

Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин

## О МЕТОДАХ ГРУБОСЕТОЧНОЙ КОРРЕКЦИИ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмы грубосеточной коррекции изначально были предложены как способ ускорения итерационных методов декомпозиции подобластей (МДО), которые, в свою очередь, являются основным подходом к масштабируемому распараллеливанию при решении больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, возникающими при конечно-объемных или конечно-элементных аппроксимациях многомерных краевых задач на неструктурированных сетках, см. [1] и цитируемую там литературу. Параллельная реализация МДО традиционно осуществляется с помощью двухуровневых крыловских процессов: верхний представляет собой блочные итерации по подобластям, а нижний – синхронное решение алгебраических подсистем в подобластях. С точки зрения общей трудоемкости рассматриваемых алгоритмов, актуальным является быстрое решение относительно небольших СЛАУ в подобластях, которое требуется проводить многократно, т.е. на каждой внешней итерации. Наиболее естественно при этом каждую подсистему решать на “своем” многоядерном процессоре с использованием многопоточковых вычислений на общей памяти. Поскольку в данном случае применение алгоритмов неполного треугольного разложения матриц в качестве предобуславливания “внутренних” крыловских процессов сопряжено с трудностями распараллеливания [2], в данной работе мы рассмотрим подходы на основе методов грубосеточной коррекции и наименьших квадратов [3, 4].

---

*Ключевые слова:* вещественные несимметричные разреженные матрицы, итерационные методы, подпространства Крылова, грубосеточная коррекция, вычислительные эксперименты.

Работа поддержана грантами РФФ No.15-11-10024 и РФФИ No.16-29-1522/17 офи-м.

Грубосеточная коррекция конструируется с помощью финитных базисных функций первого, второго и третьего порядков на редкой сетке, которую можно при желании интерпретировать как подобласти в концепции МДО, а также как вариант многосеточного подхода. Коэффициенты линейной комбинации базисных функций ищутся по условию минимизации невязки исходной СЛАУ в получаемом предобусловленном крыловском итерационном процессе. Конкретно мы используем алгоритм сопряженных градиентов (даже для несимметричных СЛАУ) с рестартами и периодической оптимизацией приближений с помощью метода наименьших квадратов (МНК), который фактически порождает предобуславливатель путем малоранговой аппроксимации исходной матрицы. Применяемый подход можно рассматривать как использование дефляции (deflation) или дополнительности в смысле расширения базиса (augmentation) для исходного итерационного процесса. Для повышения скорости сходимости итераций дополнительно используется “верхний” уровень ускорения с помощью МНК на основе использования комбинации невязок на “рестартах”.

Данная работа построена следующим образом. В §2 описываются предлагаемые алгоритмы и их основные свойства. В §3 обсуждаются вопросы построения базисных функций. В §4 эффективность предложенных подходов исследуется экспериментально на серии сеточных СЛАУ для двумерной диффузионно-конвективной краевой задачи Дирихле. В заключении анализируются перспективы применения конструируемых итерационных процессов для решения практических задач.

## §2. МЕТОДЫ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ С ГРУБОСЕТОЧНОЙ КОРРЕКЦИЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Целью данной работы является построение и экспериментальное исследование быстрых и хорошо распараллеливаемых итерационных алгоритмов для решения больших СЛАУ вида

$$Au = f, \quad A \in \mathcal{R}^{N,N}; \quad u, f \in \mathcal{R}^N, \quad (1)$$

с разреженными плохо обусловленными матрицами, в том числе несимметричными, возникающими при конечно-объемных или конечно-элементных аппроксимациях многомерных краевых задач на неструктурированных сетках. Более конкретно, мы рассматриваем вещественные не “сверхбольшие” алгебраические системы, уместающиеся в

общей памяти одного многоядерного процессора, так что программная реализация алгоритмов осуществляется на технологиях многопоточковых вычислений без энергозатратных и относительно медленных обменов данными. Предполагается, в частности, что предлагаемые методы могут быть эффективно применены для высокопроизводительного синхронного решения подсистем в сеточных подобластях при использовании двухуровневых методов декомпозиции областей с масштабируемым параллелизмом.

