Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

А. Гутерман, К. Мари, П. Штейнер

ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБРАТНЫМИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

§1. Введение

Пусть S обозначает полугруппу, а S^1 – моноид, порожденный S. Множество всех идемпотентов S мы обозначаем через $E(S)$, а множество всех подмножеств S – через $\mathcal{P}(S)$. Подробное изложение теории полугрупп можно найти в [15].

Существует фундаментальное отношение, которое можно определить на множестве идемпотентов S, если оно не пусто. Это хорошо известный естественный порядок (англ. natural partial order), см. [3, с. 23]. Пусть $e, f \in E(S)$;

$$e \leqslant f \text{ тогда и только тогда, когда } e = ef = fe\ . \qquad (1)$$

Естественная задача состоит в обобщении этого отношения на более широкий класс элементов при сохранении их взаимного расположения.

Хартвиг в [10] и, независимо от него, Намбурипад в [25] получили обобщение этого порядка на множество регулярных элементов полугруппы S.

Определение 1.1.

1. *Элемент $a \in S$ называется регулярным* (по фон Нейману) *в S, если $a \in aSa$.*

2. *Полугруппа S называется регулярной, если все ее элементы регулярны.*

Определение 1.2.

1. *Частное решение уравнения $axa = a$ называется* внутренней обратной *a и обозначается a^-.*

2. *Решение $xax = x$ называется* внешней обратной.

Ключевые слова: обобщенные обратные, отношения Грина, полугруппы, кольца.

Работа первого и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 16-11-10075.

3. *Внутренняя обратная, являющаяся также и внешней обратной, называется* рефлексивной обратной.

Множество всех внутренних (соотв. внешних, рефлексивных) обратных к a обозначается $a\{1\}$ (соотв. $a\{2\}$, $a\{1,2\}$).

Замечание 1.3. *Пусть $a \in S$ и $a^- \in a\{1\}$. Тогда aa^-, $a^-a \in E(S)$. Более того, $a^-aa^- \in a\{1,2\}$.*

В терминах рефлексивных обратных частичный порядок (1) был обобщен в [10] до, так называемого, *минус-порядка*, см. [25]:

Определение 1.4. *Пусть $a, b \in S$, тогда $a \overset{-}{\leqslant} b$, если:*

(i) *a регулярно;*
(ii) *существует $a^+ \in a\{1,2\}$ такое, что $a^+a = a^+b$ и $aa^+ = ba^+$.*

В [10, теорема 1] доказано, что это отношение на множестве регулярных элементов совпадает с предыдущим на множестве идемпотентов. Подробные сведения о свойствах этого порядка на полугруппах, моноидах и кольцах могут быть найдены в [4, 10, 25].

Явным преимуществом рассматриваемого частичного порядка в сравнении с остальными [1, 4, 8, 10, 13] является то, что его свойства сильно "улучшаются", если "улучшить" свойства алгебраической структуры, на которой он определен, в частности, заменить полугруппу S на моноид или кольцо, удовлетворяющее ряду условий. Например, в случае кольца матриц над комплексным полем, минус-порядок имеет множество различных эквивалентных характеризаций, в частности, Хартвиг в [10] рассмотрел бинарное отношение, называемое свойством вычитаемости ранга (англ. rank-subtractivity). Пусть $M_n(\mathbb{F})$ – множество всех $n \times n$ матриц над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Определение 1.5. *Пара матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ обладает свойством вычитаемости ранга, если*

$$\mathrm{rk}\,(B - A) = \mathrm{rk}\,B - \mathrm{rk}\,A. \tag{2}$$

Следует отметить, что равенство (2) эквивалентно неравенству

$$\mathrm{rk}\,(B - A) \leqslant \mathrm{rk}\,B - \mathrm{rk}\,A,$$

так как неравенство $\mathrm{rk}\,(B - A) \geqslant \mathrm{rk}\,B - \mathrm{rk}\,A$ выполнено для любых матриц A и B.

Рассматриваемое отношение задает частичный порядок на множестве матриц. В самом деле, очевидно, что оно рефлексивно и антисимметрично, и легко видеть, что оно транзитивно. Действительно, пусть пары (A, B) и (B, C) обладают свойством вычитаемости ранга, тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(C-A) &= \operatorname{rk}((B-A)+(C-B)) \leqslant \operatorname{rk}(B-A)+\operatorname{rk}(C-B)\\ &= \operatorname{rk}B-\operatorname{rk}A+\operatorname{rk}C-\operatorname{rk}B=\operatorname{rk}C-\operatorname{rk}A,\end{aligned}$$

то есть (A, C) также обладает свойством вычитаемости ранга.

В [10, теорема 3.2] было доказано, что свойство вычитаемости ранга эквивалентно минус-порядку на $M_n(\mathbb{F})$.

Существует множество частичных порядков на полугруппах, которые могут быть определены через обобщенные обратные элементы, так называемые, G-базируемые порядки (англ. G-based orders). Подробную информацию по этой теме можно найти в монографии [16].

В недавних работах [6, 17] были разработаны универсальные подходы к исследованию внешних обобщенных обратных, в частности, исследовались обратные по направлению, то есть обобщенные обратные матрицы, зависящие от некоторого параметра. Полезным свойством таких обратных является то, что известные виды обобщенных обратных являются частными случаями обратных по направлению для специального выбора направлений (параметров), например, групповая обратная, обратная Дрейзина и обратная Мура–Пенроуза. Более подробное изложение определений и примеров будет приведено в §2.

Основная цель нашей статьи – ввести на полугруппах новое семейство частичных порядков, порожденных обратными по направлению, и исследовать его алгебраические свойства. Оказывается, что такой подход приводит к единообразной теории частичных порядков на полугруппах, а известные полугрупповые порядки могут быть получены как частные случаи нового семейства. Частичный порядок – это рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение. Для того чтобы упростить запись, примем в этой статье следующее соглашение: под частичным порядком мы всегда понимаем антисимметричное и транзитивное отношение, то есть не требуем рефлексивности. Если рефлексивность требуется, то всегда можно рассмотреть рефлексивное замыкание $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup (a; a)$ отношения $\mathcal{K}$.

Наша статья построена следующим образом. §2 содержит основные определения и обозначения теории обобщенных обратных. В §3 мы рассматриваем частичные порядки, порожденные внутренними обратными и обратными по направлению, в частности, раздел 3.1 посвящен естественному порядку. В разделе 3.2 даны наиболее общие отношения. В разделе 3.3 исследуется вопрос транзитивности введенных отношений, а в разделе 3.4 приведенные порядки сравниваются с групповым порядком и порядком Дрейзина.

§2. Определения и обозначения

Определения групповой обратной, обратной Дрейзина и Мура–Пенроуза стандартны и могут быть найдены в литературе (например, см. [2, 5, 11]). Приведем их здесь для полноты.

Определение 2.1. *Пусть $a \in S$.*

(1) *Элемент a имеет групповую обратную $a^{\#}$, если существует элемент $a^{\#} \in a\{1,2\}$, коммутирующий с a.*
(2) *Элемент a имеет обратную Дрейзина a^D, если a^n, некоторая положительная степень a, имеет групповую обратную и $a^D = (a^{n+1})^{\#} a^n$ (см. также [24] об эквивалентности других определений).*
(3) *Если $*$ – инволюция в S, то a имеет обратную Мура–Пенроуза $a^{\dagger}$, если существует элемент $a^{\dagger} \in a\{1,2\}$ такой, что $aa^{\dagger}$ и $a^{\dagger}a$ симметричны по отношению к $*$.*

Обратные по направлению были введены в [17], см. также [6]. Мы напомним определение и основные свойства этих обратных. Заметим, что в нашей статье эта новая обратная обозначается a^{-d} вместо $a^{\| d}$, обобщая случай $d = 1$.

