия

E-mail: guterman@list.ru

E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 31 октября 2017 г.