Мы будем рассматривать алгебраический метод грубосеточной коррекции, с одной стороны, как способ предобуславливания крыловского итерационного процесса, а с другой стороны, его конструирование осуществляем из аппроксимационных принципов. В абстрактной форме данный подход можно представить следующим образом. Пусть имеется некоторая система базисных функций, или векторов,  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , с помощью которой будем уточнять имеющееся приближение  $u^n$  к точному решению СЛАУ (1):

$$\tilde{u}^n = u^n + c_1\phi_1 + \dots + c_m\phi_m = u^n + \Phi c, \quad m \ll N, \quad (2)$$

где  $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ , индекс “ $T$ ” означает транспонирование, а прямоугольная матрица  $\Phi = (\phi_1 \dots \phi_m) \in \mathcal{R}^{N,m}$  имеет своими столбцами векторы  $\phi_k, k = 1, \dots, m$ . Соответствующий вектор невязки записывается в виде

$$\tilde{r}^n = f - A\tilde{u}^n = r^n - \Psi c, \quad \Psi = A\Phi. \quad (3)$$

Отсюда нахождение вектора  $c$  и соответствующего откорректированного приближения  $\tilde{u}^n$  можно выполнить по условию минимизации нормы  $\|\tilde{r}^n\|_2 = (\tilde{r}^n, \tilde{r}^n)^{1/2}$ . С помощью метода наименьших квадратов [4] получаем СЛАУ

$$\hat{B}\hat{c} = \Psi^T\Psi\hat{c} = \Psi^T r^n \equiv \hat{g}^n, \quad \hat{B} \in \mathcal{R}^{m,m}, \quad (4)$$

которую можно рассматривать как следствие соотношения ортогональности  $\Psi^T\tilde{r}^n = 0$ . Матрица  $\hat{B}$  является невырожденной, если  $\Psi$  имеет полный ранг  $m$ . В общем случае, даже при вырожденности  $\hat{B}$ , система (4) совместна, а искомый вектор  $\hat{c}$  можно формально определить через обобщенную обратную матрицу  $B^+$ , т.е.  $\hat{c} = \hat{B}^+\Psi^T r^n$ . На практике СЛАУ (4) всегда можно решить, например, с помощью метода сингулярного разложения SVD (Singular Value Decomposition, [4]).

Далее соотношения (2), (3) легко приводятся к виду

$$\begin{aligned}\widehat{u}^n &= u^n + \Phi \widehat{B}^+ \Psi^T r^n, & \widehat{B} &= \Psi^T \Psi = \Phi^T A^T A \Phi, \\ \widehat{r}^n &= r^n - \Psi (\Psi^T \Psi)^+ \Psi^T r^n = \widehat{H} r^n, & \widehat{H} &= I - A \Phi (\Phi^T A^T A \Phi)^+ \Phi^T A^T.\end{aligned}\quad (5)$$

Отметим, что вместо рассмотренного в (4), (5) применения МНК использование коррекции можно проводить на основе условия ортогональности невязки  $\widehat{r}^n$  векторам  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , что в матричном виде записывается как  $\Phi^T \widehat{r}^n = 0$ , откуда вследствие (3) получаем

$$\check{B} \check{c} = \Phi^T A \Phi \check{c} = \Phi^T r^n \equiv \check{g}^n. \quad (6)$$

При этом вместо соотношений (5) мы имеем

$$\begin{aligned}\check{u}^n &= u^n + \Phi \check{B}^+ \Phi^T r^n, & \widehat{B} &= \Phi^T A \Phi, \\ \check{r}^n &= \check{H} r^n, & \check{H} &= I - A \Phi (\Phi^T A \Phi)^+ \Phi^T.\end{aligned}\quad (7)$$