Определение 2.2 ([17, определение 4])**.** *Пусть $a, d \in S$, тогда a обратима вдоль d, если существует $b \in S$ такое, что $bad = d = dab$ и $b \in dS^1 \cap S^1 d$. Если такой элемент b существует, то он единственен (см. [17, теорема 6]) и обозначается a^{-d}.*

Существует эквивалентная характеризация:

Лемма 2.3 ([17, лемма 3])**.** *Элемент $a \in S$ обратим вдоль $d \in S$ тогда и только тогда, когда существует $b \in S$ такое, что $bab = b$, $bS^1 = dS^1$ и $S^1 b = S^1 d$. В этом случае $a^{-d} = b$.*

Обратная по направлению – это внешняя обратная. Она удовлетворяет равенствам

$$a^{-d} = d(ad)^{\#} = (da)^{\#} d$$

и принадлежит бикоммутанту $\{a, d\}$, см. [17, теорема 10]. Она существует тогда и только тогда, когда $d \in dadS^1 \cap S^1dad$, подробнее, см. в [18].

При специальном выборе d мы получаем классические обобщенные обратные:

Лемма 2.4 ([17, теорема 11]). *1. $a^{\#} = a^{-a}$,*

2. $a^{\dagger} = a^{-a^*}$,

3. $a^D = a^{-a^n}$ для некоторого n.

§3. Частичные порядки, порожденные внешними обратными и обратными по направлению

3.1. Естественный порядок. Естественный порядок на регулярных полугруппах был определен независимо Хартвигом [10] и Намбурипадом [25] в 1980. Он был обобщен Митчем на нерегулярные полугруппы в [19]. Естественный порядок определяется следующим образом:

Определение 3.1. *Пусть S – полугруппа, $a, b \in S$.*

1. Если S регулярна, то $a\omega b$ тогда и только тогда, когда существуют $e, f \in E(S)$ такие, что $a = eb = bf$.

2. Если S не регулярна, то $a\omega b$ тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in S^1$ такие, что $a = xb = by,\ xa = a$.

В случае идемпотентов это отношение сводится к $e\omega f \Leftrightarrow ef = fe = e$.

Приведем некоторые эквивалентные характеризации естественного порядка.

Лемма 3.2. *Пусь $a, b \in S$, причем a регулярен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$a = eb = bf$ для некоторых $e, f \in E(S)$;*
(2) *$a\mathcal{N}b$, а именно $a = axb = bxa = axa$ для некоторго $x \in S$;*
(3) *$a = bb^{=}b$ для некоторого $b^{=} \in b\{2\}$;*
(4) *$a = ab^{=}a = ab^{=}b = bb^{=}a$ для некоторого $b^{=} \in b\{2\}$;*
(5) *$a <^{-} b$ (так называемый минус-порядок), то есть $aa^{-} = ba^{-}$ и $a^{-}a = a^{-}b$ для некоторого $a^{-} \in a\{1\}$.*

Если, более того, b регулярно, то следующее утверждение эквивалентно предыдущим.

(6) *$a = axb = bxa,\ a = axa,\ b = bxb$ для некоторого $x \in S$.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ 2. Пусть $a = eb = bf$ для некоторых $e, f \in E(S)$. Так как a регулярно, существует некоторый элемент $a^- \in a\{1\}$. Положим
$$x = fa^-aa^-e.$$
Тогда
$$axa = (a)fa^-aa^-ea = (bffa^-a)a^-ea = aa^-(ea) = aa^-a = a.$$
Более того, $axb = (afa^-a)a^-eb = aa^-eb = a$ и, аналогично, $bxa = a$

2. $\Rightarrow$ 3. Пусть $x \in S$, $a = axa = axb = bxa$ и положим $b^= = xax$. Тогда
$$b^=bb^= = (xax)b(xax) = xaxax = xax = b^=$$
и $b^= \in b\{2\}$. Кроме того, $bb^=b = bxaxb = axb = a$.

3. $\Rightarrow$ 4. Пусть $b^= \in b\{2\}$ такое, что $a = bb^=b$. Поскольку $b^=bb^= = b^=$, то
$$ab^=a = (bb^=b)b^=(bb^=b) = bb^=b = a.$$
Кроме того, $ab^=b = (bb^=b)b^=b = bb^=b = a$ и, аналогично,
$$bb^=a = a.$$

4. $\Rightarrow$ 5. Пусть $b^= \in b\{2\}$ такое, что $a = ab^=a = ab^=b = bb^=a$. Тогда $b^=ab^= \in a\{1\}$,
$$a(b^=ab^=) = bb^=ab^=ab^= = b(b^=ab^=) \text{ и, аналогично, } (b^=ab^=)a = (b^=ab^=)b.$$

5. $\Rightarrow$ 1. Пусть $a \in a\{1\}$ такое, что $aa^- = ba^-$ и $a^-a = a^-b$. Тогда aa^-, $a^-a \in E(S)$.
Значит, $a = aa^-a = (aa^-)b = b(a^-a)$.

Теперь предположим, что элемент b регулярен. Тогда импликация 6. $\Rightarrow$ 2. тривиальна. Докажем, что 5. $\Rightarrow$ 6. Допустим, что $aa^- = ba^-$ и $a^-a = a^-b$. Тогда $a = aa^-b = ba^-a$. Поскольку b регулярен, существует некоторый $b^- \in b\{1\}$. Положим $x = b^-$. Тогда $b = bxb$ и
$$axa = ab^-a = aa^-bb^-ba^-a = aa^-ba^-a = aa^-aa^-a = a.$$
Более того, $axb = aa^-bbb^-b = aa^-b = a$ и, аналогично, $abx = a$. □

В [19] можно найти различные способы определить естественный порядок (на регулярных полугруппах) в терминах внутренних и рефлексивных обратных.

Отношения порядка, более сильные, чем минус-порядок и порожденные различными способами с помощью внутренних обратных, широко изучались (см. [14, 20–23, 27, 28]). Исследование же частичных порядков, порожденных внешними обратными (в смысле определения 1.2) началось относительно недавно и восходит к работе Митры и Хартвига [21]. В этой статье $\Theta : S \to \mathcal{P}(S)$ обозначает (многозначную) функцию. Мы будем рассматривать случай, изученный в [21], где Θ переводит элемент в (возможно пустое) подмножество его внешних обратных: $\Theta(x) \subseteq x\{2\}$ для любого $x \in S$. Митра и Хартвиг определили отношение $<^{\Theta}$ следующим образом.

Определение 3.3 ([21])**.** *Для $a, b \in S$, $a <^{\Theta} b$ означает, что существует такая внешняя обратная $b^{=}$ к b, что $b^{=} \in \Theta(b)$ и $a = bb^{=}b$.*

В [21, лемма 6] доказано, что на регулярных полугруппах любой частичный порядок, более сильный, чем минус порядок, можно представить в таком виде при выборе соответствующей функции Θ. Два основных недостатка такого определения состоят в следующем:

- если $a <^{\Theta} b$, то a регулярно, то есть, это отношение не подходит для сравнения нерегулярных элементов;
- В общем случае, $<^{\Theta}$ не является частичным порядком, как показывает следующий пример.

Пример 3.4. *Пусть $S = \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_2)$, положим* $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Пусть Θ – такое отображение, что $\Theta(c) = \{\delta\}$, а $\Theta(b) = \{d\}$. Тогда легко проверить, что $\delta c \delta = \delta$ и $dbd = d$. Поскольку $b = c\delta c$ и $a = bdb$, то $a <^{\Theta} b$ и $b <^{\Theta} c$. Но $a \neq c\delta c$, а следовательно, $a \not<^{\Theta} c$.*

Таким образом, мы проведем похожие рассуждения для отношения $\mathcal{N}$, определенного в лемме 3.2, и рассмотрим отдельно нерегулярный случай. Затем мы изучим вопрос транзитивности для порядков, заданных обратными по направлению. Мы также докажем, что $<^{\Theta}$ совпадает с групповым порядком или порядком Дрейзина для некоторых простых случаев Θ. В заключение также рассматриваются свойства отношения $\mathcal{N}^{\Theta}$, в частности, различные случаи экстремальных элементов.

3.2. Определения и основные свойства. Следуя тем же рассуждениям, что и в [21], предположим, что $\Theta : S \to \mathcal{P}(S)$ – (многозначная) функция со значениями во множестве внешних обратных, $\Theta(a) \subseteq a\{2\}(\forall a \in S)$, определим отношение $\mathcal{N}^{\Theta}$, заменив в определении произвольный x на элементы $\Theta(b)$.

