Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Е. Г. Голузина

О ВЗАИМНОМ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПРОИЗВОДНОЙ В ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Посвящается памяти Галины Васильевны Кузьминой

§1. Обозначения и основные результаты

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, т.е. вещественных на диаметре $(-1, 1)$, а в остальных точках круга U $\operatorname{Im} f(z)$ и $\operatorname{Im} z$ всегда одного знака.

Для функций класса T известно [1, 2] интегральное представление

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} z(1 - 2tz + z^2)^{-1} d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1, \qquad (1)$$

где M_1 – класс функций $\mu(t)$, не убывающих на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$.

Из (1) следуют точные оценки для $f'(r)$, c_4 и c_5:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant f'(r) \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad 0 < r < 1;$$

$$-4 \leqslant c_4 \leqslant 4, \quad -\frac{5}{4} \leqslant c_5 \leqslant 5.$$

Пусть T' – класс функций $f(z) \in T$ с фиксированным значением $f'(r)$, $\frac{1-r}{(1+r)^3} < f'(r) < \frac{1+r}{(1-r)^3}$, $0 < r < 1$.

В [3] найдено множество значений системы $\{c_3, f'(r)\}$ и получены точные оценки для c_3 в классе T'.

В данной работе определены множества значений систем $\{c_4, f'(r)\}$ и $\{c_5, f'(r)\}$ в классе T'.

Положим $\rho = \rho(r) = r + \frac{1}{r}$. Имеем $\rho'(r) = \frac{r^2-1}{r^2}$.

Ключевые слова: типично вещественные функции, оценки коэффициентов.

Положим:

$$\varphi(x) = (\rho - \sqrt{-\rho'(r)/x})^3 - 2(\rho - \sqrt{-\rho'(r)/x}),$$
$$\psi(x) = (\rho - \sqrt{-\rho'(r)/x})^4 - 3(\rho - \sqrt{-\rho'(r)/x})^2 + 1.$$

Имеем:

$$\varphi(x_j) = 0,\ j = 1,2,3,\ \text{где}\ x_1 = \frac{-\rho'(r)}{(\rho+\sqrt{2})^2},\ x_2 = \frac{-\rho'(r)}{\rho^2},\ x_3 = \frac{-\rho'(r)}{(\rho-\sqrt{2})^2};$$

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2}(\rho - \sqrt{-\rho'/x})^2\sqrt{-\rho'}x^{-3/2} - \sqrt{-\rho'}x^{-3/2},$$

$$\varphi'(x_m) = 0, \quad x_m = (-\rho'(r))\Big(\frac{3\rho+\sqrt{6}}{3\rho^2-2}\Big)^2,$$

$$\varphi'(x_M) = 0, \quad x_M = (-\rho'(r))\Big(\frac{3\rho-\sqrt{6}}{3\rho^2-2}\Big)^2;$$

$$\psi(x_j) = 0,\ j = 1,2,3,4,\ \text{где}\ x_1 = (-\rho'(r))\left(\rho + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^{-2},$$

$$x_2 = (-\rho'(r))\left(\rho + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^{-2},\ x_3 = (-\rho'(r))\left(\rho - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^{-2},$$

$$x_4 = (-\rho'(r))\left(\rho - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^{-2};$$

$$\psi'(x) = 2\Big(\rho - \sqrt{-\rho'/x}\Big)^3\frac{-\rho'}{x^{3/2}} - 3\Big(\rho - \sqrt{-\rho'/x}\Big)\frac{\sqrt{-\rho'}}{x^{3/2}},$$

$$\psi'(x) = 0\ \text{при}\ x = x_M = (-\rho')/\rho^2,$$

$$x_{m_1} = (-\rho')\left(\rho + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{-2}, \quad x_{m_2} = (-\rho')\left(\rho - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{-2};$$

$$\varphi''(x) = 3\Big(\rho - \sqrt{(-\rho')/x}\Big)\frac{\sqrt{(-\rho')}}{2x^{3/2}} - \frac{9}{4}\frac{\sqrt{(-\rho')}}{x^{5/2}}$$
$$\times\Big(\rho - \sqrt{x^{-1}(-\rho')}\Big)^2 + \frac{3\sqrt{(-\rho')}}{2x^{5/2}},$$

$$\psi''(x) = 3\Big(\rho - \sqrt{(-\rho')/x}\Big)^2\frac{(-\rho')}{x^3} - 3\frac{\sqrt{-\rho'}}{x^{5/2}}\Big(\rho - \sqrt{(-\rho')/x}\Big)^3$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(-\rho')}{x^3}+\frac{9}{2}\Big(\rho-\sqrt{(-\rho')/x}\Big)\frac{\sqrt{-\rho'}}{x^{5/2}}.$$

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_nz^n\in T'$, $0<r<1$, $f'(r)=x$.