Напомним, что рассмотренные два подхода – (4), (5) и (6), (7) – обладают разными свойствами ортогональности: для первого имеем  $\Phi^T A^T \widehat{r}^n = 0$ , а для второго –  $\Phi^T \check{r}^n = 0$ . Существенно также, что у них различаются и оптимизационные характеристики: соотношения (4), (5) обеспечивают минимум функционала

$$((r^n - A \Phi \check{c}), (r^n - A \Phi \check{c})),$$

а при условиях (6), (7) достигается минимум функционала

$$(A^{-1}(r^n - A \Phi \check{c}), (r^n - A \Phi \check{c})),$$

но только для симметричной положительной определенной (с.п.о.) матрицы  $A$ . Заметим, что матрицы  $\widehat{B}, \check{B} \in \mathcal{R}^{N,N}$  в данных случаях являются фактически малоранговыми аппроксимациями матриц  $A^T A$  и  $A$  соответственно.

До сих пор мы не конкретизировали, с помощью какого метода получены векторы  $u^n$  и  $r^n$ , к которым применяется описанная выше грубосеточная коррекция. В качестве исходного итерационного алгоритма, вообще говоря, можно выбрать любой из процессов крыловского типа. Мы рассмотрим предложенный в [5] для решения СЛАУ с с.п.о. матрицей дефляционный метод сопряженных градиентов (DCG, Deflated Conjugate Gradient), причем будем его применять даже для несимметричных систем. Данный алгоритм основан на определении

прямоугольной дефляционной матрицы  $W = (w_1 \dots w_k) \in \mathcal{R}^{N,k}$  с линейно независимыми столбцами, составляющими базис соответствующего дефляционного подпространства, и предварительно выбираются начальные векторы  $u^0, r^0 = f - Au^0, p^0$ , удовлетворяющие условиям ортогональности

$$W^T r^0 = 0, \quad W^T A p^0 = 0. \quad (8)$$

Для произвольно заданного вектора  $u^{-1}$  соотношения (8) обеспечиваются, если положить  $r^{-1} = f - Au^{-1}$  и

$$u^0 = u^{-1} + WB^{-1}W^T r^{-1}, \quad p^0 = r^0 - WB^{-1}W^T A r^0, \quad B = W^T A W. \quad (9)$$

Далее итерационные приближения для  $n = 0, 1, \dots$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \alpha_n p^n, \quad \alpha_n = \rho_n / (p^n, A p^n), \\ r^{n+1} &= r^n - \alpha_n A p^n, \quad \rho_n = (r^n, r^n), \\ p^{n+1} &= r^{n+1} + \beta_n p^n - WB^{-1}W A r^{n+1}, \quad \beta_n = \rho_{n+1} / \rho_n, \end{aligned} \quad (10)$$

и при этом также для всех  $n$  выполняется аналогичные (8) соотношения

$$W^T r^{n+1} = 0, \quad W^T A p^{n+1} = 0. \quad (11)$$

Для выбора дефляционных векторов  $w_k$  мы будем использовать аппроксимационный принцип грубосеточной коррекции из [3], см. далее §3.

Опишем теперь второй, верхний, уровень ускорения итерационного процесса с рестартами. Пусть  $n_0 = 0$ , а  $n_k, k = 1, \dots, M$ , суть номера “рестартовых” итераций, на которых вычислены итерационные приближения и соответствующие векторы невязок

$$u^{n_0}, u^{n_1}, \dots, u^{n_m}; \quad r^{n_0}, r^{n_1}, \dots, r^{n_m}. \quad (12)$$

В частности, при постоянной длине периода рестарта  $m = n_k - n_{k-1}$  имеем  $n_k = km$ . Из указанных векторных последовательностей сформируем прямоугольные матрицы

$$\begin{aligned} V_k &= (v_1 = u^{n_1} - u^{n_0} \dots v_k = u^{n_k} - u^{n_{k-1}}) \in \mathcal{R}^{N,k}, \\ W_k &= (w_1 = A v_1 \dots w_k = A v_k) \in \mathcal{R}^{N,k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем проводить уточнение каждого рестартового приближения путем линейного комбинирования аналогичных предыдущих итераций:

$$\hat{u}^{n_k} = u^{n_k} + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = u^{n_k} + V_k \bar{c}_k, \quad (14)$$