Определение 3.5. *Пусть $a, b \in S$. Тогда $a\mathcal{N}^{\Theta}b$, если существует такой $b^{=} \in \Theta(b)$, что $a = ab^{=}a = ab^{=}b = bb^{=}a$.*

Если $a, b \in S$, то, по определению, из $a\mathcal{N}^{\Theta}b$ следует, что a – регулярный элемент. Чтобы сравнивать нерегулярные элементы, определим отношения Γ^{Θ}, Γ^{Θ}_{l}, Γ^{Θ}_{r}, и $\Gamma^{\Theta}_{\mathcal{P}}$ следующим образом:

Определение 3.6. *Пусть $a, b \in S$.*

(1) *$a\Gamma^{\Theta}b$, если существуют $b^{=}_{l}, b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такие, что $a = ab^{=}_{l}b = bb^{=}_{r}a$ и $b\{1\} \subseteq a\{1\}$.*
(2) *Если b нерегулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{l}b$, если существует $b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такое, что $a = ab^{=}_{r}b$.*
(3) *Если b регулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{l}b$, если существуют $b^{=}_{l}, b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такие, что $a = ab^{=}_{l}a = ab^{=}_{l}b = bb^{=}_{r}a$.*
(4) *Если b нерегулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{r}b$, если существует $b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такое, что $a = bb^{=}_{r}a$.*
(5) *Если b регулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{r}b$, если существуют $b^{=}_{l}, b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такие, что $a = ab^{=}_{r}a = ab^{=}_{l}b = bb^{=}_{r}a$.*
(6) *Если b нерегулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{\mathcal{P}}b$, если существует $b^{=} \in \Theta(b)$ такое, что $a = ab^{=}b = bb^{=}a$.*
(7) *Если b регулярно, то $a\Gamma^{\Theta}_{\mathcal{P}}b$, если существует $b^{=} \in \Theta(b)$ такое, что $a = ab^{=}a = ab^{=}b = bb^{=}a$.*

Оказывается, что Γ^{Θ} – это пересечение Γ^{Θ}_{l} и Γ^{Θ}_{r}.

Лемма 3.7. $\Gamma^{\Theta} = \Gamma^{\Theta}_{l} \cap \Gamma^{\Theta}_{r}$.

Доказательство. В первую очередь, докажем, что $\Gamma^{\Theta}_{l} \cap \Gamma^{\Theta}_{r} \subseteq \Gamma^{\Theta}$. Нам достаточно проверить, что $b\{1\} \subseteq a\{1\}$. Если b нерегулярно, то это очевидно. Если b регулярно, то, по определению, найдутся $b^{=}_{l}, b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такие, что $a = ab^{=}_{l}a = ab^{=}_{l}b = bb^{=}_{r}a$. Пусть $b^{-} \in b\{1\}$. Тогда $ab^{-}a = ab^{=}_{l}bb^{-}bb^{=}_{r}a = ab^{=}_{l}bb^{=}_{r}a = ab^{=}_{l}a = a$. Из этого следует, что $b\{1\} \subseteq a\{1\}$.

Рассмотрим теперь обратное вложение. Пусть $a, b \in S$ таковы, что $a\Gamma^{\Theta}b$. Это значит, что существуют $b^{=}_{l}$, $b^{=}_{r} \in \Theta(b)$ такие, что

$a = ab_l^{=} b = bb_r^{=} a$ и $b\{1\} \subseteq a\{1\}$. Если b нерегулярно, то $a\Gamma_l^{\Theta} b$ и $a\Gamma_r^{\Theta} b$ по определению. Предположим, что b регулярно. Тогда существует $b^- \in b\{1\} \subseteq a\{1\}$, удовлетворяющее равенству $a = ab^- a$. Следовательно, $ab_l^{=} a = ab_l^{=} bb_r^{=} a = ab_l^{=} bb^- bb_r^{=} a = ab^- a = a$ и, аналогично, $ab_r^{=} a = a$. Наконец, $a\Gamma_l^{\Theta} b$ и $a\Gamma_r^{\Theta} b$. □

Как следствие, всегда верно, что

$$\mathcal{N}^{\Theta} \subseteq \Gamma_{\mathcal{P}}^{\Theta} \subseteq \Gamma_l^{\Theta} \cap \Gamma_r^{\Theta} = \Gamma^{\Theta}.$$

Особый интерес для нас будут представлять такие функции Θ:

- $\Theta : b \mapsto b\{2\}$. В этом случае $\mathcal{N}^{\Theta} = \mathcal{N} = <^{\Theta}$ (лемма 3.2).
- $\Theta^{\#} : b \mapsto \{b^{\#}\}$, групповая обратная к b, или $\Theta^{D} : b \mapsto \{b^{D}\}$, обратная Дрейзина к b.
- Пусть $\Delta : S \to \mathcal{P}(S)$. Положим $\Theta_{\Delta} : b \mapsto \{b^{-d} | d \in \Delta(b)\}$. Здесь при $b \in S$, в общем случае, $\Delta(b)$ не является подмножеством $b\{2\}$, но $\Theta_{\Delta}(b)$ является. Чтобы упростить обозначения, обозначим такое отношение через $<^{-\Delta}$ (соотв. $\mathcal{N}^{-\Delta}$, $\Gamma^{-\Delta}$, $\Gamma_l^{-\Delta}$, $\Gamma_r^{-\Delta}$, $\Gamma_{\mathcal{P}}^{-\Delta}$), вместо $<^{\Theta_\Delta}$ (соотв. $\mathcal{N}^{\Theta_\Delta}$, Γ^{Θ_Δ}, $\Gamma_l^{\Theta_\Delta}$, $\Gamma_r^{\Theta_\Delta}$, $\Gamma_{\mathcal{P}}^{\Theta_\Delta}$). Например, если $\Delta^{\#}$ таково, что $\Delta^{\#}(b) = b$ для каждого $b \in S$, то $\Theta_{\Delta^{\#}} = \Theta^{\#}$.

Проиллюстрируем эти понятия.

Пример 3.8. *Пусть $S = T_3$ – полугруппа, состоящая из всех (не только биективных) отображений множества $\{1,2,3\}$ в себя с операцией композиции. Обозначаем за (mnk) функцию, переводящую 1 в m, 2 в n, а 3 в k.*

Пусть $a = (333), b = (131)$. Тогда существует $b' = (222)$ такое, что $a = ab'b = bb'a = ab'a$, то есть $a\Gamma_{\mathcal{P}} b$. Пусть $\Delta : S \to \mathcal{P}(S)$ таково, что $\Delta(b) = \{x = (111), y = (333)\}$. Очевидно, что x и y – внешние обратные к b. Следовательно, $b^{-x} = x$, а $b^{-y} = y$. Но $bb^{-x}a = (131)(111)(333) = (131)(111) = (111) \neq a$ и $bb^{-y}a = (131)(333)(333) = (131)(333) = (111)$. В итоге, не существует $d \in \Delta(b)$ такого, что $a = bb^{-d}a$. Следовательно, $a \cancel{\Gamma_l^{-\Delta}} b$.

Лемма 3.9. *Пусть $a, b \in S$ таковы, что $a <^{\Theta} b$ для некоторого Θ. Тогда $b\{1\} \subseteq a\{1\}$.*

Доказательство. Пусть $a <^{\Theta} b$, а $b^- \in b\{1\}$. Тогда существует такое $b^{=} \in b\{2\}$, что $a = bb^{=}b$. Следовательно, $ab^- a = bb^{=}bb^- bb^{=}b = bb^{=}bb^{=}b = bb^{=}b = a$ и, таким образом, $b\{1\} \subseteq a\{1\}$. □

Лемма 3.10. *Пусть* $\Delta = \Theta$. *Тогда* $<^{-\Delta} = <^{\Theta}$ (*соотв.* $\mathcal{N}^{-\Delta} = \mathcal{N}^{\Theta}$, $\Gamma^{-\Delta} = \Gamma^{\Theta}$, $\Gamma_l^{-\Delta} = \Gamma_l^{\Theta}$, $\Gamma_r^{-\Delta} = \Gamma_r^{\Theta}$ *и* $\Gamma_{\mathcal{P}}^{-\Delta} = \Gamma_{\mathcal{P}}^{\Theta}$).