Если $\rho\geqslant\frac{9}{2}$, *то имеют место точные оценки:*

$$c_4\leqslant\varphi(x)\quad \textit{при}\quad x\in[(-\rho')(\rho+2)^{-2},\widetilde{x}_1],\tag{2}$$

$$c_4\leqslant 4+\frac{[\varphi(\widetilde{x}_1)-4][x+\rho'(\rho-2)^{-2}]}{\widetilde{x}_1+\rho'(\rho-2)^{-2}}\ \textit{при}\ x\in[\widetilde{x}_1,(-\rho')(\rho-2)^{-2}],\tag{3}$$

$$c_4\geqslant -4+\frac{[\varphi(\widetilde{x}_2)+4][x+\rho'(\rho+2)^{-2}]}{\widetilde{x}_2+\rho'(\rho+2)^{-2}}\ \textit{при}\ x\in[(-\rho')(\rho+2)^{-2},\widetilde{x}_2],\tag{4}$$

$$c_4\geqslant\varphi(x)\quad \textit{при}\quad x\in[\widetilde{x}_2,(-\rho')(\rho-2)^{-2}].\tag{5}$$

Здесь $\widetilde{x}_1$ *и* $\widetilde{x}_2$ *– это соответственно корни уравнений*

$$(\rho^3-2\rho-4)t^3-\Big(\frac{5}{2}\rho^2-4\rho-7\Big)t^2-6t+\frac{3}{2}=0\tag{6}$$

и

$$(\rho^3-2\rho+4)t^3-\Big(\frac{5}{2}\rho^2+4\rho-7\Big)t^2+6t+\frac{3}{2}=0,\tag{7}$$

где $t=\sqrt{x/(-\rho')}$ *и* $\widetilde{x}_1\in(-\rho'/(\rho+2)^{-2},x_M)$, $\widetilde{x}_2\in(x_m,(-\rho')(\rho-2)^{-2})$.

Если $\rho_0<\rho<\frac{9}{2}$, *то имеют место точные оценки* (2)–(4), *точная оценка* (5) *при* $x\in[\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3]$ *и точная оценка*

$$c_4\leqslant 4+\frac{[\varphi(\widetilde{x}_3)-4][x+\rho'(\rho-2)^{-2}]}{\widetilde{x}_3+\rho'(\rho-2)^{-2}}\ \textit{при}\ x\in[\widetilde{x}_3,(-\rho')(\rho-2)^{-2}].\tag{8}$$

Здесь $\widetilde{x}_3$ *– корень уравнения* (6), $\widetilde{x}_3\in[x_m,(-\rho')(\rho-2)^{-2}]$.

Если $2<\rho\leqslant\rho_0$, *то имеют место точные оценки* (2)–(3) *и точная оценка*

$$c_4\geqslant 4+\frac{8[x+\rho'(\rho-2)^{-2}]}{(-\rho')[(\rho-2)^{-2}-(\rho+2)^{-2}}\ \textit{при}\ x\in[\frac{-\rho'}{(\rho+2)^2},\frac{-\rho'}{(\rho-2)^2}],\tag{9}$$

где $\widetilde{x}_3(\rho_0)=\widetilde{x}_2(\rho_0)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_uz^u\in T'$, $0<r<1$, $f'(r)=x$.

Если $\rho \geqslant \frac{24}{7}$, *то имеют место точные оценки:*

$$c_5 \leqslant 5 \quad \textit{при} \quad x \in [(-\rho')(\rho+2)^{-2}, (-\rho')(\rho-2)^{-2}], \tag{10}$$

$$c_5 \geqslant -\frac{5}{4} \quad \textit{при} \quad x \in [(-\rho')(\rho+\sqrt{3/2})^{-2}, (-\rho')(\rho-\sqrt{3/2})^{-2}], \tag{11}$$

$$\begin{gathered} c_5 \geqslant 1 - 3(\rho - \sqrt{(-\rho')/x})^2 + (\rho - \sqrt{-\rho'/x})^4 \\ \textit{при} \quad x \in [(-\rho')(\rho+2)^{-2}, (-\rho')(\rho+\sqrt{3/2})^{-2}] \\ \textit{и} \quad x \in [(-\rho')(\rho-\sqrt{3/2})^{-2}, (-\rho')(\rho-2)^{-2}]. \end{gathered} \tag{12}$$