где  $\bar{c}_k = (c_1, \dots, c_k)^T$  – вектор неизвестных коэффициентов. Соответствующие уточненные векторы невязок могут быть записаны в виде

$$\hat{r}_{n_k} = f - A\hat{u}_{n_k} = r^{n_k} - W_k \bar{c}_k. \quad (15)$$

Для нахождения коэффициентов  $c_k$  с помощью МНК формируем вспомогательную СЛАУ

$$B_k \bar{c}_k \equiv W^T A W \bar{c}_k = W^T r^{n_k} \equiv g_k, \quad B_k \in \mathcal{R}^{k,k}, \quad (16)$$

после решения которой откорректированное решение вычисляется по формуле (14).

### §3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассматривается двумерная краевая задача с условиями Дирихле для диффузионно-конвективного уравнения

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (17)$$

$$u|_{\Gamma} = 1, \quad \Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega,$$

в квадратной области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  с границей  $\Gamma$ . Дискретизация проводится методом конечных объёмов второго порядка (подробнее см. [4]) на квадратной сетке с числом шагов  $L + 1$  по оси  $x$  и  $M + 1$  по оси  $y$ . Число неизвестных в системе (1), т.е. расчётных узлов, составляет  $LM$  после учёта краевых условий и исключения из рассмотрения узлов на границе области.

В расчётной области  $\Omega$  строится макросетка, макроэлементы которой, или подобласти, покрывают все расчётные узлы. Макросетка также квадратная и задаётся числом макрошагов  $P_x$  и  $P_y$  по каждому из направлений, при этом число подобластей в  $\Omega$  есть  $P = P_x P_y$ . Макросетка строится таким образом, что сеточные линии макросетки проходят между сеточными линиями исходной сетки, поэтому каждый расчётный узел принадлежит ровно одной подобласти. Обозначим сеточные макрокоординаты через  $X_0, \dots, X_{P_x}$  и  $Y_0, \dots, Y_{P_y}$  по  $x$ - и  $y$ -направлениям соответственно. Каждая подобласть определяется четырьмя значениями макрокоординат, или макровершинами, и имеет свой порядковый номер (он соответствует номеру столбца дефляционной матрицы  $W$ ). При этом число столбцов матрицы  $W$  равно количеству определяемых базисных функций на макросетке, а число строк в этой матрице равно числу расчётных узлов.

Для применения грубосеточной коррекции будем использовать три типа базисных функций: нулевого, первого и второго порядков. Остановимся подробнее на описании функций каждого типа.

Первый тип – базисные функции нулевого порядка, или так называемые “полочки” в подобластях. Они определяются следующим образом. Пусть для расчётного узла с порядковым номером  $n$  (считаем, что все расчётные узлы пронумерованы в некотором порядке) известны его координаты  $(x_i, y_j)$ , а  $X_k, X_{k+1}, Y_l, Y_{l+1}$  – макрокоординаты, определяющие некоторую подобласть с номером  $p$ . Тогда для элемента матрицы имеем  $W(q, p) = 1$  при выполнении условий

$$X_k < x_i < X_{k+1}, Y_l < y_j < Y_{l+1}, \quad (18)$$

где  $q = q(i, j)$  есть номер строки матрицы и соответствующего расчётного узла сетки. В столбце, соответствующем подобласти с номером  $p$ , будет столько единичных элементов, сколько расчётных узлов лежит внутри этой подобласти, а остальные элементы в столбце будут нулевыми. В каждой из подобластей отлична от нуля только одна базисная функция, вследствие чего каждая строка матрицы  $W$  содержит только один ненулевой элемент.