Доказательство. Докажем, что $<^{-\Delta} = <^{\Theta}$, остальные случаи разбираются аналогично. Если $a <^{-\Delta} b$, то существует такое $d \in \Delta(b)$, что $a = bb^{-d}b$. Но $b^{-d} = d$, поскольку $d \in \Delta(b) \subseteq b\{2\}$ – внешняя обратная к b. Следовательно, $a = bdb$, где $d \in \Delta(b) = \Theta(b)$, и $a <^{\Theta} b$.

Если $a <^{\Theta} b$, рассмотрим $d = b^{-d} = b^{=}$ (здесь $b^{=} \in b\{2\}$ из определения 3.3). □

Следующая лемма – простое следствие определений.

Лемма 3.11. *Пусть* $a, b \in S$ *и* $b^{=} \in b\{2\}$ *таково, что* $a = bb^{=}b$. *Тогда*

(1) $a = ab^{=}a = ab^{=}b = bb^{=}a$;

(2) *Если, к тому же,* b *обратимо вдоль* d *и* $a = bb^{-d}b$, *то* a *обратимо вдоль* d, *причем* $a^{-d} = b^{-d}$, *а* a^{-d} – *рефлексивная обратная к* a.

Доказательство. 1. Предположим, что $a = bb^{=}b$. Поскольку $b^{=}bb^{=} = b^{=}$, то $ab^{=}b = bb^{=}bb^{=}b = bb^{=}b = a$. Аналогично, $bb^{=}a = a$. Кроме того, $ab^{=}a = bb^{=}bb^{=}bb^{=}b = bb^{=}b = a$.

2. Теперь предположим, что $a = bb^{-d}b$.По лемме 2.3, $b^{-d}bb^{-d} = b^{-d}$, $b^{-d}S^1 = dS^1$ и $S^1b^{-d} = S^1d$, и нам достаточно доказать, что $b^{-d}ab^{-d} = b^{-d}$. Действительно, $b^{-d}ab^{-d} = b^{-d}bb^{-d}bb^{-d} = b^{-d}bb^{-d} = b^{-d}$. Итак, a обратимо вдоль d, и эта обратная равна b^{-d}, причем, она является внешней обратной к a. Кроме того, $ab^{-d}a = a$ по пункту 1. Тогда b^{-d} – рефлексивная обратная к a. □

Пример 3.12. *Покажем, что выражения* $ab^{-d}b$, $bb^{-d}a$, $ab^{-d}a$ *и* $bb^{-d}b$ *могут быть различными элементами* S. *Пусть* $\mathbb{F}$ – *произвольное поле,* $S = M_3(\mathbb{F})$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$. *Тогда* $dbd = d$, *то есть* b *обратимо вдоль* d. *В этом случае,* $ab^{-d}b = c$, $bb^{-d}a = a$, $ab^{-d}a = d$, *а* $bb^{-d}b = b$.

Следствие 3.13. $<^{\Theta} \subseteq \mathcal{N}^{\Theta}$.

В общем случае, как показывает следующий пример, из $a\mathcal{N}^{\Theta}b$ не следует $a <^{\Theta} b$.

Пример 3.14. *Пусть* $S = \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_2)$. *Рассмотрим*

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и отображение Δ *такое, что* $\Delta(b) = \{d\}$. *Тогда легко проверить, что*

(1) b *обратимо вдоль* d *с обратной* $b^{-d} = d$;
(2) $a = ab^{-d}b = bb^{-d}a = ab^{-d}a$;
(3) $a \neq bb^{-d}b$.

Наконец, $a\mathcal{N}^{-\Delta}b$, *и* $a \not< ^{-\Delta} b$.

Теорема 3.15. *Отношения* $\mathcal{N}^{\Theta}$, Γ_l^{Θ}, Γ_r^{Θ}, $\Gamma_{\mathcal{P}}^{\Theta}$ *и* Γ^{Θ} *являются частичными порядками.*

Доказательство. Антисимметричность следует из включений $\mathcal{N}^{\Theta} \subseteq \Gamma_{\mathcal{P}}^{\Theta} \subseteq \Gamma_l^{\Theta} \subseteq \Gamma_l$, аналогичных включений для Γ_r и из того факта, что Γ_l и Γ_r антисимметричны. Докажем транзитивность $\mathcal{N}^{\Theta}$. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $a\mathcal{N}^{\Theta}b\mathcal{N}^{\Theta}c$. Тогда существуют $x \in \Theta(b)$, $s \in \Theta(c)$ такие, что $a = axa = axb = bxa$ и $b = bsb = bsc = csb$. Тогда $a = axb = axbsc = asc$. Аналогично, $a = csa$. Кроме того, $a = axa = axbxa = axbsbxa = asa$. Транзитивность остальных отношений доказывается аналогично. □

Следующая теорема дает эквивалентную характеризацию отношения $<^{\Theta}$ в так называемой G-базируемой форме (см. [22]) и в виде отношения $\mathcal{N}^{\Theta}$ с дополнительными условиями.

Теорема 3.16. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $a <^{\Theta} b$.
(2) *Существует* $b^{=} \in \Theta(b) \cap a\{2\}$ *такое, что*

$$a = ab^{=}b = bb^{=}a = ab^{=}a.$$

(3) *Существует* $a^{+} \in \Theta(b) \cap a\{1,2\}$ *такое, что*
- $aa^{+} = ba^{+}$;
- $a^{+}a = a^{+}b$.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ 2. по лемме 3.11.

2. $\Rightarrow$ 3. Предположим, что существует $b^= \in \Theta(b) \cap a\{2\}$ такое, что $a = ab^=b = bb^=a = ab^=a$. Положим $a^+ = b^=$. Тогда $aa^+ = ba^+aa^+ = ba^+$ и, аналогично, $a^+a = a^+b$.

3. $\Rightarrow$ 1. Теперь пусть $aa^+ = ba^+$ и $a^+a = a^+b$ для некоторого $a^+ \in \Theta(b) \cap a\{1,2\}$. Тогда $a^+ \in b\{2\}$, поскольку $a^+ba^+ = a^+aa^+ = a^+$. Итак, $(ba^+)b = a(a^+b) = aa^+a = a$, а $a^+ \in \Theta(b)$.

$\square$

Наконец, рассмотрим возможность домножения на обратимые элементы.

Лемма 3.17. *Пусть $b^= = b^=bb^=$. Тогда для любого обратимого $p \in S$ верно, что*

(1) $(p^{-1}b^=) = (p^{-1}b^=)(bp)(p^{-1}b^=)$, *то есть* $p^{-1}b^= \in (bp)\{2\}$;
(2) $(b^=p^{-1}) = (b^=p^{-1})(pb)(b^=p^{-1})$, *то есть* $b^=p^{-1} \in (pb)\{2\}$.

Лемма 3.18. *Пусть $a, b, p \in S$ и элемент p обратим.*
Если $p^{-1}\Theta(b) \subseteq \Theta(bp)$, то $a <^\Theta b \Rightarrow ap <^\Theta bp$.
В частности, если $\Theta(x) = x\{2\}$ для всех $x \in S$, то следующие утверждения эквивалентны:

(1) $a <^\Theta b$;
(2) $ap <^\Theta bp$;
(3) $pa <^\Theta pb$.

Доказательство. Пусть $a <^\Theta b$. Тогда, по определению, $a = bb^=b$ для некоторого $b^= = b^=bb^= \in \Theta(b)$. В силу леммы 3.17, $(p^{-1}b^=) = (p^{-1}b^=)(bp)(p^{-1}b^=)$, а $(p^{-1}b^=) \in \Theta(bp)$ по предположению. Поскольку $(ap) = (bp)(p^{-1}b^=)(bp)$, то $ap <^\Theta bp$.

Эквивалентность следует из равенства $xpp^{-1} = x = p^{-1}px$ для всех $x \in S$ и леммы 3.17. Напомним, что в этом случае $<^\Theta$ совпадает с минус-порядком.

Эквивалентность 1. и 3. доказывается аналогично. $\square$

Следствие 3.19. *Таким же образом доказывается, что если*

$$\Theta(b)p^{-1} \subseteq \Theta(pb),$$

то $a <^\Theta b \Rightarrow pa <^\Theta pb$.