Если $\rho < \frac{24}{7}$, *то имеют место точные оценки* (10)–(11), *точная оценка* (12) *при*

$$x \in [(-\rho')(\rho+2)^{-2}], \quad [(-\rho')(\rho+\sqrt{3/2})^{-2}]$$

и

$$x \in [(-\rho')(\rho-\sqrt{3/2})^{-2}, \widetilde{x}_4]$$

и точная оценка

$$c_5 \geqslant 5 + \frac{[\psi(\widetilde{x}_4) - 5][x + \rho'(\rho-2)^{-2}]}{\widetilde{x}_4 + \rho'(\rho-2)^{-2}} \; \textit{при} \; x \in [\widetilde{x}_4, (-\rho')(\rho-2)^{-2}]. \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{x}_4$ – *корень уравнения*

$$\begin{aligned} (\rho-2)(\rho^3+2\rho^2+\rho+2)t^4 - (4\rho^3 - 4\rho^2 - 11\rho - 4)t^3 \\ + t^2(3\rho^2 - 12\rho - 9) + 2(\rho+4)t - 2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$t = \sqrt{x/(-\rho')}, \quad \widetilde{x}_4 \in [(-\rho')(\rho-\sqrt{3/2})^{-2}, (-\rho')(\rho-2)^{-2})].$$

§2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Из (1) для системы $\{c_4, f'(r)\}$ имеем интегральное представление:

$$c_4 = \int_{-1}^{1} (8t^3 - 4t)\,d\mu(t), \quad f'(r) = \int_{-1}^{1} \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2t)^2}\,d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1.$$

В силу теоремы 1 в [4], множество значений D_1 системы $\{c_4, f'(r)\}$ на классе T совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой кривой l_1:

$$l_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), \quad x \in \Big[\frac{-\rho'(r)}{(\rho+2)^2}, \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\Big]\Big\}.$$

Заметим, что $\varphi''\Big(\frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\Big) = 0$ при $\rho = \frac{9}{2}$. Далее, $\varphi''(x) = 0$ при $x = -\rho'\Big(\frac{4\rho+\sqrt{\rho^2+10}}{3\rho^2-2}\Big)^2 = x_p$. Имеем $x_p \geqslant \frac{-\rho'}{(\rho-2)^2}$ при $\rho \geqslant \frac{9}{2}$. Следовательно, в случае $\rho \geqslant \frac{9}{2}$ множество D_1 ограничено двумя прямолинейными отрезками I_1 и I_2 с концами соответственно в точках $(f'(r), c_4) = (\widetilde{x}_1, \varphi(\widetilde{x}_1))$ и $(f'(r), c_4) = (-\rho'(\rho-2)^{-2}, 4)$ и в точках $(f'(r), c_4) = (-\rho'(\rho+2)^{-2}, -4)$ и $(f'(r), c_4) = (\widetilde{x}_2, \varphi(\widetilde{x}_2))$, а также кривыми L_1 и L_2, где

$$L_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), \quad x \in [-\rho'(\rho+2)^{-2}, \widetilde{x}_1]\Big\},$$

$$L_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), \quad x \in [\widetilde{x}_2, (-\rho')(\rho-2)^{-2}]\Big\}.$$

Для нахождения точек $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ имеем соответственно уравнения

$$\varphi'(x)\Big[x - \frac{-\rho'(r)}{(\rho \mp 2)^2}\Big] \pm 4 = \varphi(x),$$

которые приводятся к виду

$$\Big(t - \frac{1}{\rho \mp 2}\Big)^2 \Big[t^3(\rho^3 - 2\rho \mp 4) + t^2\Big(\pm\frac{5}{2} - 4\rho \mp 7\Big) + 6t \mp \frac{3}{2}\Big] = 0 \qquad (15)$$

при $t = \sqrt{x/(-\rho')}$.

Если $\rho_0 < \rho < \frac{9}{2}$, то множество значений D_1 ограничено I_1, I_2, L_1, кривой

$$L_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), \quad x \in [\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3]\Big\}$$

и прямолинейным отрезком I_3 с концами в точках

$$(f'(r), c_4) = (\widetilde{x}_3, \varphi(\widetilde{x}_3)) \quad \text{и} \quad (f'(r), c_4) = (-\rho'/(\rho-2)^2, 4).$$

Здесь $\widetilde{x}_3 \in (x_m, -\rho'(\rho-2)^{-2})$ и $\widetilde{x}_3$ – корень уравнения (15).

Если $2 < \rho \leqslant \rho_0$ и $\widetilde{x}_3(\rho_0) = \widetilde{x}_2(\rho_0)$, то D_1 ограничено I_1, L_1 и прямолинейным отрезком I_4 с концами в точках

$$(f'(r), c_4) = (-\rho'/(\rho \mp 2)^2, \pm 4).$$

Из сказанного выше следуют оценки (2)–(5), (8) и (9).