Второй тип функций – базисные функции первого порядка, так называемые “крышечки”. Эти функции являются функциями с финитным носителем, билинейными в подобластях, т.е. каждая является произведением двух линейных функций – по  $x$  и по  $y$  – и определена на своём носителе – “сдвоенном” макроотрезке  $[X_{k-1}, X_{k+1}]$  и  $[Y_{l-1}, Y_{l+1}]$  соответственно. Отсюда следует, что базисная функция вычисляется одним из четырёх способов в зависимости от того, куда именно (в какую часть прямого произведения носителей или в какую именно макроячейку) попадает расчётный узел:

при  $X_{k-1} < x_i < X_k, Y_{l-1} < y_j < Y_l$ ,

$$W(q, p) = \left( \frac{x_i - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}} \right) \left( \frac{y_j - Y_{l-1}}{Y_l - Y_{l-1}} \right),$$

при  $X_{k-1} < x_i < X_k, Y_l < y_j < Y_{l+1}$ ,

$$W(q, p) = \left( \frac{x_i - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}} \right) \left( 1 - \frac{y_j - Y_l}{Y_{l+1} - Y_l} \right),$$

при  $X_k < x_i < X_{k+1}, Y_{l-1} < y_j < Y_l$ ,

$$W(q, p) = \left( 1 - \frac{x_i - X_k}{X_{k+1} - X_k} \right) \left( \frac{y_j - Y_{l-1}}{Y_l - Y_{l-1}} \right),$$

при  $X_k < x_i < X_{k+1}$ ,  $Y_l < y_j < Y_{l+1}$ ,

$$W(q, p) = \left(1 - \frac{x_i - X_k}{X_{k+1} - X_k}\right) \left(1 - \frac{y_j - Y_l}{Y_{l+1} - Y_l}\right). \quad (19)$$

Каждую из функций кусочно-линейного базиса можно сопоставить одному из узлов макросетки, так что общее количество столбцов в соответствующей матрице  $W$  равно  $(P_x + 1)(P_y + 1)$ . В отдельной под-области искомое решение аппроксимируется линейной комбинацией 4-х базисных функций, так что в каждой строке соответствующей дефляционной матрицы  $W$  четыре элемента отличны от нуля.

Третий тип функций – базисные функции второго порядка, взятые в виде тензорного произведения одномерных  $B$ -сплайнов. Эти функции также имеют финитный носитель, а именно “тройной” макроотрезок  $[X_{k-2}, X_{k+1}]$  и  $[Y_{l-2}, Y_{l+1}]$  по каждому из направлений. Сплайн (функция от одной переменной) “сшит” из трёх квадратичных функций, вычисляющихся по-своему на каждом “одинарном” макроотрезке, являющимся частью носителя. Обозначим эти частичные функции через  $b1, b2, b3$ . Тогда формально можно записать их как

$$\begin{aligned} b1(x_0, x_1, x_2, x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \\ b2(x_0, x_1, x_2, x_3, x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \\ b3(x_1, x_2, x_3, x) &= \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $x_0, x_1, x_2, x_3$  – заданные координаты макроузлов, а  $x$  – координата расчётного узла. Прямое произведение носителей одномерных сплайнов даёт возможность расчётному узлу попасть в одну из девяти макроячеек–носителей результирующего сплайна. Поэтому значение базисной функции-сплайна вычисляется одним из девяти способов в зависимости от конкретной макроячейки, в которую попадает расчётный узел сетки с координатами  $(x_i, y_j)$ :

при  $X_{k-2} < x_i < X_{k-1}$ ,  $Y_l < y_j < Y_{l+1}$ ,

$$W(q, p) = b1(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, x_i) b3(Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j),$$

при  $X_{k-1} < x_i < X_k$ ,  $Y_l < y_j < Y_{l+1}$ ,

$$W(q, p) = b2(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i) b3(Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j),$$