Следствие 3.20. *Аналогичные утверждения верны для $\mathcal{N}^\Theta$.*

3.3. Транзитивность $<^{-\Delta}$. В [21] был рассмотрен вопрос транзитивности $<^{\Theta}$. Мы рассмотрим случай, когда

$$\Theta(b) = \Theta_{\Delta}(b) = \{b^{-d} | d \in \Delta(b)\}.$$

Предложение 3.21. *Предположим, что для любых $b, c, d, \delta \in S$, удовлетворяющих условиям*

1. *b обратимо вдоль $d \in \Delta(b)$,*
2. *c обратимо вдоль $\delta \in \Delta(c)$,*
3. *$b < c$, причем $b = cc^{-\delta}c$,*

верно, что $(c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta})S^1 = \delta S^1$ и $S^1(c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}) = S^1\delta$.

Тогда $<^{-\Delta}$ транзитивно.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $a <^{-\Delta} b$ и $b <^{-\Delta} c$. Тогда существует $d \in \Delta(b)$ такое, что b обратимо вдоль d и $a = bb^{-d}b$. Предположим, что существует $\delta \in \Delta(c)$ такое, что c обратимо вдоль δ и $b = cc^{-\delta}c$.

Рассмотрим $x = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}$, тогда $cxc = bb^{-d}b = a$ и

$$xcx = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta} = c^{-\delta}cb^{-d}bb^{-d}cc^{-\delta} = x.$$

Из этого следует, что x – внешняя обратная к c и, в частности, $x = c^{-x}$. Поскольку $xS^1 = \delta S^1$ и $s^1\delta = S^1x$, то $c^{-x} = c^{-\delta}$ по лемме 2.3. Следовательно, существует $\delta \in \Delta(c)$ такое, что $a = cc^{-\delta}c$. В итоге, $a <^{-\Delta} c$. □

Следствие 3.22. *Предположим, что $\Delta : S \to \mathcal{P}(S)$ – постоянная функция ($\Delta(x) = \Delta_0$ для некоторого фиксированного $\Delta_0 \subseteq S$) такая, что выполнено одно из следующих условий условий:*

- *$\Delta_0 = \delta_0 S^1, S^1\delta_0, S^1\delta_0 S^1$ или $\delta_0 S^1 \cap S^1\delta_0$ для некоторого элемента $\delta_0 \in S$ (Δ_0 – главный правый, главный левый, главный двусторонний идеал или пересечение левого и правого главных идеалов, порожденных δ_0).*
- *Если $c \in \Delta_0$, то $d \in \Delta_0 \Leftrightarrow cS^1 = dS^1$ (Δ_0 – R-класс отношения Грина R ([9], [15, глава 2])).*
- *Если $c \in \Delta_0$, то $d \in \Delta_0 \Leftrightarrow S^1c = S^1d$ (Δ_0 – L-класс отношения Грина L).*
- *Если $c \in \Delta_0$, то $d \in \Delta_0 \Leftrightarrow cS^1 = dS^1$ и $S^1c = S^1d$ (Δ_0 – H-класс отношения Грина H).*

Тогда $<^{-\Delta}$ – частичный порядок.

Доказательство. Предположим, что $a, b, c \in S$ таковы, что $a <^{-\Delta} b$ и $b <^{-\Delta} c$. Тогда существует элемент $d \in \Delta_0$ такой, что b обратимо вдоль d, а $a = bb^{-d}b$ и существует элемент $\delta \in \Delta_0$ такой, что c обратим вдоль δ, а $b = cc^{-\delta}c$.

Положим $x = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}$. Тогда $cxc = bb^{-d}b = a$ и

$$xcx = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta} = c^{-\delta}cb^{-d}bb^{-d}cc^{-\delta} = x.$$

Следовательно, x – внешняя обратная к c и, в частности, $x = c^{-x}$. Кроме того, $a = cc^{-x}c$.

Итак, мы всего лишь должны проверить, что в каждом случае $x \in \Delta_0$.

- Сначала рассмотрим случай правого главного идеала $\Delta_0 = \delta_0 S^1$. Поскольку $x = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}$ и $c^{-\delta} \in \delta_0 S^1$, то $x \in \delta_0 S^1 = \Delta_0$. Доказательства для других идеалов аналогичны.
- Пусть Δ_0 – R-класс. Поскольку $d, \delta \in \Delta_0$ то, по определению обратной по направлению, имеем $c^{-\delta}S^1 = \delta S^1 = dS^1 = b^{-d}S^1$. Рассмотрим произведение xcb^{-d}: $c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}cb^{-d} = c^{-\delta}cb^{-d}$. Поскольку $b^{-d}S^1 = c^{-\delta}S^1$, существует y такой, что $c^{-\delta} = b^{-d}y$. Итак, $x(cb^{-d}y) = c^{-\delta}$. Но $x = c^{-\delta}(cb^{-d}cc^{-\delta})$. В итоге, существуют $s, t \in S^1$ такие, что $x = c^{-\delta}s$, а $c^{-\delta} = xt$, то есть $c^{-\delta}S^1 = xS^1$, а значит, $x \in \Delta_0$

  Доказательство для L-класса аналогично, а утверждение для отношения Грина H следует из того, что $H = L \cap R$.

□

Заметим, что в случае постоянной функции с одним значением транзитивность выполнена, но тривиальна.

Лемма 3.23. *Пусть $\delta \in S$ и определим $\delta : S \to \mathcal{P}(S)$ следующим образом: $\delta(x) = \{\delta\}$. Предположим, что $a, b, c \in S$ таковы, что $a <^{-\delta} b$ и $b <^{-\delta} c$. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Поскольку $b <^{-\delta} c$, то b, c обратимы вдоль δ и $a = bb^{-\delta}b$, а $b = cc^{-\delta}c$. По лемме 3.11, $c^{-\delta} = b^{-\delta}$ – рефлексивная обратная к b. В итоге, $a = bb^{-\delta}b = b$. □

В некоторых других случаях транзитивность также тривиальна.

Предложение 3.24. *Определим $\Theta^D : S \to \mathcal{P}(S)$ следующим образом: $\Theta^D(x) = \{x^D\}$ – обратная Дрейзина к x и пусть $a, b, c \in S$ таковы, что $a <^{\Theta^D} b$ и $b <^{\Theta^D} c$. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Поскольку $b <^{\Theta^D} c$, то c имеет обратную Дрейзина, и элемент $b = cc^D c$ регулярен с рефлексивной обратной c^D, коммутирующей с b, следовательно b имеет групповую обратную. Поскольку $a <^{\Theta^D} b$, то $a = bb^D b$. Но так как b имеет групповую обратную, то $b^D = b^{\#}$, а следовательно, $a = bb^{\#} b = b$. $\square$

Это утверждение выполнено и для $\Theta^{\#} : x \mapsto \{x^{\#}\}$, поскольку групповая обратная является частным случаем обратной Дрейзина. Более того, если $\Theta(b) \subseteq b\{1\}$, то $a <^{\Theta} b$ влечет $a = b$.

3.4. Сравнение с групповым порядком и порядком Дрейзина. Будем рассматривать специальные неконстантные функции. Напомним, что $C(x)$ обозначает централизатор элемента x, то есть все элементы, коммутирующие с X, а $CC(x) = C(C(x))$ – двойной централизатор.

Предложение 3.25. *Пусть $\Delta : S \to \mathcal{P}(S)$ отображает любой элемент x в подмножество его централизатора, то есть $\Delta(x) \subset C(x)$. Тогда из $a <^{-\Delta} b$ следует, что $ab = ba$.*

Доказательство. По определению, существует такое $d \in \Delta(b)$, что b обратимо вдоль d и $a = bb^{-d} b$. Из последнего равенства следует, что $db = bd$. Поскольку $b^{-d} \in CC(\{b, d\})$, то $bb^{-d} = b^{-d} b$. В итоге, $ab = bb^{-d} bb = bbb^{-d} b = ba$. $\square$

Групповой порядок был определен в [20] следующим образом: $a <^{\#} b$ тогда и только тогда, когда $aa^{\#} = ba^{\#} = a^{\#} b$. На вполне регулярных полугруппах, то есть полугруппах, в которых каждый элемент имеет групповую обратную, он совпадает с отношением, определенным Дрейзиным в [7]: $a\mathcal{S}b$ тогда и только тогда, когда $a^2 = ba = ab$. В последнем можно легко убедиться, домножив слева и справа на a^2 или на $(a^{\#})^2$.