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Из (1) для системы $\{f'(r), c_5\}$ получаем интегральное представление:

$$f'(r) = \int_{-1}^{1} (-\rho'(r))(\rho - 2t)^{-2} d\mu(t),$$
$$c_5 = \int_{-1}^{1} (16t^4 - 12t^2 + 1) d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1.$$

По теореме 1 в [4], множество значений D_2 системы $\{f'(r), c_5\}$ на классе T совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой кривой

$$l_2 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \psi(x), \quad x \in [-\rho'(\rho+2)^{-2}, -\rho'(\rho-2)^{-2}]\Big\}.$$

Заметим, что $\psi''(-\rho'(\rho-2)^{-2}) = 0$ при $\rho = 3 + \frac{3}{7}$. Пусть $\widetilde{x}_p$ – точка перегиба кривой l_2. Из условия $\psi''(\widetilde{x}_p) = 0$ следует, что $\widetilde{x}_p$ – корень уравнения

$$3\rho(3-\rho^2)t^3 + 12(\rho^2 - 1)t^2 - 15\rho t + 6 = 0,$$

где $t = \sqrt{\widetilde{x}_p/(-\rho')}$. В случае $\rho < \frac{24}{7}$ имеем $\widetilde{x}_p \in (x_{m_2}, (-\rho')(\rho-2)^{-2})$. Итак, в случае $\rho \geqslant \frac{24}{7}$ множество значений D_2 ограничено двумя прямолинейными отрезками с концами в точках $c_5 = 5$, $f'(r) = \frac{-\rho}{(\rho \pm 2)^2}$ и $c_5 = -\frac{5}{4}$, $f'(r) = (-\rho')/(\rho \pm \sqrt{3/2})^2$, а также кривыми $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$:

$$\widetilde{L}_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \psi(x), \quad x \in [-\rho'/(\rho+2)^2, x_{m_1}]\Big\},$$
$$\widetilde{L}_2 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \psi(x), \quad x \in [x_{m_2}, (-\rho')/(\rho-2)^2]\Big\}.$$

Если $\rho < \frac{24}{7}$, то D_2 ограничено $\widetilde{I}_1$, $\widetilde{I}_2$, $\widetilde{L}_1$, кривой

$$\widetilde{L}_3 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \psi(x), \quad x \in [\widetilde{x}_{m_2}, \widetilde{x}_4]\Big\},$$

и прямолинейным отрезком

$$\widetilde{I}_3 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5 + \frac{[\psi(\widetilde{x}_4) - 5][x + \rho'(\rho-2)^{-2}]}{\widetilde{x}_4 + \rho'(\rho-2)^{-2}}, \quad x \in [\widetilde{x}_4, (-\rho')(\rho-2)^{-2}]\Big\}.$$

Здесь $\widetilde{x}_4$ – точка касания кривой $\widetilde{L}_2$ прямой, проходящей через точку $\left(-\frac{\rho'}{(\rho-2)^2}, 5\right)$. Она является корнем уравнения

$$\psi'(x)\Big(x - \frac{-\rho'}{(\rho-2)^2}\Big) = \psi(x) - 5,$$

которое запишем в виде

$$\Big(t - \frac{1}{\rho - 2}\Big)^2 a(x) = 0,$$

где $a(x)$ – левая часть уравнения (14).

Из сказанного выше получаем оценки (10)–(13).

Теорема 2 доказана. $\square$

Знак равенства в (2), (5) и (12) имеет место для функции

$$f_1(z) = z\big[1 + z^2 - z(\rho - \sqrt{(-\rho')/f'(r)})\big]^{-1}.$$

Знак равенства в (3), (4) и (8)–(13) имеет место для функции вида

$$f(z; t_1, t_2) = \frac{\lambda_1 z}{1 - 2t_1 z + z^2} + \frac{\lambda_2 z}{1 - 2t_2 z + z^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

при $t_1 = +1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'}{\widetilde{x}_1}}\Big)$ – в (3),

при $t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'}{\widetilde{x}_2}}\Big)$ – в (4),

при $t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'}{\widetilde{x}_3}}\Big)$ – в (8),

при $t_1 = 1, \quad t_2 = -1$ – в (9) и (10),

при $t_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad t_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ – в (11),

при $t_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad t_2 = \pm 1$ – в (12),

при $t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'}{\widetilde{x}_4}}\Big)$ – в (13).

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27(69)** (1950), 201–218.
3. Е. Г. Голузина, *О взаимном изменении производной и третьего коэффициента в одном классе регулярных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 15–21.
4. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

Goluzina E. G. On the mutual change of the coefficients and values of the derivative in a class of regular functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$. Sharp estimates for the coefficients c_4 and c_5 in terms of $f'(r)$ are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 13 ноября 2017 г.