при  $X_k < x_i < X_{k+1}$ ,  $Y_l < y_j < Y_{l+1}$ ,

$$W(q, p) = b3(X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i) b3(Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j),$$



$$\begin{aligned}
&\text{при } X_{k-2} < x_i < X_{k-1}, \quad Y_{l-1} < y_j < Y_l, \\
&\quad W(q, p) = b1(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, x_i)b2(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j), \\
&\text{при } X_{k-1} < x_i < X_k, \quad Y_{l-1} < y_j < Y_l, \\
&\quad W(q, p) = b2(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i)b2(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j), \\
&\text{при } X_k < x_i < X_{k+1}, \quad Y_{l-1} < y_j < Y_l, \\
&\quad W(q, p) = b3(X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i)b2(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, Y_{l+1}, y_j), \\
&\text{при } X_{k-2} < x_i < X_{k-1}, \quad Y_{l-2} < y_j < Y_{l-1}, \\
&\quad W(q, p) = b1(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, x_i)b1(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, y_j), \\
&\text{при } X_{k-1} < x_i < X_k, \quad Y_{l-2} < y_j < Y_{l-1}, \\
&\quad W(q, p) = b2(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i)b1(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, y_j), \\
&\text{при } X_k < x_i < X_{k+1}, \quad Y_{l-2} < y_j < Y_{l-1}, \\
&\quad W(q, p) = b3(X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, x_i)b1(Y_{l-2}, Y_{l-1}, Y_l, y_j). \tag{21}
\end{aligned}$$

#### §4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Ниже приводятся результаты численных расчётов решения краевой задачи (17) для различных чисел расчётных узлов, значений конвективных коэффициентов, количеств подобластей и параметров рестартов. Вычисления проводились на кластере НКС-1П ССКЦ ИВМиМГ СО РАН [7]. Вычисления являлись методическими, направленными на исследование скорости сходимости итерационного процесса для относительно небольших двумерных сеточных краевых задач, и поэтому они проводились в однопроцессорном режиме. Точным решением системы было взято значение  $u = 1$ . В качестве базового итерационного метода решения СЛАУ (1) был выбран дефляционный метод сопряжённых градиентов с использованием критерия останова итераций  $\|r^n\| \leq 10^{-7} \|f\|_2$ . По выходу из итерационного процесса вычислялась ошибка найденного итерационного решения  $\delta = \|1 - u\|_\infty$ . Начальное приближение во всех расчётах было взято равным  $u^0 = x^2 + y^2$ . В следующей табл. 1 в каждой клетке приведены количества итераций и максимальная норма ошибки. Столбцы соответствуют различным значениям рестарта  $m = 8, 16, 32, 64$ , а строки отвечают разному количеству расчётных узлов  $N = 16^2, 32^2, 64^2, 128^2$ . В данном случае,

как и в последующих двух табл. 2,3, результаты соответствуют применению алгоритма DCG по формулам (10) и одноуровневому использованию метода наименьших квадратов для уточнения рестартовых приближений согласно (7). Как видно из представленных данных, ито-

Таблица 1. Численные результаты для количества подобластей  $P = 2 \times 2$  и конвективных коэффициентов  $p = q = 0$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	55 $4.2 \cdot 10^{-7}$	48 $1.4 \cdot 10^{-7}$	39 $1.3 \cdot 10^{-7}$	36 $7.1 \cdot 10^{-8}$
$32^2$	157 $1.1 \cdot 10^{-6}$	101 $5.9 \cdot 10^{-7}$	86 $5.2 \cdot 10^{-7}$	73 $2.2 \cdot 10^{-7}$
$64^2$	517 $2.7 \cdot 10^{-6}$	282 $2.0 \cdot 10^{-6}$	189 $8.8 \cdot 10^{-7}$	161 $9.2 \cdot 10^{-7}$
$128^2$	1798 $7.7 \cdot 10^{-6}$	965 $5.4 \cdot 10^{-6}$	514 $4.7 \cdot 10^{-6}$	344 $2.9 \cdot 10^{-6}$

говая ошибка является приемлемой и соответствует использованному критерию окончания итераций. Это свидетельствует об удовлетворительной устойчивости исследуемых алгоритмов. Этот вывод подтверждается и другими многочисленными расчётами.