Следствие 3.26. *Пусть $C : b \mapsto C(b)$. Тогда $<^{-C}$ – групповой порядок.*

Доказательство. Пусть $a <^{-C} b$. Тогда существует такой элемент $d \in C(b)$, что $a = bb^{-d} b$. По лемме 3.11, b^{-d} – внутренняя и внешняя обратная к a. Поскольку b и d коммутируют, они принадлежат

$C(\{b,d\})$, следовательно, они коммутируют с b^{-d}. Из последнего следует, что $a = bb^{-d}b$ коммутирует с b^{-d}, то есть a имеет групповую обратную $a^{\#} = b^{-d}$. Тогда $aa^{\#} = bb^{-d}bb^{-d} = bb^{-d} = ba^{\#}$ и $a^{\#}a = b^{-d}bb^{-d}b = b^{-d}b = a^{\#}b$, следовательно, $a <^{\#} b$.
Обратно, предположим, что $a <^{\#} b$, то есть $aa^{\#} = ba^{\#}$ и $a^{\#}a = a^{\#}b$. Поскольку $aa^{\#} = a^{\#}a$, то $a^{\#}$ коммутирует с b. Так как, кроме того, $a^{\#} = b^{-a^{\#}}$, то $bb^{-a^{\#}}b = ba^{\#}b = ba^{\#}a = aa^{\#}a = a$. Наконец, $a <^{-C} b$. □

Следствие 3.27. *Пусть $\Theta_C : b \mapsto C(b) \cap b\{2\}$. Тогда $<^{\Theta_C}$ – групповой порядок.*

Доказательство. Пусть $a <^{\Theta_C} b$. Тогда, по теореме 3.16, существует $a^+ \in C(b) \cap a\{1,2\}$ такое, что $aa^+ = ba^+ = a^+b = a^+a$. Из этого следует, что $a^+ = a^{\#}$ и, в итоге, $a <^{\#} b$.

Теперь пусть $a <^{\#} b$. Из этого следует, что $a^{\#}a = aa^{\#} = a^{\#}b = ba^{\#}$ и $a^{\#}ba^{\#} = a^{\#}$. Таким образом, $a^{\#} \in C(b) \cap b\{2\}$ и, как следствие теоремы 3.16, $a <^{\Theta_C} b$. □

Предложение 3.28. *Для любых $b \in S$, $\Theta_C(b) = \{b^{-d} | d \in C(b)\}$.*
Как следствие, все определенные отношения остаются неизменными при замене Θ_C на $-C$.

Доказательство. Пусть $b \in S$. Вложение $\Theta_C(b) \subseteq \{b^{-d} | d \in C(b)\}$ очевидно. Достаточно проверить лишь, что $b^{-d}b = bb^{-d}$, если $d \in C(b)$. Это напрямую следует из того факта, что $b^{-d} \in CC(\{b,d\})$, если $b \in C(\{b,d\})$. □

Дадим третью характеризацию группового порядка при помощи централизаторов.

Предложение 3.29. *Пусть $a, b \in S$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $a <^{\Theta_C} b$;
(2) $a <^{\#} b$;
(3) $a <^{-} b$ *в полугруппе* $C(b)$.

Доказательство. Эквивалентность (1) и (2) – это следствие 3.27. Предположим, что $a <^{\#} b$. Тогда $a^{\#}a = ba^{\#} = aa^{\#} = a^{\#}b$ и $a \in C(b)$. В частности, $a^{\#} \in C(b)$ и, наконец, $a <^{-} b$ в полугруппе $C(b)$. Обратно, предположим, что $a <^{-} b$ в полугруппе $C(b)$. Тогда $a \in C(b)$ и существует такое $a^{-} \in C(b) \cap a\{1\}$, что $a^{-}a = a^{-}b$ и $aa^{-} = ba^{-}$.

Тогда $a^-a = aa^-$ и a имеет групповую обратную $a^\# = a^-aa^-$. В итоге, $a^\#a = a^-aa^-a = a^-aa^-b = a^\#b$ и, аналогично, $aa^\# = ba^\#$. Таким образом, $a <^\# b$. □

Поскольку $<^{-C} \subseteq \mathcal{N}^{-C}$, то групповой порядок сильнее, чем $\mathcal{N}^{-C}$. Следующий пример показывает, что, в общем случае, он строго сильнее.

Пример 3.30. *Пусть $S = T_3$ и положим $a = (112)$, $b = (132)$. Тогда a не имеет групповой обратной. В самом деле, предположим, что существует $a^\#$. Тогда $a = aa^\#a = aaa^\# = (111)a^\# = (111) \neq a$, противоречие. В результате, $a \not<^\# b$. Но легко видеть, что $b^{-1} = b$. Пусть $b^= = b \in C(b)$. Тогда $a = ab^=b = bb^=a$ и $ab^=a = (112)(132)(112) = (112) = a$.*

Теперь исследуем отношение $<^{-CC}$, построенное с помощью двойных централизаторов. Начнем с полезной леммы.

Лемма 3.31. *Пусть $a \in S$ обратима вдоль $d \in CC(a)$. Тогда $a^{-d} \in CC(a)$.*

Доказательство. Пусть $x \in S, xa = ax$. Тогда $xd = dx$, так как $d \in CC(a)$. Поскольку $a^{-d} \in CC(\{a, d\})$, то $a^{-d}x = xa^{-d}$ и $a^{-d} \in CC(a)$. □

Следствие 3.32. *Отношение $<^{-CC}$ является частичным порядком.*

Доказательство. Докажем, что выполнено достаточное условие предложения 3.21. Пусть $b, c \in S$, b обратимо вдоль $d \in CC(b)$, а c обратимо вдоль $\delta \in CC(c)$. По лемме 3.31, $b^{-d} \in CC(b)$, а $c^{-\delta} \in CC(c)$. Поскольку $b = cc^{-\delta}c$ и двойной централизатор является полугруппой, получаем, что $b \in CC(c)$. Из последнего следует, что $CC(b) \subseteq CC(c)$ и $b^{-d} \in CC(c)$. Рассмотрим $x = c^{-\delta}cb^{-d}cc^{-\delta}$. Как произведение элементов $CC(c)$, оно принадлежит $CC(c)$. □

Поскольку $CC(x) \subseteq C(x)$ для любого $x \in S$, то $<^{-CC} \subseteq <^{-C}$ и $<^{-CC}$ сильнее группового порядка. Следующий пример показывает, что, в общем случае, он строго сильнее.

Пример 3.33. *Пусть $S = T_3$ и $b = (122)$.*
Тогда, очевидно, $(111), (122), (123), (222) \in C(b)$, но $(121) \notin C(b)$. Как следствие, $(121) \notin CC(b)$. В самом деле, $(121)(122) = (122) \neq (121) = (122)(121)$. Пусть теперь $d = (mnk) \in CC(b)$. Тогда d коммутирует с

(111) и (222) или, что то же самое, $m = 1$, $n = 2$. Из этого следует, что $CC(b) = \{(123), (122)\}$.

Поскольку b необратимо, не существует $b^{-(123)}$. Но $b^{-b} = b$. Тогда $bb^{-b}b = b$, откуда следует, что $a <^{-\Delta_{CC}} b$. Тогда $a = b$. Но, например, $(111) <^{\#} b$.

Предложение 3.34. *Пусть $\Theta_{CC} : b \mapsto CC(b) \cap b\{2\}$. Тогда для любого $b \in S$, $\Theta_{CC}(b) = \{b^{-d} | d \in CC(b)\}$.*
Как следствие, все введенные отношения не меняются при замене Θ_{CC} на $-CC$.

Доказательство. Пусть $b \in S$. Вложение $\Theta_{CC}(b) \subseteq \{b^{-d} | d \in CC(b)\}$ очевидно. Достаточно проверить, что $b^{-d} \in CC(b)$, если $d \in CC(b)$. Это следует из леммы 3.31. $\square$

Предложение 3.35. *Пусть $a, b \in S$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $a <^{-CC} b$ *в* S;
(2) $a <^{\#} b$ *в* $CC(b)$;
(3) $a <^{-} b$ *в* $CC(b)$;
(4) $a <^{\Theta_{CC}} b$ *в* S.