В табл. 2 приводятся результаты для тех же исходных данных, кроме количества подобластей, которое было равным  $P=4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ . Именно этим трём числам соответствуют количества итераций (слева направо) в каждой клетке таблицы.

Таблица 2. Результаты экспериментов для числа подобластей  $P = 4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  и конвективных коэффициентов  $p = q = 0$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	27 14 1	26 14 1	26 14 1	26 14 1
$32^2$	60 28 14	52 26 14	50 26 14	48 26 14
$64^2$	172 61 27	105 50 26	94 49 26	92 48 26
$128^2$	563 171 60	306 102 49	193 92 49	175 91 47

В следующей табл. 3 приводятся результаты для тех же исходных данных, что и в табл. 2, кроме величин конвективных коэффициентов уравнения (17), которые здесь были взяты ненулевыми, а именно,  $p = q = 4$ . Отметим, что в данном случае при больших периодах рестартов итерационный процесс иногда расходится (в табл. 3 этому соответствует символ “ $\infty$ ”). Напомним, что для несимметричных СЛАУ метод DCG в “чистом виде” и не обязан сходиться, а стабилизирующее влияние LSM сказывается только для относительно небольших  $m$ . При этом разница в числе итераций для нулевых и ненулевых  $p, q$  оказывается несущественной, причем она колеблется как в одну, так и в другую сторону. Заметим еще, что если число подобластей равно количеству узлов, то решение сходится за одну итерацию, так как в данном случае матрица  $W$  квадратная, и мы фактически имеем прямой метод. В последующих таблицах 4 и 5 приводятся данные,

Таблица 3. Результаты экспериментов для числа подобластей  $P = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$  и конвективных коэффициентов  $p = q = 4$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
16	43 25 1	71 39 1	167 98 1	517 198 1
32	69 51 25	94 115 49	198 516 99	651 $\infty$ 259
64	150 74 51	132 119 131	188 455 840	398 $\infty$ $\infty$
128	440 158 74	289 145 125	249 238 716	356 3288 $\infty$

аналогичные табл. 2,3, но только для случая применения двух уровней метода наименьших квадратов, то есть с дополнительной коррекцией рестартовых приближений по формулам (13)–(16).

Как видно, использование LSM для второго уровня дает существенное уменьшение количества итераций, а также отсутствие случаев расходимости процесса. Приведенные результаты также свидетельствуют, что увеличение количества подобластей приводит к уменьшению числа итераций, близкому к линейному. Влияние длины периода рестарта  $m$  на скорость сходимости итераций оказывается не критичным и проявляет себя по-разному: с ростом  $m$  для симметричных СЛАУ число итераций в целом убывает, а для несимметричных растет.

Таблица 4. Численные результаты для  $P = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$  и  $p = q = 0$  для итераций со вторым уровнем МНК-ускорения.

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	27 14 1	26 14 1	26 14 1	26 14 1
$32^2$	53 27 14	49 26 14	50 26 14	48 26 14
$64^2$	98 55 26	97 49 26	94 49 26	92 48 26
$128^2$	185 98 55	177 98 48	181 92 49	177 91 47

Таблица 5. Результаты для двойного LSM-ускорения при  $p = q = 4$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	38 23 1	67 37 1	135 97 1	324 195 1
$32^2$	71 45 22	89 85 37	169 164 97	394 450 194
$64^2$	139 73 45	140 109 95	178 212 163	342 393 392
$128^2$	281 415 72	273 152 111	275 238 208	346 463 400

Далее в таблицах 6 и 7 демонстрируются аналогичные данные по эффективности применения кусочно-линейных базисов по формулам (19).

Таблица 6. Результаты расчетов с применением кусочно-линейного базиса (19) и двойного LSM-ускорения при  $p = q = 0$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	24 12 1	22 12 1	21 12 1	21 12 1
$32^2$	45 26 12	45 27 11	42 25 11	41 25 11
$64^2$	81 49 27	81 48 27	83 50 26	78 47 26
$128^2$	153 90 49	145 93 49	150 92 51	152 92 49

Как показывает сравнение этих результатов с таблицами 4 и 5, повышение порядка базисных функций на единицу уменьшает количество итераций примерно на 10% при решении симметричных СЛАУ и почти что вдвое – для несимметричных систем, т.е. при наличии конвекции.

Таблица 7. Результаты расчетов с применением кусочно-линейного базиса (19) и двойного LSM-ускорения при  $p = q = 4$ .

$N \setminus m$	8	16	32	64
$16^2$	27 14 1	36 17 1	54 20 1	84 20 1
$32^2$	47 27 12	51 30 12	72 40 12	104 68 12
$64^2$	88 50 27	87 52 27	97 60 32	142 81 32
$128^2$	160 96 51	159 96 51	166 96 52	181 113 65

## §5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные аппроксимационные принципы построения грубосеточной коррекции с двухуровневым применением методов наименьших квадратов представляются перспективным подходом к ускорению итерационных процессов в подпространствах Крылова с возможностью дополнительного использования алгоритмов мульти-предобуславливания. Необходимо сделать одно замечание о распараллеливании предложенных алгоритмов. Оно касается быстрого и эффективного получения матриц  $\hat{B}$  и  $\check{B}$ . В случае, когда мы имеем систему уравнений порядка  $N \approx 10^6$  и выше, а количество подобластей относительно невелико ( $P \approx i \cdot 10$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ), количество рестартов  $m \approx i \cdot 10$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то для вычисления элементов матрицы  $B$  требуется неоднократно проводить умножение “вытянутых” матриц  $W$  на матрицу  $A$ . Можно значительно ускорить этот процесс, если реализовать подобное умножение параллельно с помощью эффективных функций из библиотеки MKL INTEL. То же самое можно сказать и о вычислениях элементов матрицы  $W$  через многочисленные скалярные произведения векторов, которые можно выполнять синхронно на различных устройствах многопроцессорной вычислительной системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин, Д. В. Перевозкин, *Алгебро-геометрические и информационные структуры методов декомпозиции областей*. — Вычисл. методы програм. **17** (2016), 132–146.
2. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publ., NY, 1996.
3. Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин, *О технологиях ускорения параллельных методов декомпозиции*. — Вычисл. методы програм. **16** (2015), 146–154.

4. В. П. Ильин, *О методах наименьших квадратов в подпространствах Крылова*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 131–147.
5. Y. Saad, M. Yeung, J. Erhel, F. Guyomarc'h, *A deflated version of the Conjugate Gradient Algorithm*. — SIAM J. Sci. Comput. **21**, No. 5 (2000), 1909–1926.
6. В. П. Ильин. *Методы и технологии конечных элементов*, ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, 2007.
7. <http://www.sccc.icmmg.nsc.ru>.

Gurieva Y. L., Il'in V. P. On coarse grid correction methods in Krylov subspaces.

Two approaches using coarse grid correction in the course of a certain Krylov iterative process are presented. The aim of the correction is to accelerate the iterations. These approaches are based on an approximation of the function sought for by simple basis functions having finite supports. Additional acceleration can be achieved if one applies restarts of the iterative process together with the approximate solution refinement approach. In this case, the resulting process turns out to be a two-level preconditioned method. A series of numerical experiments has been carried out to show the influence of different parameters of the iterative process on the convergence.

Институт вычислительной  
математики  
и математической геофизики СО РАН  
Новосибирск, Россия

Поступило 1 ноября 2017 г.

Новосибирский  
государственный университет  
Новосибирск, Россия  
*E-mail*: yana@lapasrv.sccc.ru  
*E-mail*: ilin@sccc.ru