Доказательство. Пусть $a, b \in S$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $a <^{-CC} b$. Тогда $a = bb^{-d}b$ для некоторого $d \in CC(b)$. Тогда, по лемме 3.11, $b^{-d} \in a\{1, 2\}$, а по лемме 3.31, $b^{-d} \in CC(b)$. Тогда $a \in CC(b)$, а поскольку $CC(b)$ коммутативно, то $b^{-d} = a^{\#}$. В итоге, $aa^{\#} = ab^{-d} = bb^{-d}bb^{-d} = bb^{-d} = ba^{\#} = a^{\#}b$.

(1) $\Rightarrow$ (3) по определению.

(3) $\Rightarrow$ (4) Пусть $a <^{-} b$ в $CC(b)$. Тогда $a \in CC(b)$ и существует $a^{-} \in CC(b) \cap a\{1\}$ такое, что $ba^{-} = aa^{-} = a^{-}b = a^{-}a$. Кроме того, $a^{-}aa^{-} \in CC(b)$, поскольку $CC(b)$ – полугруппа. Это рефлексивная обратная к a и внешняя обратная к b, поскольку

$$a^{-}aa^{-}ba^{-}aa^{-} = a^{-}aa^{-}aa^{-}aa^{-} = a^{-}aa^{-}.$$

В этом случае, $ba^{-}aa^{-} = aa^{-}aa^{-} = a^{-}aa^{-}a$, и теорема 3.16 завершает доказательство.

(4) $\Rightarrow$ (1) по предложению 3.34.

$\square$

В завершение этой главы рассмотрим частичный порядок Дрейзина и звездный порядок. Пусть S – полугруппа с собственной инволюцией.

Звездный порядок определяется следующим образом: $a <^* b$, если и только если $aa^* = ba^*$ и $a^*a = a^*b$, а частичный порядок Дрейзина: $a <^\dagger b$, если и только если $aa^\dagger = ba^\dagger$ и $a^\dagger a = a^\dagger b$. В [8] доказано, что эти порядки совпадают на $*-$регулярных элементах (элементах, обратимых по Муру–Пенроузу).

Теорема 3.36. *Пусть S – полугруппа с собственной инволюцией и пусть*

$$\Theta^* : b \mapsto \Theta^*(b) = \{b^= \in b\{2\} | b^= b = (b^= b)^* \text{ and } bb^= = (bb^=)^*\}.$$

Тогда $<^{\Theta^*}$ – порядок Дрейзина.

Доказательство. Пусть $a, b \in S$ таковы, что $a <^{\Theta^*} b$. Тогда, по теореме 3.16, существует $a^+ \in \Theta^*(b)$ такое, что $aa^+ = ba^+$, а $a^+a = a^+b$. По лемме 3.11, $a^+ \in a\{1,2\}$. Так как $a^+ \in \Theta^*(b)$, $aa^+ = ba^+ = (ba^+)^* = (aa^+)^*$ и $a^+a = a^+b = (a^+b)^* = (a^+a)^*$. В итоге, $a^+ = a^\dagger$ и, как следствие, $a <^\dagger b$.

Предположим, что $a <^\dagger b$. Из этого следует, что $aa^\dagger = ba^\dagger$, а $a^\dagger a = a^\dagger b$. Тогда $a^\dagger ba^\dagger = a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger$, $(aa^\dagger)^* = aa^\dagger = ba^\dagger = (ba^\dagger)^*$ и, аналогично, $a^\dagger b = (a^\dagger)^*$. Следовательно, $a^\dagger \in \Theta^*(b)$ и, в итоге, $a <^{\Theta^*} b$. □

Предложение 3.37. *Рассмотрим $\Delta^* : b \mapsto \Delta^*(b) = \{x \in S \mid xb = (xb)^*$ и $bx = (bx)^*\}$. Тогда для любого $b \in S$, $\Theta^*(b) = \{b^{-d} | d \in \Delta^*(b)\}$. Как следствие, все введенные отношения не меняются при замене Θ^* на $-\Delta^*$.*

Доказательство. Пусть $b \in S$. Достаточно проверить, что $b^{-d}b = (b^{-d}b)^*$ и $bb^{-d} = (bb^{-d})^*$ для всех $d \in \Delta^*(b)$, поскольку $\Theta^*(b) \subseteq \{b^{-d} | d \in \Delta^*(b)\}$ очевидно.

Напомним, что $(b^{-d})^* = (b^*)^{-d^*}$ и $b^{-d} = d(bd)^\# = (db)^\# d$.

Из этого следует, что $(b^{-d}b)^* = b^*(b^*)^{-d^*} = b^*d^*(b^*d^*)^\# = (db)(db)^\# = (db)^\# db = b^{-d}b$ и, аналогично, $bb^{-d} = (bb^{-d})^*$. □

Поскольку $<^{\Theta^*} \subseteq \mathcal{N}^{\Theta^*}$, то порядок Дрейзина сильнее $\mathcal{N}^{\Theta^*}$. Следующий пример показывает, что, в общем случае, он строго сильнее.

Пример 3.38. *Пусть $S = \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ (инволюцией пусть будет транспонирование). Рассмотрим $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда легко проверить, что $bbb = b$, $a = bba = abb = aba$. Поскольку*

$bb = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *симметрично, то* $b \in \Theta^*(b)$ *и, наконец,* $a\mathcal{N}^{\Theta^*}b$. *Заметим, что* $a = aa = a^* = a^\dagger$. *Тогда* $a^\dagger a = a \neq a^\dagger b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Следовательно,* $a \not<^* b$.

3.5. Различные свойства отношения $\mathcal{N}^\Theta$.

Предложение 3.39. *Пусть* $a, b \in S$ *и* $a\ \mathcal{N}^\Theta b$ *для некоторого* Θ. *Тогда или* $a = b$, *или не существует* a^{-1}.

Доказательство. Предположим, что $a \neq b$ и существует a^{-1}. Так как a обратимо и $a = ab^{=}a$, имеем $b^{=} = a^{-1}$. Но тогда $b^{=}$ тоже обратимо и $b^{=} = b^{-1} = a^{-1}$, следовательно, $a = b$, противоречие. □

Следствие 3.40. *Любой обратимый элемент* $a \in S$ *является максимальным элементом относительно* $\mathcal{N}^\Theta$.

Рассмотрим элемент $\Delta^\#$ такой, что $\Delta^\#(b) = b$ для любого $b \in S$. Очевидно, что из $a <^{-\Delta^\#} b$ следует $a = b$, то есть $<^{-\Delta^\#}$ $(=<^{\Theta^\#})$ – диагональное отношение. Следующий пример показывает, что это утверждение не верно для $\mathcal{N}^{-\Delta^\#}$.

Пример 3.41. *Пусть* $S = T_3$ *– полугруппа, состоящая из всех отображений множества* $\{1, 2, 3\}$ *в себя с операцией композиции. Пишем* (mnk), *обозначая функцию, переводящую* 1 *в* m, 2 *в* n, *а* 3 *в* k.

Пусть $a = (323), b = (321)$. *Тогда* $b^\# = (321)$ *и* $a = ab^\# b = bb^\# a = ab^\# a$ *или, эквивалентно,* $a\mathcal{N}^{-\Delta^\#}b$.

Замечание 3.42. *В примере выше* $a^\# = a^\# bb^\# = b^\# ba^\# = a^\# ba^\#$, *то есть* $a^\# \mathcal{N}^{-\Delta^\#} b^\#$. *Но эквивалентность* $a^\# = a^\# ba^\#$ *не выполнена в общем случае, как показывает следующий пример.*

Пример 3.43. *Пусть* $S = T_3$, $a = (211)$ *и* $b = (231)$. *Тогда* $a^\# = a$ *и* $b^\# = (312)$. *В этом случае получаем следующие равенства:* $a = ab^\# b = bb^\# a = ab^\# a$. *Но* $a^\# ba^\# = (111) \neq a^\#$.

Предложение 3.44. *Пусть* $a, b \in S$ *таковы, что* a *имеет групповую обратную, и предположим, что* $\Delta : S \to \mathcal{P}(S)$ *удовлетворяет* $\Delta(b) \subseteq C(b)$. *Если* $a\mathcal{N}^{-\Delta}b$ *при* $a = ab^{-d}b = bb^{-d}a = ab^{-d}a$ *для некоторого* $d \in \Delta(b)$, *то* $a^\# = a^\# bb^{-d} = b^{-d}ba^\#$.

Доказательство. Пусть $a = ab^{-d}b = bb^{-d}a = ab^{-d}a$, где a имеет групповую обратную. Оказывается, что в этом случае $a(a^{\#}bb^{-d})a = a^{\#}(ab^{-d}b)a = a$, $(a^{\#}bb^{-d})a(a^{\#}bb^{-d}) = (a^{\#}aa^{\#})bb^{-d} = a^{\#}bb^{-d}$, а $(a^{\#}bb^{-d})a = a^{\#}(ab^{-d}b) = a(a^{\#}bb^{-d})$, то есть $(a^{\#}bb^{-d})$ – групповая обратная к a. Аналогично, $a^{\#} = b^{-d}ba^{\#}$. Наконец, получаем, что $a^{\#} = a^{\#}bb^{-d} = b^{-d}ba^{\#}$. □

Замечание 3.45. *Заметим, что $\Delta^{\#}$ удовлетворяет условиям предложения* 3.44.

Лемма 3.46. *Пусть $a, b \in S$ и $a\mathcal{N}^{\Theta}b$ при $a = ab^{=}b = bb^{=}a = ab^{=}a$. Тогда $ab^{=}, b^{=}a \in E(S)$.*

Доказательство. $ab^{=} = (ab^{=}a)b^{=}$, $b^{=}a = b^{=}(ab^{=}a)$. □

Лемма 3.47. *Пусть $a, b \in S$. Если $a\mathcal{N}^{\Theta}b$ и b – идемпотент в S, то a тоже идемпотент, причем $a = ab = ba = a^2$.*

Доказательство. Поскольку $a\mathcal{N}^{\Theta}b$, существует $b^{=} \in \Theta(b) \subseteq b\{2\}$, $a = ab^{=}a = ab^{=}b = bb^{=}a$. Из этого следует, что

$$a = ab^{=}a = ab^{=}bb^{=}a = (ab^{=}b)(bb^{=}a) = aa,$$

$a = ab^{=}b = ab^{=}(bb) = ab$, $a = bb^{=}a = (bb)b^{=}a = ba$ и, наконец, $a = ab = ba = a^2$. □

Предложение 3.48. *Пусть $S = T_n$. Тогда n-кортежи $(i \dots i)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ являются минимальными элементами относительно $\mathcal{N}^{\Theta}$.*

Доказательство. Заметим, что $(i \dots i)x = (i \dots i)$ для любого $x \in S$. Предположим, что $a\mathcal{N}^{\Theta}(i \dots i)$. Тогда $a = (i \dots i)(i \dots i)^{=}a = (i \dots i)$. Таким образом, $(i \dots i)$ – минимальные элементы относительно $\mathcal{N}^{\Theta}$ и, как следствие, относительно $<^{\Theta}$. □

В [12] рассматривались различные случаи максимальных относительно минус-порядка элементов. Поскольку $<^{\Theta} \subseteq \mathcal{N}^{\Theta} \subseteq <^{-}$, все такие результаты, полученные для минус-порядка, выполнены для $<^{\Theta}$ и $\mathcal{N}^{\Theta}$, а все экстремальные результаты, полученные в этой главе для $\mathcal{N}^{\Theta}$, верны и для $<^{\Theta}$.

Литература

1. J. K. Baksalary, F. Pukelsheim, G. P. H. Styan, *Some properties of matrix partial orderings.* — Linear Algebra Appl. **119** (1989), 57–85.
2. A. Ben Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses, Theory and Applications*, 2nd ed., Springer, New York, 2003.
3. A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups. Vol.* I, Mathematical Surveys, No. 7, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
4. R. E. Cline, R. E. Funderlic, *The rank of a difference of matrices and associated generalized inverses.* — Linear Algebra Appl. **24** (1979), 185–215.
5. M. P. Drazin, *Pseudo-inverse in associative rings and semigroups.* — Amer. Math. Monthly **65** (1958), 506–514.
6. M. P. Drazin, *A class of outer generalized inverses.* — *Linear Algebra Appl.* **436**, No. 7 (2012), 1909–1923.
7. M. P. Drazin, *A partial order in completely regular semigroups.* — *J. Algebra* **98**, No. 2 (1986), 362–374.
8. M. P. Drazin, *Natural structures on semigroups with involution.* — *Bull. Amer. Math. Soc.* **84**, No. 1 (1978), 139–141.
9. J. A. Green, *On the structure of semigroups.* — *Ann. Math.* **54**, No. 1 (1951), 163–172.
10. R. E. Hartwig, *How to partially order regular elements.* — Math. Japon. **25** (1980), 1–13.
11. R. E. Hartwig, *Block generalized inverses.* — Arch. Rational Mech. Anal. **61**, No. 3 (1976), 197–251.
12. R. E. Hartwig, R. Loewy, *Maximal elements under the three partial orders.* — Linear Algebra Appl. **175** (1992), 39–61.
13. R. E. Hartwig, G. P. H. Styan, *On some characterizations of the "star" partial ordering and rank-subtractivity.* — Linear Algebra Appl. **82** (1986), 145–161.
14. A. Hernandez, M. Lattanzi, N. Thome, *On a partial order defined by the weighted Moore-Penrose inverse.* — Appl. Math. Comput. **219**, No. 14 (2013), 7310–7318.
15. J. M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, London Mathematical Society Monographs, New Series, 12, Oxford Science Publications, 1995.
16. S. K. Mitra, P. Bhimasankaram, S. B. Malik, *Matrix Partial Orders, Shorted Operators and Applications*, World Scientific Publishing Company, 2010.
17. X. Mary, *On generalized inverses and Green's relations.* — Linear Algebra Appl. **434**, No. 8 (2011), 1836–1844.
18. X. Mary, P. Patricio, *Generalized invertibilty modulo $\mathcal{H}$ in semigroups and rings.* — Linear Multilinear Algebra **61**, No. 8 (2013), 1130–1135.
19. H. Mitsch, *A natural partial order on semigroups.* — Proc. Amer. Math. Soc. **97**, No. 3 (1986), 384–388.
20. S. K. Mitra, *On group inverses and the sharp order.* — Linear Algebra Appl. **92** (1987), 17–37.
21. S. K. Mitra, R. E. Hartwig, *Partial orders based on outer inverse.* — Linear Algebra Appl. **176** (1992), 3–20.
22. S. K. Jain, S. K. Mitra, H. J. Werner, *Extensions of G-based matrix partial orders.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17**, No. 4 (1996), 834–850.

23. S. K. Mitra, *Matrix partial order through generalized inverses: unified theory.* — Linear Algebra Appl. **148** (1991), 237–263.
24. W. D. Munn, *Pseudo-inverses in Semigroups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **57**, No. 2 (1961), 247–250.
25. K. Nambooripad, *The natural partial order on a regular semigroup.* — Proc. Edinburgh Math. Soc. **23** (1980), 249–260.
26. M. Petrich, *Certain partial orders on semigroups.* — Czechoslovak Math. J. **51** (2001), 415–432.
27. D. S. Rakic, D. S. Djordjevic, *Partial orders in rings based on generalized inverses – unified theory.* — Linear Algebra Appl. **471** (2015), 203–223.
28. D. S. Rakic, D. S. Djordjevic, *Space pre-order and minus partial order for operators on Banach spaces.* — Aeq. Math. **85**, No. 3 (2013), 429–448.

Guterman A., Mary X., Shteyner P. Partial orders based on inverses along elements.

The paper introduces and investigates partial orders that are finer than the minus partial order and are based on inverses along an element and other specific outer inverses. It turns out that in this way a number of classical partial orders can be equivalently defined.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1,
119991, ГСП-1, Москва, Россия

Московский центр
непрерывного
математического образования,
Большой Власьевский переулок, д. 11,
119002, Москва, Россия

Университет Париж Нантер,
F92000 проспект Республики 200,
Нантер, Франция

Поступило 1 ноября 2017 г.